Вполне определённые игры

Вполне определённая игра является наиболее простым случаем матричной игры. Вполне определённой игрой или игрой с седловой точкой называется игра, у которой совпадают нижняя и верхняя цены игры, то есть выполняется равенство:

$$\alpha = \max_i \min_j a_{ij} = \min_j \max_i a_{ij} = \beta \qquad (3)$$

При этом $V = \alpha = \beta$ называется ценой игры, элемента $a_{i_0 j_0}$ соответствующий равенству, называют седловой точкой.

Простота решения игры с седловой точкой заключается в том, что оптимальные стратегии обоих игроков находятся сразу. Для игрока А это стратегия A_{i_0} для игрока В – B_{i_0}. Причём, такое решение обладает свойством устойчивости в том смысле, что если один из игроков применяет свою оптимальную стратегию, то любое отклонение другого игрока от оптимальной стратегии может оказаться не выгодным для него.

Действительно, пусть игрок А выбрал оптимальную стратегию соответствующую $\alpha = \max_i \min_j a_{ij} = a_{i_0 j_0}$, то есть игрок А обеспечивает себе выигрыш , равный одному из элементов i_0 строки, причём, элемент в j_0 столбце наименьший среди них $\left(a_{i_0 j} \geq a_{i_0 j_0}, j \neq j_0\right)$. И если игрок В выберет j-ю стратегию отличную от j_0, то он проиграет сумму, равную $\left(a_{i_0 j} - a_{i_0 j_o}\right)$, а игрок А соответственно выиграет её. Аналогичные рассуждения показывают не выгодность стратегии, отличной от оптимальной, для игрока А, когда В придерживается своей оптимальной стратегии.

Решением игры в примере является выбор стратегий A_2 игроком A и B_3 игроком B, при этом цена игры V = 3.

Игры, не содержащие седловой точки. Смешанные стратегии

Среди конечных игр, имеющих практическое значение, сравнительно редко встречаются игры с седловой точкой. Более типичным является случай, когда нижняя и верхние цены не совпадают $(\alpha \neq \beta)$, причём, не трудно показать, что тогда $\alpha < \beta$.

Действительно, пусть $\alpha = \max_i \min_j a_{ij} = a_{ks}$, это означает, что в k-й строке элемент a_{kj} наименьший, то есть при нахождении $\bar{a}_i = \max_j a_{ij}$ в их число попадут значения не меньшие a_{ks}, так как даже в этой строке элементы в других столбцах больше или равны a_{ks}. Значит, и

$$\min_i \left\{ \max_j a_{ij} \right\} = \min_i \bar{a}_i \ge a_{ks}. \qquad (4)$$

Откуда следует, что $\beta \ge \alpha$, но мы рассматриваем случай $\beta \ne \alpha$, значит $\beta > \alpha$. Итак, в играх, не имеющих седловой точки, нижняя цена игры α всегда меньше верхней β.

Установленный факт означает, что если игра одноходовая, то есть партнёры играют один раз, выбирая по одной чистой стратегии, то в расчёте на разумно играющего противника они должны придерживаться принципа минимакса, это гарантирует выигрыш $V \ge \alpha$ игроку А и проигрыш $V \le \beta$ игроку В. Следовательно, при применении минимаксных стратегий величина платежа V ограничена неравенством

$$\alpha \le V \le \beta. \qquad (5)$$

Если же игра повторяется не однократно, то постоянное применение минимаксных стратегий становится не разумным. Например, если игрок В будет уверен в том, что на следующем ходу А применит прежнюю стратегию, то он несомненно выберет стратегию, отвечающую наименьшему в это строке, а не прежнюю.

Таким образом, мы пришли к выводу, что при неоднократном повторении игры обоим игрокам следует менять свои стратегии. Тогда возникает вопрос: а каким образом их менять, чтобы в среднем выигрыш одного и проигрыш другого был аналогично одноходовой игре, ограничиваясь снизу и сверху соответственно?

Для ответа на этот вопрос введём вероятность (относительную частоту) x_i применение игроком А i-й стратегии, и y_j – вероятность применения j-й стратегии игроком В. Совокупности этих вероятностей определяют векторы $X = \{x_1, x_2, ..., x_m\}$, где $\sum_{i=1}^{m} x_i = 1$ и $Y = \{y_1, y_2, ..., y_n\}$, где $\sum_{j=1}^{n} y_j = 1$.

Эти векторы или наборы вероятностей выбора чистых стратегий называются смешанными стратегиями игроков.

В частности, решение игры с седловой точкой даётся векторами $\bar{x}$ и $\bar{y}$, среди компонент которых $x_{i_0} = 1,\ x_i = 0\ (i \ne i_0)$ и $y_{j_0} = 1,\ y_j = 0\ (j \ne j_0)$.

Для получения ограничений на средний выигрыш или проигрыш рассмотрим математическое ожидание выигрыша первого игрока

$$M(X;Y)=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}a_{ij}x_i y_j. \tag{6}$$

Если второй игрок В выбрал некоторую смешанную стратегию Y', то первому игроку, естественно, считать лучшей ту смешанную стратегию $\bar{X}$, при которой достигается $\max M(X;Y')$:

$$M(\bar{X};Y')=\max M(X;Y'). \tag{7}$$

Аналогично, при выборе первым игроком некоторой стратегии X' второму игроку следует выбирать стратегию $\bar{Y}$ такую, что

$$M(X';\bar{Y})=\min M(X';Y). \tag{8}$$

Ясно, что X' зависит от Y' и $\bar{Y}$ зависит от X'. Перед каждым игроком, таким образом, возникает задача выбора оптимальной стратегии, под которой для игрока А понимается смешанная стратегия X^*, которая максимизирует математическое ожидание его выигрыша, для игрока В – стратегия Y^*, минимизирующая математическое ожидание его проигрыша.