Предмет теории игр

Теория игр – это теория математических моделей принятия оптимальных решений в условиях конфликта или неопределённости. При этом конфликт не обязательно должен быть антагонистическим, в качестве конфликта можно рассматривать любое разногласие.

Рассмотрим следующий экономический пример. Пусть требуется принять решение о выпуске на рынок некоторого товара. Может случиться, что объём спроса на этот товар известен точно; может быть, что известно лишь статистическое распределение возможных значений спроса; наконец, может оказаться, что известны лишь границы, в которых заключен спрос, но ни каких даже вероятностных соображений о его предстоящих значениях нет. Последний случай квалифицируется как неопределённость. Такая неопределённость может возникнуть, когда спрос (например, на сезонные товары) зависит от метеорологических условий (конфликт с природой) или в условиях рынка от деятельности конкурента, уже удовлетворившего неизвестную часть спроса. Приведённые примеры при определённых условиях могут быть приведены к игре.

Всякая теоретико-игровая модель должна отражать, кто и как конфликтует, а также, кто и в какой форме заинтересован в том или ином исходе конфликта.

Действующие в конфликте стороны называются игроками, а решения, которые способны принимать игроки, стратегии.

Содержание математической теории игр состоит, во-первых, в установлении принципов оптимального поведения игроков в играх, во-вторых, в доказательстве существования ситуации, которые складываются в результате применения этих принципов, и, в-третьих, в разработке методов фактического нахождения таких ситуаций.

Для игр с одной коалицией действия множество всех ситуаций можно принять за множество стратегий этой единственной коалиции действия и далее о стратегиях не упоминать. Поэтому такие игры называются нестратегическими, важным классом которых являются игры с природой, применяемые для анализа экономических ситуаций, оценки эффективности принимаемых решений и выбора наиболее предпочтительных альтернатив, в которых риск связан с совокупностью неопределённых фактов окружающей среды, именуемых «природа». Поэтому термин «природа» характеризует некоторую объективную действительность, которую не следует понимать буквально, хотя вполне могут встретиться ситуации, в которых игроком действительно может выступить природа (например, обстоятельства, связанные с погодными условиями или с природными стихийными силами).

В отличие от нестратегических игр, все остальные игры с двумя или более коалициями действия называются стратегическими. В практических ситуациях часто появляется необходимость согласования действий компании, объединений, министерств и других участников проектов в случаях, когда их интересы не совпадают. В подобных ситуациях теория стратегических игр позволяет найти оптимальное решение для поведения всех участников проекта, обязанных согласовывать свои действия при столкновении интересов.

Далее будут рассмотрены матричные игры. Под матричной игрой $m \times n$ понимается такая игра двух игроков, при которой каждый игрок имеет конечное число возможных ходов – чистых стратегий. При этом выигрыш одного игрока и проигрыш другого при применении ими определённых чистых стратегий выражается числом. Перечисленные условия позволяют записать стратегии в матрицу

$$H = \left\| a_{ij} \right\|, i = \overline{1, m},\ j = \overline{1, n}, \tag{1}$$

где a_{ij} – равен выигрышу первого (будем обозначать его А) и проигрышу второго (игрока В) при применении ими i-й и j-й чистых стратегий соответственно.

Задачей теории игр является определение оптимальных стратегий игроков. В матричной игре оптимальной для игрока А называется стратегия, которая при многократном повторении игры обеспечивает максимально возможный средний выигрыш, а для игрока В под оптимальной понимается стратегия, обеспечивающая ему минимальный средний проигрыш. При этом предполагается, что противник является по меньшей мере таким же разумным и делает всё для того, чтобы помешать нам добиться своей цели.

Нижняя и верхняя цены игры. Принцип минимакса

Итак, рассмотрим матричную игру $m \times n$ с платежной матрицей

$$H = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \tag{2}$$

Где i-я строка соответствует A_i-й стратегии игрока А;

j-й столбец соответствует B_j-й стратегии игрока В.

Пусть игрок А выбирает некоторую стратегию A_i, тогда в наихудшем случае (например, если выбор станет известен игроку В) он получит выигрыш равный $\min_j a_{ij}$. Предвидя эту возможность, игрок А должен выбрать такую стратегию, чтобы максимизировать свой минимальный в каждой стратегии выигрыш α. Таким образом, $\alpha = \max_i \min_j a_{ij}$. Величина α называется нижней ценой игры (α – это гарантированный выигрыш игрока А).

Очевидно, α находится в одной из строк матрицы H, пусть в i_0, тогда стратегия A_{i_0} называется максиминной.

Итак, если игрок А будет придерживаться максиминной стратегии, то ему при любом поведении игрока В гарантируется выигрыш, во всяком случае не меньше α.

С другой стороны, противник – игрок В, заинтересован в том, чтобы обратить выигрыш игрока А в минимум, поэтому он должен пересмотреть каждую свою стратегию с точки зрения максимального выигрыша игроком А при этой стратегии. Другими словами, при выборе некоторой стратегии B_j он должен исходить из максимального проигрыша в этой стратегии, равного $\max_j a_{ij}$, и найти такую стратегию, при которой этот проигрыш будет наименьшим, то есть не более чем $\beta = \min_j \max_i a_{ij}$.

Величина β называется верхней ценой игры, а соответствующая ему стратегия B_{i_0} – минимаксной.

Принцип осторожности, диктующий игрокам выбор стратегий максиминной или минимаксной соответственно, в теории игр именуют принципом минимакса, а сами стратеги максиминные и минимаксные – общим термином минимаксные стратегии.

Рассмотрим пример нахождения α и β.

Пусть игра задана матрицей

$$H = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 4 \\ 10 & 4 & 3 & 10 \\ -2 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Определим нижнюю и верхнюю цены игры.

Выпишем для каждой строки справа от матрицы $\min_j a_{ij}$, а снизу $\max_i a_{ij}$ каждого столбца. Тогда получим:

$$\begin{array}{c|c} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 4 \\ 10 & 4 & 3 & 10 \\ -2 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} & \begin{matrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{matrix} \\ \hline \begin{matrix} 10 & 4 & 3 & 10 \end{matrix} & \end{array}$$

$$\alpha = \max_i \min_j a_{ij} = \max\{1,3,-2\} = 3$$

$$\beta = \min_j \max_i a_{ij} = \min\{10,4,3,10\} = 3$$

В этом примере нижняя и верхняя цены игры совпадают: $\alpha = \beta = V = 3$