Выбор оптимальной стратегии

Исходя из рассмотренных в предыдущих лекциях определений, можно сделать следующие выводы:

1. Игры приобретают случайный характер.
2. Случайной становится величина выигрыша (проигрыша).
3. Средняя величина выигрыша (математическое ожидание выигрыша) является функцией от смешанных стратегий S_A, S_B $f\left(S_A, S_B\right)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} p_i q_j$ и называется **платежной функцией игры**.

Стратегии $S_A{}^* = \left(p_1^*, p_2^*, \ldots, p_m^*\right)$, $S_B{}^* = \left(q_1^*, q_2^*, \ldots, q_n^*\right)$ называются **оптимальными**, если для произвольных стратегий S_A, S_B выполняется условие $f\left(S_A, S_B{}^*\right) \le f\left(S_A{}^*, S_B{}^*\right) \le f\left(S_A{}^*, S_B\right)$.

Пара оптимальных смешенных стратегий $\left(S_A^*; S_B^*\right)$ обладает свойством: если один игрок придерживается своей оптимальной стратегии, то другому не выгодно отступать от своей.

Выигрыш, соответствующий оптимальному решению называется **ценой игры** v. В общем случае $\alpha \le v \le \beta$. Значение платежной функции при оптимальных стратегиях игроков определяет цену игры, т.е. $v = f\left(S_A{}^*, S_B{}^*\right)$.

Оптимальным решением игры называется совокупность оптимальных стратегий и цены игры.

Резюмируя все вышесказанное получаем:

Каждая матричная игра с нулевой суммой имеет, по крайней мере, одно решение, то есть существуют стратегии X^* и Y^*, оптимальные для обоих игроков, причём

$$\max\min M(X;Y) = \min\max M(X;Y) = M(X^*;Y^*)\ . \qquad (9)$$

Число $V = M(X^*;Y^*)$ называют ценой игры.

Примечание. Нулевая сумма означает, что выигрыш одного игрока равен проигрышу другого.

Теорема фон Неймана (основная теорема теории матричных игр): Любая матричная игра имеет по крайней мере одно оптимальное решение в смешанных стратегиях – две оптимальные стратегии и соответствующую им цену: $\left\langle S_A{}^*, S_B{}^*, v\right\rangle$.

Из основной теоремы следует, что каждая конечная игра имеет цену и она лежит между нижней и верхней ценами игры (8).

И, если один из игроков придерживается своей оптимальной стратегии, то выигрыш (проигрыш) его остаётся неизменным независимо от тактики другого игрока, если, конечно, последний не выходит за пределы своих «полезных» стратегий, иначе выигрыш (проигрыш) возрастает.

Это означает выполнение неравенств

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_i^* \geq V \ \left(j = \overline{1,n}\right), \tag{10}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j^* \leq V \ , \left(i = \overline{1,m}\right). \tag{11}$$

Примечание. Эти неравенства будут необходимы при сведении матричной игры к задаче линейного программирования.

В случае наличия у каждого из игроков большого числа возможных стратегий целесообразно введение следующих понятий и определений.

Стратегия называется **активной**, если входит в оптимальное решение с отличной от нуля вероятностью, т.е. $p_i > 0, q_j > 0$.

Теорема (об активных стратегиях): Если один игрок придерживается своей оптимальной смешанной стратегии, то выигрыш остается неизменным и равным цене игры v, если другой игрок не выходит за пределы своих активных стратегий (т.е. пользуется любой из них в чистом виде или смешивает их в любых пропорциях).