

Дисциплина «Методы и средства контроля параметров материалов электроники и наноэлектроники»

Лекция 6. Методы изучения электротранспортных свойств материалов

1. Фундаментальная система уравнений, полученная на базе зонной теории твердых тел

Для различных материалов, используемых в твердотельной электронике, одним из основных электротехнических параметров является проводимость. Она пренебрежимо мала в диэлектриках, имеет средние значения для полупроводников и достаточно высока для металлов. При одинаковых внешних условиях, металлы и полупроводники отличаются **зависимостью проводимости от температуры**.

В металлах эта зависимость определяется равенством:

$$\sigma(T) = \sigma(T_0)[1 - \alpha(T - T_0)], \quad (1)$$

где T_0 – некоторая стартовая температура, T – текущее значение температуры, получаемое в процессе измерения ($T > T_0$), а α – температурный коэффициент проводимости.

В полупроводниках зависимость проводимости от температуры в общем случае **может оказаться очень сложной функцией** - все зависит от типа и количества различных примесных атомов в них.

В наиболее простом случае бездефектных и бесприесных полупроводников температурная зависимость проводимости приближенно описывается экспоненциальной функцией:

$$\sigma(T) \approx \sigma_0 e^{-\frac{\Delta E}{kT}}, \quad (2)$$

где σ_0 – константа, температурной зависимостью которой пренебрегают, ΔE – величина, имеющая размерность энергии и называемая энергией температурной активации проводимости (ее обычно указывают в эВ), k – постоянная Больцмана, равная 8.614210^{-5} эВ·К⁻¹, T – абсолютная температура полупроводника (в градусах К). **После логарифмирования** левой и правой частей выражения (1.2) получается новое приближенное равенство,

$$\ln[\sigma(T)] \approx \sigma_0 - \frac{\Delta E}{kT} = \sigma_0 - \frac{\Delta E}{k} \frac{1}{T}, \quad (3)$$

которое представляет линейную зависимость величины $\ln[\sigma(T)]$ от $1/T$. График этой зависимости – прямая.

На рис.1 представлены графически экспериментальные зависимости подобного типа, определенные для трех твердых тел – медного проводника (Cu) и германиевого (Ge) и кремниевого (Si) полупроводников. Поскольку наклоны прямых линий, представляющих графики зависимостей (3) для германия и кремния, определяются значениями ΔE , то для их определения достаточно произвести простейшие вычисления.

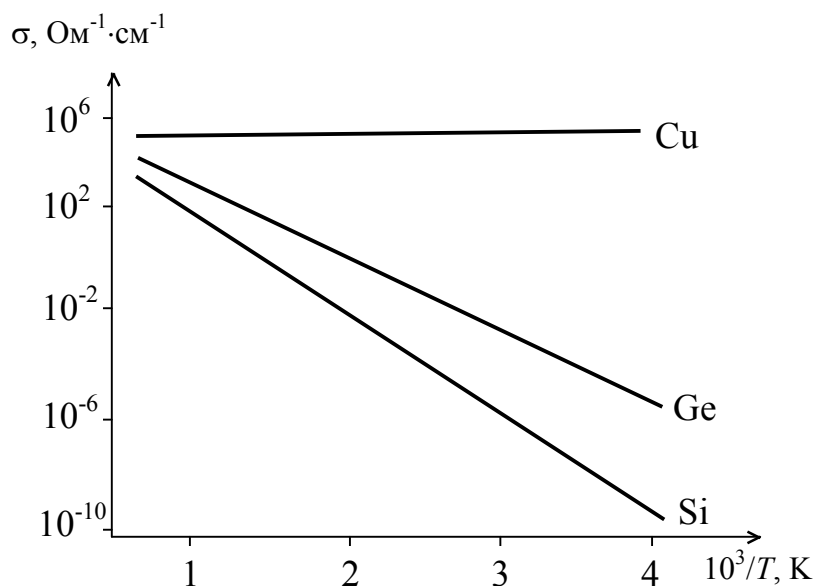


Рис. 1. Зависимость электропроводности чистых материалов от температуры

На рис.2 показана зависимость электропроводности беспримесного кремния от температуры при освещении его солнечным светом (график 2).

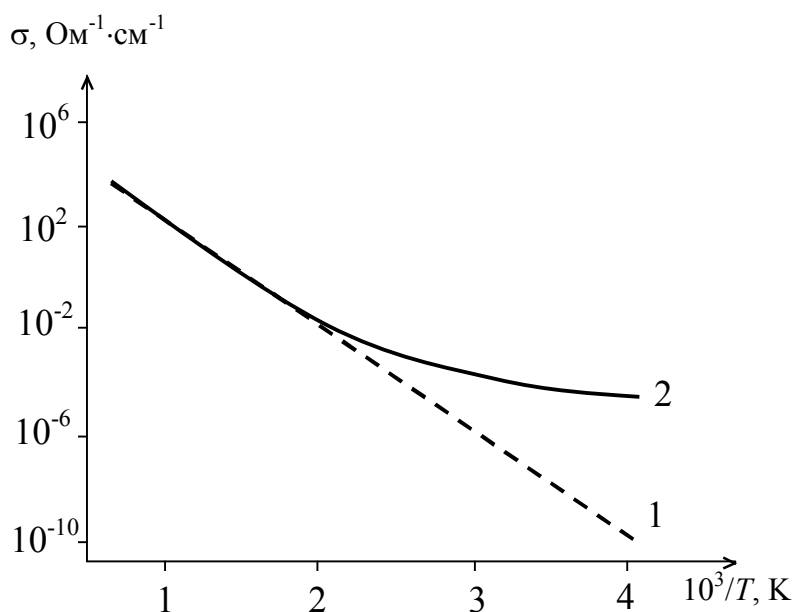


Рис. 2. Влияние освещения на температурную зависимость электропроводности кремния: зависимости, полученные в темноте (1) на свету (2)

Расчет проводимости полупроводников обычно производят на основе **зонной модели**.

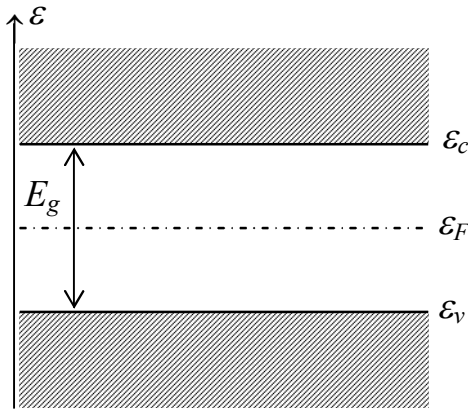


Рис. 3. Зонная диаграмма полупроводника

Схематическое изображение наиболее важных зон полупроводника представлено на **рис. 3**, где: ε_c , ε_v и ε_F – значения энергии, соответствующие дну зоны проводимости, потолку валентной зоны и уровню Ферми; E_g – ширина запрещенной зоны.

В результате теоретических расчетов было найдено, что равновесные концентрации свободных электронов n_0 и дырок p_0 в полупроводнике определяются следующими равенствами:

$$n_0 = N_c \exp\left[-\frac{(\varepsilon_c - \varepsilon_F)}{k_B T}\right], \quad p_0 = N_v \exp\left[\frac{(\varepsilon_v - \varepsilon_F)}{k_B T}\right], \quad (4)$$

где: N_c и N_v – эффективные плотности состояний в зоне проводимости и в валентной зоне (соответственно), k_B – постоянная Больцмана, T – абсолютная температура полупроводника. Для кремния $N_c \approx N_v \approx 2 \cdot 10^{19} \text{ см}^{-3}$. Энергия Ферми (электрохимический потенциал) фактически равна работе, которую необходимо совершить для изменения числа свободных носителей заряда на единицу. В беспримесном и бездефектном полупроводнике (в собственном полупроводнике) энергия Ферми обозначается ε_i и она равна:

$$\varepsilon_i = \varepsilon_F = \frac{\varepsilon_c + \varepsilon_v}{2} + \frac{k_B T}{2} \ln\left(\frac{N_v}{N_c}\right). \quad (5)$$

где N_v/N_c приблизительно пропорционально отношению эффективных масс дырки и электрона. Если за счет термического возбуждения электрон покидает валентную зону, то на его месте в этой зоне образуется дырка. Поэтому собственные концентрации свободных носителей в идеальном беспримесном полупроводнике одинаковы и определяются равенством

$$n_i = p_i = \sqrt{N_c N_v} \exp\left(\frac{E_g}{2k_B T}\right), \quad (6)$$

где $N_v N_c \sim T^3$, а $E_G = E_{G0} - k_1 T$. Зависимость E_G от температуры приводит к тому, что при $T = 0$ К ширина запрещенной зоны, например, кремния $E_G = E_{G0} = 1,21$ эВ, в то время как при комнатной температуре ($T = 300$ К) $E_G = 1,1$ эВ.

Практические **расчеты концентрации свободных носителей в бездефектном беспримесном полупроводнике** для заданной температуры следует вести по формуле

$$n_i(T) = BT^{3/2} \exp\left(-\frac{E_{g0}}{2k_B T}\right), \quad (7)$$

где значения констант для кремния и германия следующие: 1) кремний: $B = 3,873 \cdot 10^{16} \text{ К}^{-3/2} \cdot \text{см}^{-3}$, $E_{G0} = 1,21$ эВ(1,17); 2) германий: $B = 1,760 \cdot 10^{16} \text{ К}^{-3/2} \cdot \text{см}^{-3}$, $E_{G0} = 0,785$ эВ(0,66). Используя эту формулу, для кремния при $T = 300$ К можно получить $n_i(\text{Si}) = 1,4 \cdot 10^{10} \text{ см}^{-3}$, а для германия $n_i(\text{Ge}) = 2,3 \cdot 10^{13} \text{ см}^{-3}$.

Для целенаправленного изменения проводимости и других физических свойств полупроводника его легируют донорными (фосфор Р, мышьяк As, сурьма Sb) или акцепторными (алюминий Al, галлий Ga, индий In) примесями.

В полупроводнике с донорными или акцепторными примесями произведение равновесных концентраций носителей заряда является некоторой постоянной величиной (которая, однако, зависит от температуры). **Единственное условие**, которое при этом налагается, состоит в том, чтобы интервалы между уровнем E_F и границами разрешенных зон должны были достаточно велики по сравнению с параметром $k_B T$.

За счет термического возбуждения постоянно происходит генерация свободных носителей как за счет переноса электронов из валентной зоны в зону проводимости, так и вследствие ионизации донорных и акцепторных атомов. Одновременно с этим происходят рекомбинационные процессы, приводящие к исчезновению свободных носителей. Генерация электронов и дырок и их рекомбинация происходят непрерывно. При любой температуре устанавливается такое равновесное состояние, что произведение np при неизменных значениях T и E_g оказывается постоянным:

$$np = n_i^2 = p_i^2 = \text{const}. \quad (8)$$

Равенство (8) называют **законом действующих масс**. В случае термодинамического равновесия этот закон справедлив как для собственных, так и для примесных полупроводников. **Если же равновесие нарушено и величины n и p в некотором конкретном приборе зависят от внешних факторов, то $np \neq n_i^2$.**

Концентрации носителей заряда можно представить в виде функций:

$$n = n_i \exp\left[\frac{E_F - E_i}{k_B T}\right], \quad p = n_i \exp\left[\frac{E_i - E_F}{k_B T}\right]. \quad (9)$$

Эти формулы в равной мере относятся как к собственным, так и к примесным полупроводникам.

Равенства (8) и (9) позволяют получить формулу

$$np = n_i^2 = B^{1/2} T^3 \exp\left(-\frac{E_{G0}}{k_B T}\right). \quad (10)$$

Необходимо иметь в виду, что **концентрация носителей заряда определяется положением уровня Ферми**. Приближенные выражения, определяющие уровень E_F для примесного полупроводника с донорной примесью, можно найти, используя равенство:

$$N_d = N_c \exp[-(E_c - E_F)/(kT)].$$

В результате находим, что

$$E_F = E_c - kT \ln(N_c / N_d). \quad (11)$$

Для полупроводника р-типа используем равенство

$$N_a = N_v \exp[-(E_F - E_v)/(kT)],$$

откуда получаем

$$E_F = E_v + kT \ln(N_v / N_a). \quad (12)$$

Говорят, что полупроводник является *вырожденным*, если концентрация примесей настолько высока, что уровень E_F лежит на границах разрешенных зон или внутри той или другой из этих зон. В более строгом смысле вырожденный полупроводник характеризуется неравенством

$$E_c - E_F > 3kT.$$

Это условие приводит к тому, что формулы (2.11) и (2.12) становятся не совсем точными.

В примесных полупроводниках **любого типа проводимости** (n или p) одновременно присутствуют как свободные электроны, так и дырки. Тех из них, которые соответствуют типу проводимости полупроводника, называются **основными** носителями заряда. Носители противоположного типа называются **неосновными**. Для определения их концентраций можно использовать следующие формулы:

$$\begin{aligned} n_n &= \frac{1}{2} N_d \left[1 + \left(1 + \frac{4n_i^2}{N_d^2} \right)^{1/2} \right], \\ p_n &= \frac{1}{2} N_d \left[-1 + \left(1 + \frac{4n_i^2}{N_d^2} \right)^{1/2} \right]. \end{aligned} \quad (13)$$

где n_n и p_n – соответственно основные и неосновные носители заряда в полупроводнике n -типа, p

В равновесных условиях полупроводник должен быть электронейтрален. Условие электронейтральности представляется равенством:

$$p + N_d - n - N_a = 0, \quad (14)$$

где N_d и N_a соответственно обозначают концентрации донорных и акцепторных атомов.

Часто в практически важных случаях (т.е. при комнатных температурах и выше) можно считать, что для полупроводника n -типа

$$n_n \approx N_d \quad \text{и} \quad p_n \approx n_i^2 / N_d.$$

Аналогично, для полупроводника p -типа

$$p_p \approx N_a \quad \text{и} \quad n_p \approx n_i^2 / N_a.$$

Однако при более высоких температурах генерация собственных носителей заряда становится настолько интенсивным, что определять тип проводимости по типу примесей становится невозможным – примесный полупроводник теряет свои индивидуальные свойства.

Поскольку основными носителями заряда в полупроводниках являются свободные электроны и дырки, то их электропроводность (σ) определяется электропроводностью электронов и дырок

$$\sigma = \sigma_n + \sigma_p = q\mu_n n + q\mu_p p = q(\mu_n n + \mu_p p). \quad (15)$$

Как видно из (15) электропроводность полупроводника зависит от концентрации носителей заряда и их подвижности, значения которых зависят как от технологии так и температуры. Примерная концентрация собственных носителей заряда в германии при $T=300\text{K}$ равна $n_i=2,5 \cdot 10^{19} \text{ м}^{-3}$.

Для чистого бездефектного кристалла с проводимостью близкой к собственной справедливо равенство $n_i = p_i$. Поэтому электропроводность беспримесного (собственного) полупроводника определяется равенством:

$$\sigma_i(T) = q[\mu_n(T) + \mu_p(T)] \sqrt{N_c(T)N_v(T)} e^{-\frac{E_g}{2kT}} = \sigma_0(T) e^{-\frac{E_g}{2kT}} \cong \sigma_0 e^{-\frac{E_g}{2kT}} \quad (16)$$

В этом равенстве величина

$$\sigma_0(T) = q[\mu_n(T) + \mu_p(T)] \sqrt{N_c(T)N_v(T)} \cong \sigma_0$$

слабо зависит от температуры и в приближенных расчетах ее принимают равным постоянному значению σ_0 , соответствующему величине электропроводности полупроводника при $T \rightarrow \infty$.

Формула (16) хорошо описывает экспериментальную кривую электропроводности для чистых кристаллов с совершенной структурой. С ее помощью по экспериментальной

зависимости $\sigma_i(T)$ можно определить такие характеристические параметры материала как E_g и σ_0 .

Для легированного (примесного) полупроводникового кристалла эффективная подвижность носителей заряда определяется рассеянием на колебаниях решетки и рассеянием на ионизованной примеси. Поэтому на экспериментальных графиках температурных зависимостей концентрации свободных носителей заряда и их подвижности можно выделить несколько областей. При этом в области, где доминирует примесная проводимость $n_i(T) \ll N_d$ или $n_i(T) \ll N_a$, помимо рассеяния на решетке на величину электропроводности может оказывать влияние и рассеяние на примесях. Особенно заметным влияние изменения подвижности становится в области истощения примеси, для которой концентрация основных носителей с хорошей точностью можно считать постоянной $n_n \approx N_d$ (или $p_p \approx N_a$), поскольку выполняется условие $n_i \ll N_d$, $n_i \ll N_a$. В этой области температурной зависимостью $n_i(T)$ можно пренебречь.

Как и в случае беспримесных полупроводниковых кристаллов, электропроводность легированных кристаллов складывается из электронной и дырочной проводимости:

$$\sigma(T) = \sigma_n(T) + \sigma_p(T)$$

Если $n \gg p$, то $\sigma_n \gg \sigma_p$, поэтому

$$\sigma \cong \sigma_n(T) = q\mu_n(T)n(T) = q\mu_n(T)N_d e^{-\frac{E_c - E_F(T)}{kT}}. \quad (17)$$

Если $p \gg n$, то $\sigma_p \gg \sigma_n$, поэтому

$$\sigma \cong \sigma_p(T) = q\mu_p(T)p(T) = q\mu_p(T)N_a e^{-\frac{E_F(T) - E_v}{kT}}. \quad (18)$$

Анализ соотношений (18) показывает, что изменение концентрации от температуры зависит экспоненциально от изменения положения уровня Ферми.

Вообще уровень Ферми следует рассматривать как хороший индикатор процессов, происходящих с носителями заряда.

Если уровень Ферми приближается к зоне проводимости, то это значит, что возрастает концентрация свободных электронов n и электронная проводимость σ_n .

В этом случае концентрация дырок p уменьшается и соответственно падает дырочная проводимость σ_p .

Если уровень Ферми приближается к валентной зоне, то возрастает концентрация дырок p и увеличивается дырочная проводимость σ_p . В последнем случае концентрация свободных электронов n уменьшается и существенно падает электронная проводимость σ_n .

В области высоких температур, где доминируют межзонные переходы и собственная концентрация носителей больше примесной $n_i \gg n_{np}$, полупроводник ведет себя как собственный (область I). В области низких температур (область III, где примесь не ионизована) уровень Ферми должен находиться выше донорного уровня (вероятность заполнения электронами больше 1/2). По мере того, как температура повышается, доноры отдают электроны в зону проводимости и постепенно полностью ионизируются (область II). Область II принято называть областью истощения примеси, поскольку все атомы доноров отдали свои электроны, а концентрация собственных электронов все еще очень мала. Общая концентрация электронов в этой области остается постоянной и примерно равной концентрации примесных атомов. Именно эта температурная область и является основной областью работы значительной части полупроводниковых приборов с *p-n*-переходами. Поскольку в области II концентрация носителей изменяется незначительно, то величина электропроводности начинает зависеть от подвижности свободных носителей заряда. В результате с повышением температуры в пределах области II электропроводность будет падать в некотором интервале температур за счет доминирования процессов рассеяния свободных носителей на колебаниях решетки. Но при дальнейшем повышении температуры начнется переход к собственной проводимости - концентрация собственных свободных носителей заряда и электропроводность начинают возрастать экспоненциально с температурой.

Таким образом, **электрическая проводимость полупроводников определяется концентрациями свободных носителей заряда в нем и их подвижностью**. Причем факторами, влияющими на электропроводность легированных полупроводников, являются ширина запрещенной зоны E_g , концентрация и тип примесей, глубина залегания примесных уровней.

Во внешнем электрическом поле эти свободные носители заряда (электроны и дырки) начинают дрейфовать, вызывая появление тока. Кроме того, направленный перенос заряда возникает в форме диффузионного движения при неравновесных процессах, когда в объеме полупроводника появляются градиенты концентраций свободных носителей заряда.

Плотность дрейфового тока свободных электронов

$$J_n = qn v_n, \quad (19)$$

где q – заряд свободного носителя (электрона, $q = 1,602 \cdot 10^{-19}$ Кл), n – концентрация свободных электронов, v_n – их средняя дрейфовая скорость.

Плотность дрейфового тока свободных дырок

$$J_p = qp v_p, \quad (20)$$

где n – концентрация свободных дырок, v_p – их дрейфовая скорость.

Дрейфовые скорости электронов и дырок зависят от их подвижностей (μ_n и μ_p) и напряженности внешнего электрического поля (E):

$$\begin{aligned}\bar{v}_n &= \mu_n \bar{E}, \\ \bar{v}_p &= \mu_p \bar{E}.\end{aligned}\quad (21)$$

В относительно слабом электрическом поле подвижности свободных носителей не зависят от напряженности этого поля. В таком случае появляется возможность характеристики проводящих свойств полупроводника с помощью параметра σ , называемого удельной электропроводностью:

$$\begin{aligned}\sigma_n &= qn\mu_n, \\ \sigma_p &= qp\mu_p.\end{aligned}\quad (22)$$

Иногда используют параметр, называемый удельным сопротивлением ρ , причем $\rho_n = 1/\sigma_n$ и $\sigma_n = qn\mu_n$. Таким образом, для дрейфовых плотностей тока можно записать равенства:

$$\begin{aligned}\bar{J}_n &= \sigma_n \bar{E} = \frac{\bar{E}}{\rho_n}, \\ \bar{J}_p &= \sigma_p \bar{E} = \frac{\bar{E}}{\rho_p}.\end{aligned}\quad (23)$$

Однако, **когда напряженность достигнет некоторого критического значения, подвижности носителей заряда начинают резко уменьшаться** так, что дрейфовая скорость оказывается независимой от E . Достигнутое при этом значение называют дрейфовой скоростью насыщения и обозначают v_s . В кремнии и германии это значение примерно одинаково для электронов и дырок, $v_{ns} \approx v_{ps} \approx 10^7$ см/с.

Диффузионные токи вызываются внутренними электрическими полями, возникающими в тех местах полупроводника, где под влиянием какого то внешнего воздействия появляется градиент концентрации свободных носителей (электронов или дырок). Направление поля оказывается таким, что свободные носители будут перемещаться из области с более высокой концентрацией в область с меньшей концентрацией. При этом плотности диффузионных токов свободных электронов и дырок определяются следующими векторными равенствами:

$$\begin{aligned}\bar{J}_{n, \text{диф.}} &= qD_n \overline{\text{grad}(n)}, \\ \bar{J}_{p, \text{диф.}} &= qD_p \overline{\text{grad}(p)},\end{aligned}\quad (24)$$

где коэффициенты диффузии свободных носителей заряда (D_n и D_p) связаны с их подвижностями,

$$\begin{aligned} D_n &= \mu_n \frac{k_B T}{e} = \mu_n \varphi_T, \\ D_p &= \mu_p \frac{k_B T}{e} = \mu_p \varphi_T, \end{aligned} \quad (25)$$

φ_T – тепловой потенциал.

Отметим, что градиент любой скалярной величины S определяется равенством

$$\overline{\text{grad}(s)} = \bar{i} \frac{\partial s}{\partial x} + \bar{j} \frac{\partial s}{\partial y} + \bar{k} \frac{\partial s}{\partial z},$$

где \bar{i} , \bar{j} и \bar{k} - единичные орты, соответственно направленные вдоль осей x , y и z .

Подвижности свободных носителей (μ_n и μ_p) зависят от температуры T и от суммарной концентрации донорных и акцепторных атомов $N=N_d+N_a$:

$$\mu(T, N) = \left[\mu_1 + \frac{\mu_2}{(N/N_{\mu 0})^a} \right] \left(\frac{T}{T_0} \right). \quad (26)$$

Таким образом, проводимость полупроводника зависит от концентрации свободных носителей заряда, которая, в свою очередь, зависит от типа и концентрации введенной в полупроводник примеси. Следует обратить внимание на тот факт, что при увеличении концентрации примеси на 9 порядков, проводимость образца возрастает на 8 порядков, т.е. существует почти линейная зависимость между проводимостью и концентрацией примеси, N .

Исследования показывают, что в области высоких температур одинаково высока электропроводность как легированного кремния так и нелегированного.

Но у сильно легированного полупроводника почти во всем диапазоне температур (меньших температуры плавления) проводимость меняется слабо.

В области низких температур проводимость легированных полупроводников имеет слабо выраженный максимум, что напоминает температурную зависимость проводимости металлов.

Проводимость кристалла, содержащего несколько типов (k) подвижных носителей заряда

$$\sigma = \sum_{i=1}^k n_i \mu_i q_i, \quad (27)$$

где n_i - концентрация носителей заряда i -го вида, μ_i - подвижность носителей заряда i -го вида, q_i - величина заряда свободного носителя i -го вида.

Величина, обратная к проводимости, называется удельным сопротивлением. Для полупроводника с p -типом проводимости удельное сопротивление равно:

$$\rho_p = \frac{1}{\sigma_p} \approx \frac{1}{N_a e \mu_p}, \quad (28)$$

где N_a - концентрация акцепторных атомов, e - заряд электрона, μ_p - подвижность дырок.

Удельное сопротивление полупроводника с n -типом проводимости равно:

$$\rho_n = \frac{1}{\sigma_n} \approx \frac{1}{N_d e \mu_n}, \quad (29)$$

где N_d - концентрация донорных атомов, e - заряд электрона, μ_n - подвижность электронов.

Интегральные сопротивления полупроводниковых образцов с p - и n -типами проводимости можно найти по формулам

$$R_p = \frac{\rho_p l_p}{S} \quad \text{и} \quad R_n = \frac{\rho_n l_n}{S}, \quad (30)$$

где l_p и l_n - длины образцов, S - площади поперечного сечения, а ρ_p и ρ_n - их удельные сопротивления.

В отсутствие сильных магнитных полей физические свойства полупроводника, связанные с его электрической проводимостью, описываются системой из пяти основных уравнений, называемой *фундаментальной системой уравнений* полупроводника:

$$\bar{J}_n = qn\mu_n \bar{E} + qD_n \overline{\text{grad}(n)}, \quad (31)$$

$$\bar{J}_p = qp\mu_p \bar{E} - qD_p \overline{\text{grad}(p)}, \quad (32)$$

$$\frac{1}{q} \text{div}(\bar{J}_n) - R_n + G_n = \frac{\partial n}{\partial t}, \quad (33)$$

$$-\frac{1}{q} \text{div}(\bar{J}_p) - R_p + G_p = \frac{\partial p}{\partial t}, \quad (34)$$

$$\varepsilon \varepsilon_0 \text{div}(\bar{E}) = q(p - n + N_D - N_A), \quad (35)$$

где уравнения (31) и (32) являются уравнениями для плотностей электронного и дырочного токов, (33) и (34) - уравнения непрерывности, (35) - уравнение Пуассона. В этих уравнениях использованы следующие дополнительные обозначения: R_p и R_n - число рекомбинировавших носителей заряда (дырок и электронов, соответственно) в единицу времени, G_p и G_n - число появившихся носителей заряда (дырок и электронов, соответственно) в результате их тепловой генерации в единицу времени. Эти величины связаны с временами жизни свободных носителей:

$$\tau_p = 1/(G_p - R_p), \quad \tau_n = 1/(G_n - R_n). \quad (36)$$

2. Зондовые методы контроля электротранспортных свойств полупроводников

При исследовании электрических свойств полупроводников и производстве полупроводниковых материалов, структур и приборов возникает необходимость измерения удельного электрического сопротивления или удельной электрической проводимости полупроводниковых материалов в виде монокристаллических слитков, образцов различной геометрической формы, пластин, диффузионных, эпитаксиальных и ионно-легированных слоев, составляющих часть полупроводниковых структур. Измерение удельного сопротивления осуществляется не только для установления его значения, но также для определения других важных параметров полупроводникового материала на основе теоретических расчетов или дополнительных экспериментальных данных.

Выбор метода измерения осуществляют с учетом получения требуемой информации, особенностей исследуемого материала, возможности изготовления электрических контактов, геометрической формы образца, метрологических характеристик метода измерения. В идеальном случае измерение характеристик материалов не должно приводить к разрушению образца и не должно требовать его специальной обработки.

Многие методы измерения удельного электрического сопротивления полупроводниковых материалов основаны на измерении разности электрических потенциалов на некотором участке образца, через который пропускается электрический ток. Исторически одним из первых методов измерения удельного сопротивления был *двухзондовый метод*, применявшийся для измерения удельного сопротивления металлов. Измерения с помощью методов, для которых необходима строго определенная геометрия образца, сопряжены со значительными затратами времени, главным образом на изготовление образцов и контактов к ним. Для быстрого измерения удельного сопротивления используют четырехзондовый метод, метод сопротивления растекания точечного контакта, а также метод Вандер-Пау. Указанные методы удобны, позволяют выполнить измерения не только на однородных образцах, но и на диффузионных, эпитаксиальных и ионно-легированных слоях, а также исследовать пространственное изменение удельного сопротивления. Для зондовых методов силовые линии напряженности электрического поля, непараллельны и распределены неоднородно по сечению образца, ввиду чего сначала необходимо теоретически рассчитывать распределение электрического потенциала в образце, а затем находить взаимосвязь между удельным сопротивлением и измеряемым величинами – током и напряжением.

При использовании зондовых методов нужен непосредственный контакт с полупроводниковым образцом. Поэтому эти методы приводят к разрушению образцов. Например, при измерениях четырехзондовым методом или методом сопротивления растекания металлические зонды разрушают поверхность образца; для применения же метода Ван-дер-Пау необходимо создание четырех контактов. Поэтому существует потребность в методах измерения, не требующих непосредственного контакта с образцом и получивших название *бесконтактных*. Имеется несколько подходов к осуществлению бесконтактных измерений. Они основаны на использовании отражения или поглощения электромагнитной волны, индуктивной или емкостной связи образца с измерительной схемой. В силу этого бесконтактные методы являются оптическими или высокочастотными.

Двухзондовый метод применяют для измерения удельного сопротивления образцов, имеющих правильную геометрическую форму и постоянное поперечное сечение. При этом на торцевых гранях образца, например в виде прямоугольной пластины, изготавливают омические контакты. Через эти контакты вдоль образца пропускают электрический ток. На одной из поверхностей образца вдоль линий тока устанавливают два контакта в виде металлической игловок – зондов, имеющих малую площадь соприкосновения с поверхностью и позволяющих измерить разность потенциалов. Если образец однороден, то его удельное сопротивление ($\text{Ом} \cdot \text{см}$)

$$\rho = \frac{U_{12} \cdot S}{I \cdot s}.$$

где I – сила тока, протекающего через образец, А; U_{12} – разность потенциалов между измерительными или потенциальными зондами, В; s – расстояние между зонами, см; S – площадь поперечного сечения, см^2 .

Ток через образец подается от регулируемого источника постоянного тока, гарантирующего достаточную его стабильность во времени сила тока измеряется миллиамперметром, разность потенциалов (см. рис. 1) – полуавтоматическим компенсирующим потенциометром или электронным цифровым вольтметром с высоким выходным сопротивлением.

Погрешность измерений напряжения и тока при использовании приборов с цифровой индикацией не превышает 0,1%. Однако систематическая погрешность измерения напряжения между потенциальными зондами зависит от сопротивления контакта зонда с образцом, которое может в $10^2 - 10^4$ раз превышать сопротивление образца.

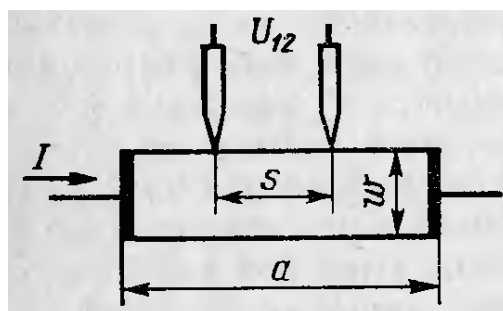


Рис. 1. Схема измерения удельного сопротивления двухзондовым методом

Чтобы устранить влияние сопротивлений контактов на результаты измерений, необходимо предельно уменьшать протекающий через них ток. Для этого используют вольтметры с высоким выходным сопротивлением (10^8 Ом и больше), причем сопротивление изоляции каждого из зондов относительно любого элемента измерительной установки должно быть много больше этого значения.

Неточное наблюдение геометрических размеров образца ведет к отклонению формы эквипотенциальных поверхностей от плоских поверхностей, параллельных торцевым граням образца, и возникновению систематической погрешности. Искажение формы эквипотенциальных поверхностей и одномерного пространственного распределения линий тока имеет место в образце правильной геометрической формы вблизи омических контактов, если они неоднородны по площади. В предельном случае использования точечных токовых контактов эту погрешность можно свести к значению, не превышающему 0,5%, при следующих соотношениях геометрических размеров образца:

$$a \gg 3b, \quad s \leq a/2, \quad b/2 \leq w \leq b,$$

где a , b , w – длина, ширина и толщина образца. При этом потенциальные зонды следует располагать на расстоянии от торцевых граней образца, большем $3d$.

Отклонение реального контакта зонда от теоретической модели точечного потенциального контакта также вносит систематическую погрешность в результат измерения.

Случайная составляющая относительной погрешности измерений, обусловленная невоспроизводимостью расстояния между зондами при независимой фиксации каждого из зондов со среднеквадратическим отклонением ΔS , определяется соотношением

$$\frac{\delta\rho}{\rho} = 1,41 \cdot \left(\frac{2\Delta S}{s} \right)$$

при доверительной вероятности 0,95.

На контакте металл – полупроводник при протекании электрического тока может возникать ряд физических эффектов и явлений, которые вносят существенную погрешность

в результате измерений. Основными из них являются: инжекция носителей заряда контактом, влияющая на проводимость образца; эффект Пельтье, приводящий к возникновению градиента температуры на образце и соответствующей этому градиенту термо-ЭДС; нагрев образца электрическим током, протекающим через образец. Указанные явления необходимо учитывать не только при измерении удельной проводимости, но и во всех случаях, когда через измеряемый образец с металлическими контактами протекает электрический ток. Чтобы уменьшить погрешности, вызванные этими явлениями, ток через образец выбирается минимальным, но обеспечивающим необходимую точность измерения тока и напряжения. Торцевые грани образца шлифуются абразивным порошком, после чего электрически металлизируются. Абразивная обработка обеспечивает подавление инжекции носителей заряда.

Влияние неоднородности удельного сопротивления образца.

Практически любой полупроводниковый образец обладает некоторой неоднородностью в распределении удельного сопротивления. Измеренное на неоднородном образце значение удельного сопротивления характеризуется *эффективным удельным сопротивлением* и представляет собой значение, усредненное по некоторой области образца. Интерпретация результатов измерений эффективного удельного сопротивления на неоднородном образце, т.е. нахождения соотношения между эффективным и действительным или средним значением удельного сопротивления, предполагает знание конкретной функции $\rho(x, y, z)$ и требует выполнения соответствующих теоретических расчетов. Решение этой задачи в аналитической форме возможно для простых одномерных случаев: линейного, экспоненциального и периодического распределения удельного сопротивления. В ряде практически важных случаев для образцов с одномерной неоднородностью, а именно: для диффузионных, эпитаксиальных и ионно-легированных слоев, распределение удельного сопротивления по толщине слоя измеряют с помощью последовательного удаления слоев.

В объемных образцах наиболее часто встречаются локальные флуктуации удельного сопротивления, распределенные по объему образца и обусловленные флуктуациями концентрации и подвижности носителей заряда. Если линейный размер локальных неоднородностей превышает длину свободного пробега носителей заряда и дебаевскую длину экранирования, но мал по сравнению с геометрическими размерами образца, то эффективная удельная проводимость связана с ее средним значением σ соотношением

Второе слагаемое в квадратичной скобке представляет собой локальное среднеквадратическое отклонение удельной проводимости от ее среднего значения $\bar{\sigma}$. Из

сказанного следует, что измеряемые значения удельной проводимости отличается от ее среднего значения.

Четырехзондовый метод измерения.

Четырехзондовый метод измерения удельного сопротивления полупроводников является самым распространенным. Кроме высоких метрологических показателей преимущество четырехзондового метода состоит в том, что для его применения не требует создания омических контактов к образцу, возможно измерение удельного сопротивления объемных образцов самой разнообразной формы и размеров, а также удельного сопротивления слоев полупроводниковых сттруктур. Условием для его применения с точки зрения формы образца является наличие плоской поверхности, линейные размеры которой превосходит линейные размеры системы зондов.

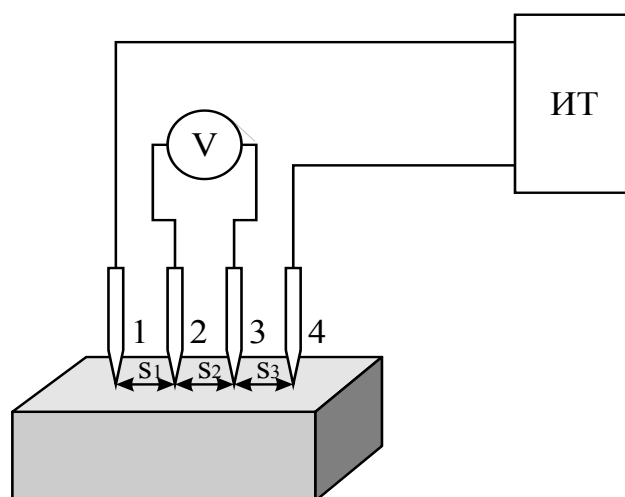


Рис.2. Схема измерения удельного сопротивления четырехзондовым методом

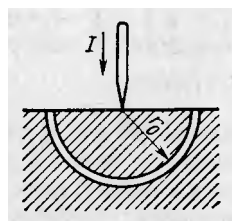


Рис.3. Модель зонда

Теория метода. Рассмотрим теоретические основы четырехзондового метода измерения удельного сопротивления применительно к образцу, представляющему собой полубесконечный объем, ограниченный плоской поверхностью.

На плоской поверхности образца вдоль площадью соприкосновения, расстояния между которыми S_1, S_2, S_3 . Через два внешних зондах 2 и 3 пропускают электрический ток I_{14} , на двух внутренних зондах 2 и 3 измеряют разность потенциалов U_{23} . По измеренным

значениями разности потенциалов между зондами 2 и 3 и тока, протекающего через зонды 1 и 4, можно определить удельное сопротивление образца.

Чтобы найти аналитическую связь между удельным сопротивлением ρ , током I_{14} и напряжением U_{23} , необходимо сначала решить более простую задачу, связанную с протеканием тока через отдельный точечный зонд, находящийся в контакте с плоской поверхностью полупроводникового образца полубесконечного объема.

Так как пространственное распределение электрического потенциала $U(r)$ в образце имеет сферическую симметрию, то для его определения достаточно решить уравнение Лапласа в сферической системе координат, в котором оставлен лишь член, зависящий от r ,

$$\Delta U(r) = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dU}{dr} \right) = 0 \quad (1)$$

при условии, что потенциал в точке $r=0$ положителен и стремится к нулю при очень больших r . Интегрирование этого уравнения с учетом указанных граничных условий позволяет получить следующее решение:

$$U(r) = -\frac{C}{r}$$

Константу интегрирования можно вычислить из условия для напряженности электрического поля $E(r)$ при некотором значении $r = r_0$:

$$E(r_0) = -\left. \frac{dU(r)}{dr} \right|_{r=r_0}.$$

Так как плотность тока, протекающего через полусферу радиусом r_0 ,

$$j = \frac{I}{2\pi r_0^2},$$

Учитывая закон Ома получим

$$U(r_0) = \frac{I \cdot \rho}{2\pi r_0}.$$

Окончательно имеем

$$U(r) = \frac{I \cdot \rho}{2\pi r}. \quad (2)$$

Очевидно, что распределение потенциала будет таким же, когда форма контакта зонда с поверхностью образца имеет вид полусферы конечного диаметра.

Пусть радиус контакта равен r_1 . Тогда электрическое напряжение на образце равно электрическому потенциалу зонда:

$$U(r_1) = \frac{I \cdot \rho}{2\pi r_1}. \quad (3)$$

Из уравнения напряжения на приконтактном слое толщиной $(r_2 - r_1)$ получим равенство

$$U(r_1) - U(r_2) = \frac{I\rho}{2\pi} \cdot \frac{r_2 - r_1}{r_2 r_1}$$

откуда следует, что основное изменение потенциала происходит вблизи зонда. Например, при $r_2 = 10r_1$ напряжение на образце превосходит напряжение на слое толщиной $(r_2 - r_1)$ всего лишь на 10%. Это означает, что значение протекающего через зонд тока определяется главным образом сопротивлением приконтактной области, протяженность которой тем меньше, чем меньше радиус контакта.

Рассмотрим линейное расположение зондов.

Сформулируем предположения, на которых основан четырехзондовый метод измерения удельного сопротивления: 1) зонды расположены на плоской поверхности однородного изотропного образца полубесконечного объема; 2) зонды имеют контакты с поверхностью образца в точках, которые расположены вдоль прямой линии; 3) инжекция носителей заряда в объем образца отсутствует.

По принципу суперпозиции электрический потенциал в любой точке образца равен сумме потенциалов, создаваемых в этой точке током каждого зонда. При этом потенциал имеет положительный знак для тока, вытекающего из образца (зонд 1), и отрицательный знак для тока, вытекающего из образца (зонд 4). Для системы зондов, расстояния между которыми s_1, s_2, s_3 , потенциалы измерительных зондов 2 и 3 будут:

$$U_2 = \frac{I_{14}\rho}{2\pi} \left(\frac{1}{s_1} - \frac{1}{s_2 + s_3} \right), \quad U_3 = \frac{I_{14}\rho}{2\pi} \left(\frac{1}{s_1 + s_2} - \frac{1}{s_3} \right).$$

Разность потенциалов

$$U_{23} = U_2 - U_3 = \frac{I_{14}\rho}{2\pi} \left(\frac{1}{s_1} - \frac{1}{s_2 + s_3} - \frac{1}{s_1 + s_2} + \frac{1}{s_3} \right). \quad (4)$$

Из последнего получаем, что удельное сопротивление образца равно,

$$\rho = 2\pi \left(\frac{U_{23}}{I_{14}} \right) / \left(\frac{1}{s_1} - \frac{1}{s_2 + s_3} - \frac{1}{s_1 + s_2} + \frac{1}{s_3} \right).$$

Если расстояние между зондами одинаковы, т.е. $s_1 = s_2 = s_3 = s$, то

$$\rho = 2\pi s \frac{U_{23}}{I_{14}}. \quad (5)$$

Используя другие комбинации включения токовых и потенциальных зондов, можно получить аналогичные выражения для удельного сопротивления, которые отличаются от (1.5) значениями числовых коэффициентов, приведенными в табл. 1.

Таблица 1.

№ п/п	Зонды	Ток	Зонды	Напряжение	Числовой коэффициент
1	1-4	I_{14}	2-3	U_{23}	
2	1-2	I_{12}	3-4	U_{34}	
3	1-3	I_{13}	2-4	U_{24}	
4	2-3	I_{23}	1-4	U_{14}	
5	2-4	I_{24}	1-3	U_{13}	
6	3-4	I_{34}	1-2	U_{12}	

Как следует из табл. 1, предпочтительны комбинации включения зондов 1 и 4, так как они обеспечивают максимальное регистрируемое напряжение.

Расположение зондов по вершинам квадрата. Линейное расположение зондов на поверхности полупроводникового образца не является единственно возможным. Можно, например, использовать систему четырех зондов, расположенных по вершинам квадрата. В этом случае ток пропускают через зонды, образующие одну из сторон квадрата, например через зонд 1 и 2, а напряжение измеряют на другой паре зондов 3 и 4. Используя соотношение (2), легко рассчитать, что при таком расположении зондов удельное сопротивление

$$\rho = \frac{2\pi s}{(2 - \sqrt{2})} \cdot \frac{U_{34}}{I_{12}}.$$

Расположение зондов по вершинам квадрата обеспечивает снижение случайных ошибок в два раза. Это достигается за счет выполнения измерений при пропускании тока последовательно через каждую пару соседних зондов, изменения полярности приложенного напряжения и следующего вычисления среднего значения удельного сопротивления по результатам восьми измерений. С помощью современной электронной измерительной аппаратуры такие измерения легко могут быть автоматизированы.

Электрическая схема и методика измерения.

Электрическая схема измерения удельного сопротивления четырехзондовым методом проста. Ток I от регулируемого источника постоянного напряжения U_0 пропускается через

зонды 1 и 4. Желательно, чтобы источник напряжения имел высокое выходное сопротивление, т.е. являлся генератором тока. Напряжение, возникающее при этом между зондами 2 и 3, регистрируется вольтметром V . Сила тока фиксируется миллиамперметром или находится путем измерения напряжения на эталонном резисторе, включенном последовательно в цепь зондов 1 и 4. Наименьший рабочий ток определяется возможностью измерения малых напряжений; наибольший рабочий ток ограничивается нагревом образца.

Система из четырех зондов конструктивно оформляется в виде *четырёхзондовой головки*. Расстояния между зондами строго фиксированы, угол заточки острия зонда составляет $45-150^\circ$. Четырёхзондовую головку крепят к манипулятору, с помощью которого зонды устанавливаются на поверхности образца. Зонды индивидуально прижимаются к поверхности с силой до 2 Н. в качестве материала зондов используют твердые металлы и сплавы.

При проведении измерений в интервале высоких температур вплоть до 950°C для ряда полупроводниковых материалов для изготовления зондов используют карбид вольфрама. Чтобы уменьшить разрушение поверхности, применяют зонды из жидких металлов – ртути и галлия (при температурах выше температуры плавления галлия $29,8^\circ\text{C}$). Материал зонда не должен химически реагировать с полупроводниковым материалом.

Чтобы контактные сопротивления потенциальных зондов не влияли на результаты измерений, разность потенциалов необходимо фиксировать в отсутствие тока через них. Поэтому измерения проводят компенсационным методом с помощью полуавтоматических потенциалов. Целесообразно также применение электронных цифровых вольтметров с высоким входным сопротивлением. В таком случае ток через измерительные зонды пренебрежимо мал, что позволяет отказываться от использования компенсационных методов измерений. Применение милливольтметра с входным сопротивлением порядка 10^8 Ом дает возможность измерять удельное сопротивление на слитках и пластинах кремния до 3000 Ом·см.

Погрешность измерения удельного сопротивления четырехзондовым методом определяется как составляющими погрешности входящих в формулу (5) величин, так и размером контактной площадки зонда, сопротивлением контактов, нестабильностью температуры образца, термо-ЭДС, освещенностью образца, инжекцией носителей заряда и др.

Различие в расстояниях между зондами ведет к погрешности измерения ρ . Если, например, каждый из зондов смещен относительно своего номинального положения на Δx_i , то относительная погрешность

$$\frac{\delta \rho}{\rho} = \frac{1}{4s} (3\Delta x_1 - 5\Delta x_2 + 5\Delta x_3 - 5\Delta x_4).$$

Это соотношение можно использовать для коррекции значения удельного сопротивления, если Δx_i известны.

Когда конструкция зондовой головки допускает независимое смещение каждого зонда относительно своего номинального положения, которое характеризуется среднеквадратическим отклонением Δs , то случайная погрешность измерения

$$\frac{\delta \rho}{\rho} = 2,06 \cdot \left(\frac{2\Delta s}{s} \right)$$

при доверительной вероятности 0,95.

Чтобы избежать погрешностей при измерениях тока и напряжения, которые могут возникнуть вследствие утечек тока и возникновения напряжения на контактных сопротивлениях, необходимо обеспечивать высокое сопротивление изоляции и использовать приборы для измерения напряжения с входным сопротивлением, превышающим сопротивление образца и контактов в 10^2 раз.

Источником погрешности могут служить фотопроводимость и фото-ЭДС, возникающие под действием освещения и особенно сильно проявляющиеся в образцах с высоким удельным сопротивлением.

Так как полупроводники имеют относительно высокий температурный коэффициент сопротивления, то при измерениях за счет протекания через образец тока может произойти не только локальный нагрев, но и повышение температуры всего образца. Например, повышение температуры кремния с удельным сопротивлением $10 \text{ Ом} \cdot \text{см}$ и 5°C приводит к изменению удельного сопротивления на 4,0%. Поэтому для уменьшения нагрева образца необходимо выбирать рабочий ток минимально возможным, а температуру образца поддерживать постоянной. Рабочий ток, однако, должен обеспечивать необходимую точность измерений равности потенциалов. Измерение разности потенциалов производят при двух направлениях тока и полученные значения усредняют, исключая таким способом продольную термо-ЭДС, возникающую на образце вследствие градиента температуры. Уменьшение рабочего тока одновременно снижает модуляцию проводимости образца, вызванную инжекцией носителей заряда при протекании тока.

Для уменьшения влияния инжекции и получения малых контактных сопротивлений металлических зондов поверхность образца, на которой производят измерения, механически обрабатывают (например, шлифуют). Однако подобная обработка, особенно для высокоомных образцов, иногда недостаточна. Например, механически обработанная поверхность германия позволяет получить малое сопротивление контакта, а поверхность

кремния с металлическим зондом, наоборот, - очень высокое сопротивление. Высокое сопротивление контакта не только ограничивает протекающий ток, но как правило, нестабильно во времени и в значительной степени затрудняет проведение измерений. Поэтому нередко контакты подвергают электрической формовке.

Следует отметить, что высокое контактное сопротивление между зондом и образцом является одной из основных причин, ограничивающих применение четырехзондового метода для измерения удельного сопротивления широкозонных полупроводников типа A^3B^5 и A^2B^6 . В технических условиях на монокристаллический кремний в слитках в соответствии с ГОСТ 19658–81 предусмотрена следующая методика измерения удельного сопротивления. Она распространяется на слитки монокристаллического кремния, получаемые по методу Чохральского и предназначенные для изготовления пластин-подложек, используемых в производстве эпитаксиальных структур и структур металл – диэлектрик - полупроводник. Методика предназначена для измерения удельного сопротивления на торцевой поверхности слитков кремния от 10^{-4} до 10^2 Ом·см. Измерения проводят на плоских поверхностях, имеющих шероховатость не более 2,5 мкм при фиксированной температуре ($23 \pm 2^\circ\text{C}$). Используют четырехзондовую измерительную головку типа С2080 с четырьмя линейно расположенными зондами из карбида вольфрама с межзондовым расстоянием ($1,3 \pm 0,01$) мм и максимальным линейным размером рабочей площадки зонда не более 60 мкм. Усилие прижима зонда к поверхности слитка составляет 0,5-2,0 Н. Измерительные приборы обеспечивают измерение силы электрического напряжения – с погрешностью не более 0,5%, а электрического напряжения – с погрешностью не более 1% при необходимом для правильного измерения входном сопротивлении. Предельные значения рабочих токов и измеряемых напряжений, а также входных сопротивлений в зависимости от удельного сопротивления кремния приведены в табл. 2.

Удельное сопротивление вычисляют как среднеарифметическое значений, полученных при двух измерениях, различающихся направлением тока. Измерение вычисляют с удельным сопротивлением более 200 Ом·см проводят при их затмении.

При выполнении всех требований к применяемым средствам измерения и соблюдении необходимых условий интервал, в котором находится случайная погрешность измерения удельного сопротивления, характеризующая сходимость результатов, равен $\pm 2\%$ при доверительной вероятности 0,95. Интервал, в котором находится погрешность измерения, определяющая воспроизводимость измерений при соблюдении требований стандарта, равен $\pm 5\%$ при доверительной вероятности 0,95.

Таблица 2.

Удельное сопротивление ρ , Ом·см	Рабочий ток I , А	Измеряемое напряжение U , В	Входное сопротивление R , Ом, не менее
10^{-5}	$1,0 \cdot 10^{-1}$	$1,2 \cdot 10^{-4}$	$1 \cdot 10^3$
10^{-2}	$1,0 \cdot 10^{-3}$	$1,2 \cdot 10^{-3}$	$1 \cdot 10^4$
10^{-1}	$1,0 \cdot 10^{-1}$	$1,2 \cdot 10^{-2}$	$1 \cdot 10^5$
1,0	$8,2 \cdot 10^{-2}$	$1,0 \cdot 10^{-1}$	$1 \cdot 10^6$
10^1	$8,2 \cdot 10^{-3}$	$1,0 \cdot 10^{-1}$	$1 \cdot 10^7$
10^6	$8,2 \cdot 10^{-4}$	$1,0 \cdot 10^{-1}$	$1 \cdot 10^8$
10^3	$8,2 \cdot 10^{-5}$	$1,0 \cdot 10^{-1}$	$1 \cdot 10^9$

3. Применение четырехзондового метода к образцам простой геометрической формы

Рассмотрим образец полубесконечного объема с проводящей или изолирующей границей.

Соотношение (5) пригодно для вычисления удельного сопротивления образца полубесконечного объема, т.е. для образца, линейные размеры которого много больше расстояния между зондами s . Этот критерий применимости формулы (5), по существу, является полуколичественным, так как не указывают точного соотношения между размерами образца и расстоянием s . Для получения более строгих критериев применимости (5) рассмотрим частные случаи измерения удельной проводимости образцов ограниченных размеров, которые имеют и самостоятельное значение, так как часто встречаются на практике.

Проанализируем следующий случай. Образец полубесконечного объема имеет плоскую проводящую границу; зонды расположены на линии, перпендикулярной этой границе. Наличие проводящей границы на одной из граней образца обуславливает его шунтирование и, следовательно, увеличение тока I , что приводит к уменьшению измеренного в соответствии с (5) значения ρ по сравнению с истинным. Практическим примером такой модели может служить образец, на одной из плоских граней которого создан омический контакт. Ввиду того, что сопротивление омического контакта очень мало, можно считать потенциал контакта постоянным.

Используем метод зеркальных изображений, который широко применяется в электростатике. Для этого на продолжении линии зондов симметрично относительно

проводящей границы поместим два таких мнимых источника тока 5 и 6, чтобы удовлетворять условию на проводящей границе $U=0$. Условие на проводящей границе будет выполнено, если считая образец бесконечным, в точку 5 поместить положительный источник тока I , а в точке 6 – отрицательный $-I$. В силу единственности решения задачи при данном граничном условии решение для системы источников тока 1,4,5 и 6 будет искомым. Вычисление потенциалов в точках 2 и 3 с учетом четырех источников тока позволяет определить удельное сопротивление образца:

$$\rho = 2\pi s f_1 \left(\frac{l}{s} \cdot \frac{U}{I} \right).$$

где

$$f_1 \left(\frac{l}{s} \right) = \left[1 + \frac{1}{2 + (2l/s)} - \frac{1}{5 + (2l/s)} - \frac{1}{1 + (2l/s)} + \frac{1}{4 + (2l/s)} \right]^{-1} \quad (6)$$

- поправочная функция, зависящая от отношения l/s . При $l=0$, т.е. в случае, когда зонд 4 установлен на проводящей границе образца, $f_1(l/s) \approx 2$; при $l \geq 3s$ функция $f_1(l/s)$ практически не отличается от 1. Таким образом, рассмотрим случае выражения (1.5) можно использовать, если выполняется соотношение $l \geq 3s$.

Поправочную функцию, подобную (6), можно легко вычислить и для случая, когда граница является не проводящей, а изолирующей. При этом, используя метод зеркальных изображений, необходимо учесть, что на изолирующей границе должно выполняться иное граничное условие: нормальная составляющая тока, а следовательно, и нормальная составляющая электрического поля на границе равны нулю. Это граничное условие будет выполнено, если знаки зеркальных источников тока совпадают со знаками реальных токов, протекающих источников зонды 1 и 4. В результате вычислений получим

$$f_2 \left(\frac{l}{s} \right) = \left[1 + \frac{1}{1 + (2l/s)} - \frac{1}{2 + (2l/s)} - \frac{1}{4 + (2l/s)} + \frac{1}{5 + (2l/s)} \right]^{-1}.$$

Для образца полубесконечного объема при параллельном расположении зондов относительно изолирующей границы

$$f_2 \left(\frac{l}{s} \right) = \left[1 + \frac{1}{\{1 + (2l/s)^2\}^{1/2}} - \frac{1}{\{1 + (l/s)^2\}^{1/2}} \right]^{-1}.$$

Относительно проводящей границы

$$f_2 \left(\frac{l}{s} \right) = \left[1 + \frac{2}{\{1 + (2l/s)^2\}^{1/2}} - \frac{1}{\{1 + (l/s)^2\}^{1/2}} \right]^{-1}.$$

Числовые значения функций $f_1(l/s)$, $f_2(l/s)$, $f_3(l/s)$ и $f_4(l/s)$ приведены в табл. 3.

Таблица 3.

(l/s)	$f_1(l/s)$	$f_2(l/s)$	$f_3(l/s)$	$f_4(l/s)$
0	1,82	0,69	0,5	∞
0,2	1,365	0,79	0,533	8,07
0,5	1,182	0,882	0,658	2,08
1,0	1,06	0,947	0,842	1,232
2,0	1,01	0,992	0,965	1,038
5,0	1,004	0,996	0,9974	1,003
10,0	1,0005	0,9995	0,9996	1,004

Анализ поправочных функций, полученных для образца полубесконечного объема с изолирующей или проводящей границей при параллельном и перпендикулярном расположении линии зондов относительно границы, показывает, что во всех случаях поправка пренебрежимо мала, если $l \geq 5s$.

Тонкая пластина.

Определение удельного сопротивления тонкой пластины, как и образец полубесконечного объема с границей, сводится к вычислению поправочной функции. Однако ее расчет для тонкой пластины более сложен, так как тонкая пластина определенной геометрической формы имеет большое число поверхностей и для каждой из них должно выполняться соответствующее граничное условие.

Рассмотрим простой случай тонкой пластины бесконечных размеров, нижняя граница которой является проводящей. Используя метод зеркальных изображений, расположим на расстоянии w ниже проводящей границы мнимые источники тока I и $-I$, что обеспечивает выполнение из нижней проводящей границе граничного условия $U=0$. Однако при этом нарушается требование равенства нулю нормальной составляющей тока на верхней поверхности пластины, введем на расстоянии выше пластины два мнимых источника тока I и $-I$. При этом граничное условие на верхней поверхности будет выполнено, но нарушается граничное условие на нижней проводящей границе. Чтобы удовлетворить условию на нижней границе, введем два мнимых источника I и $-I$ на расстоянии от нижней поверхности. Очевидно, введение мнимых источников тока для выполнения граничных условий нужно продолжить до бесконечности.

Значение потенциалов на измерительных зондах 2 и 3 можно вычислить путем суммирования потенциалов, создаваемых в данной точке каждым источником тока:

$$U_2 = \frac{I\rho}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^n \left| [s^2 + (2wn)^2]^{(-1/2)} \{ (2s)^2 + [s^2 + (2wn)^2]^2 n^2 \}^{(-1/2)} \right|$$

$$U_3 = \frac{I\rho}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^n \left| [(2s)^2 + (2wn)^2]^{(-1/2)} \{ (2s)^2 - [s^2 + (2wn)^2]^2 n^2 \}^{(-1/2)} \right|.$$

В результате удельное сопротивление пластины

$$\rho = 2\pi s g_1 \left(\frac{w}{s} \right) \cdot \left(\frac{U}{I} \right).$$

Функция поправок $g_1(w/s)$ зависит только от отношения толщины пластины w к расстоянию между зондами s :

$$g_1(w/s) = \left\{ 1 + 4 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left[\left(1 + 4n^2 \frac{w^2}{s^2} \right)^{(-1/2)} - \left(4 + 4n^2 \frac{w^2}{s^2} \right)^{(-1/2)} \right] \right\}^{-1}.$$

Если $w \gg s$, то пластину можно считать образцом полубесконечного объема:

$$g_1(w/s) = 1.$$

Реальные пластины имеют боковые грани, которые влияют на распределение тока, и потому должны быть учтены соответствующими поправочными функциями. Поправочные функции в ряде случаев могут быть вычислены в результате решения уравнения Лапласа с соответствующими граничными условиями на боковых поверхностях пластин.