

Практическое занятие 3. Электропроводность металлов и сплавов.

Задача 1. Известно, что алюминий кристаллизуется в решетке гранецентрированного куба с периодом идентичности $a = 0,4041$ нм. Вычислите концентрацию свободных электронов, полагая, что на каждый атом кристаллической решетки приходится три электрона.

Решение

В решетке гранецентрированного куба на одну элементарную ячейку приходится четыре атома. Поэтому число атомов в единице объема

$$N = 4/a^3 = 4/(0,4041 * 10^{-9})^3 = 6,06 * 10^{28} \text{ м}^{-3}.$$

Отсюда концентрация электронов

$$n = 3N = 18,18 * 10^{28} \text{ м}^{-3}.$$

Задача 2. Доказать, что средняя энергия свободных электронов в металле вблизи $T = 0$ К составляет $3/5$ энергии Ферми.

Решение

При низкой температуре уровень Ферми W_F характеризует максимальную энергию электронов проводимости в металле. Распределение электронов по энергиям

$$dn(W) = N(W)f(W)dW,$$

где $dn(W)$ - число электронов, приходящихся на энергетический интервал от W до $W + dW$;

$N(W)$ - плотность состояний в зоне проводимости, т. е. число состояний, приходящихся на единичный интервал энергий;

$f(W)$ - вероятность заполнения квантовых состояний электронами.

В соответствии с распределением Ферми - Дирака для всех состояний с энергией $W < W_F$ функция $f(W) = 1$, а для состояний с энергией $W > W_F$ функция $f(W) = 0$. Для определения средней энергии электронов необходимо суммарную энергию всех электронов, находящихся в единице объема, разделить на их концентрацию n :

$$\bar{W} = \frac{1}{n} \int_0^{W_F} W dn(W) = \int_0^{W_F} WN(W) dW.$$

Учитывая, что

$$N(W) = 4\pi \left(\frac{2m_n}{h^2} \right)^{3/2} W^{1/2},$$

$$n = \frac{8\pi}{3} \left(\frac{2m_n}{h^2} \right)^{3/2} W_F^{3/2},$$

где m_n – эффективная масса электрона, получаем

$$\bar{W} = \frac{3}{2W_F^{3/2}} \int_0^{W_F} WW^{1/2} dW = \frac{3}{5} W_F.$$

Задача 3. Вычислить длину свободного пробега электронов меди при $T=300$ К, если ее удельное сопротивление при этой температуре равно $0,017$ мкОм/м.

Решение

Согласно представлением квантовой теории, удельное сопротивление металлов связано с длиной свободного пробега электронов \bar{l} соотношением

$$\rho = \left(\frac{3}{8\pi} \right)^{1/3} \frac{h}{e^2 n^{2/3} \bar{l}}$$

Концентрация свободных электронов в меди

$$n = d \frac{N_0}{A} = \frac{8920 \cdot 6,02 \cdot 10^{23}}{63,54 \cdot 10^{-3}} = 8,45 \cdot 10^{28} \text{ м}^{-3}.$$

Отсюда следует, что длина свободного пробега

$$\bar{l} = \left(\frac{3}{8 \cdot 3,14} \right)^{1/3} \frac{6,62 \cdot 10^{-34}}{(1,6 \cdot 10^{-19})^2 (8,45 \cdot 10^{28})^{2/3} 0,017 \cdot 10^{-6}} = 3,89 \cdot 10^{-8} \text{ м}.$$

Задача 4. Определить время, в течение которого электрон пройдет расстояние 1 км по медному проводу, если удельное сопротивление меди $0,017$ мкОм · м, а

разность потенциалов на концах проводника $U=220\text{В}$. За какое время электрон пролетит это же расстояние, двигаясь без соударений, при той же разности потенциалов? Каково время передачи сигнала?

Решение

Из закона Ома следует, что удельная проводимость $\gamma = en\nu / E$.

Концентрация свободных электронов в меди $n = 8,45 \cdot 10^{28} \text{ м}^{-3}$. (см. решение задачи 2.2.19). Тогда средняя скорость дрейфа электронов

$$\nu = E / (\rho en) = U / (\rho enl) = \frac{220}{0,017 \cdot 10^{-6} \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 8,45 \cdot 10^{28} \cdot 10^3} = 9,6 \cdot 10^{-4} \text{ м/с}.$$

Время дрейфа электрона по проводнику $t = l / \nu = 10^6 \text{ с}$.

При отсутствии столкновений с узлами решетки электрон движется равноускоренно и время пролета

$$t_{np} = \sqrt{2l/a} = \sqrt{2l^2 m / (eU)} = \sqrt{\frac{2 \cdot 10^6 \cdot 9,1 \cdot 10^{-31}}{1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 220}} = 2,26 \cdot 10^{-4} \text{ с}.$$

Передача энергии вдоль проводов линии осуществляется электромагнитным полем, распространяющимся вдоль проводов со скоростью света C .

Пологая, что средой, окружающей провод, является воздух, время передачи сигнала

$$t_c = l / c = 10^3 / (3 \cdot 10^8) = 3,33 \cdot 10^{-6} \text{ с}.$$