Методы решения матричных игр

Все методы решения матричных игр, рассматриваемые в нашем курсе, опираются на теорему об активных стратегиях.

Рассмотрим некоторые частные случаи решаемых матричных игр.

Игра, имеющая седловой элемент в платежной матрице (игра с седловой точкой)

В этом случае первый игрок реализует свою максиминную стратегию, а второй игрок – свою минимаксную стратегию, нижняя чистая цена игры равна верхней чистой цене игры. Тогда говорят, что **игра решается в чистых стратегиях,** отклоняться от которых невыгодно.

Игра с платежной матрицей 2 на 2, не имеющей седлового элемента

Здесь нет оптимального решения в чистых стратегиях, поэтому решение ищется в смешанных стратегиях. Чтобы их найти, воспользуемся теоремой об активных стратегиях. Если первый игрок придерживается своей оптимальной смешанной стратегии S_A^*, то его средний выигрыш будет равен цене игры v, какой бы активной стратегией ни пользовался второй игрок.

Пусть дана платежная матрица
$$P = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} & \begin{array}{c} p_1 \\ p_2 \end{array} \\ \begin{array}{cc} q_1 & \quad q_2 \end{array} & \end{array}$$

(вокруг матрицы записаны смешанные стратегии игроков). Запишем для первого игрока два уравнения: первое – для случая применения вторым игроком только его первой стратегии, и тогда используются только элементы первого столбца матрицы, второе – для случая применения вторым игроком только своей второй стратегии, и тогда используются только элементы второго столбца матрицы. Левые части этих уравнений вычисляют математическое ожидание выигрыша первого игрока, которое равно цене игры. Эти два уравнения содержат сразу три неизвестные - p_1, p_2, v, и сами уравнения при этом являются однородными, поэтому для однозначной разрешимости системы необходимо третье уравнение со свободным членом. Этим добавочным и очень важным уравнением является условие нормировки, согласно которому сумма вероятностей всех событий должна равняться единице. Таким образом, окончательно система уравнений для первого игрока выглядит так:

$$\begin{cases} a_{11} p_1 + a_{21} p_2 = v \\ a_{12} p_1 + a_{22} p_2 = v \\ p_1 + p_2 = 1 \end{cases}$$

Эта система решается очень просто по той причине, что в ней можно из третьего уравнения выразить одну неизвестную величину через другую. Решение данной системы дает значения оптимальной смешанной стратегии первого игрока и соответствующую ей цену игры.

Для полного решения игры осталось найти оптимальную смешанную стратегию второго игрока. Здесь игроки как бы меняются местами. Построение системы уравнений аналогично предыдущему случаю. Отличие в том, что в качестве коэффициентов системы берутся не столбцы матрицы, а строки, поскольку именно строки отвечают чистым стратегиям первого игрока. Таким образом, система выглядит так:

$$\begin{cases} a_{11}q_1 + a_{12}q_2 = v \\ a_{21}q_1 + a_{22}q_2 = v \\ q_1 + q_2 = 1 \end{cases}$$

Пример. Найти смешанные стратегии игроков для матрицы $P = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Составим системы уравнений для первого игрока и для второго:

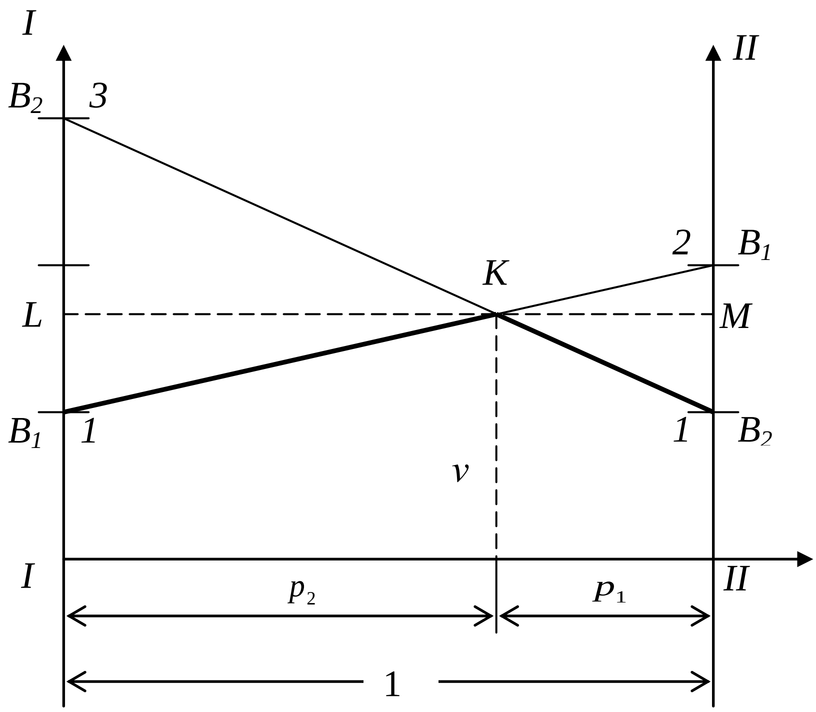
$\begin{cases} 1p_1 + 2p_2 = v \\ 3p_1 + 1p_2 = v \\ p_1 + p_2 = 1 \end{cases}$ $\begin{cases} 1q_1 + 3q_2 = v \\ 2q_1 + 1q_2 = v \\ q_1 + q_2 = 1 \end{cases}$, решение которых даёт $p_1 = 1/3;\ p_2 = 2/3;$ $q_1 = 2/3;\ q_2 = 1/3;$ $v = 5/3.$

Таким образом, запишем решение игры в виде: $\left\langle \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix};\ \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix};\ \frac{5}{3} \right\rangle$

Графическое решение игры два на два

Снова рассмотрим пример 6. Отложим на оси абсцисс отрезок единичной длины. На концах этого отрезка нарисуем вертикальные оси I-I и II-II. Отложим на оси I-I значения выигрышей **первого** игрока при использовании им **первой** стратегии. На оси II-II отложим выигрыши **первого** игрока при использовании им **второй** стратегии. Соединим точки отрезками прямых. Ломаная $B_1\ KB_2$ - **нижняя граница выигрыша**. На этой границе лежит минимальный выигрыш игрока *A* при любой его смешанной стратегии. Точка *K*, в которой этот выигрыш достигает максимума, определяет решение и цену игры. Для смешанной стратегии второго игрока можем также записать:

$$q_1^* = \frac{LB_2}{LB_1 + LB_2} = \frac{MB_2}{MB_1 + MB_2};\quad q_2^* = \frac{LB_1}{LB_1 + LB_2} = \frac{MB_1}{MB_1 + MB_2} \text{ или } q_2^* = 1 - q_1.$$



Стратегию второго игрока можно найти и непосредственно, если на графике поменять игроков местами, а вместо максимума нижней границы выигрыша р ассмотреть минимум верхней границы проигрыша. В любом случае точка *K* является одновременно точкой максимина и минимакса.

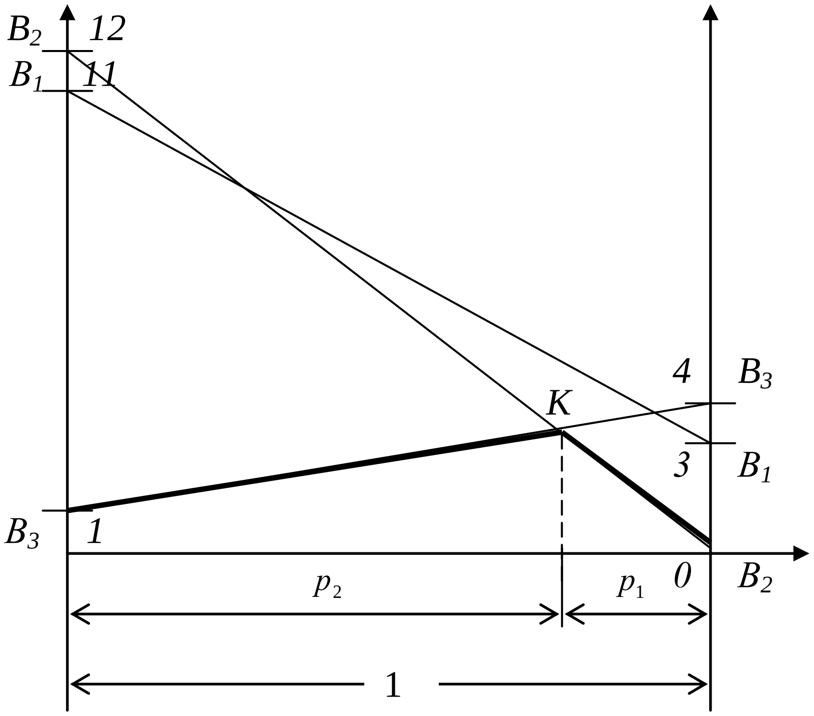
Решение игр $2\times n$ и $m\times 2$.

Рассмотрим графическую интерпретацию игры $2\times n$. Построение аналогично случаю два на два. Здесь n стратегий противника изображаются отрезками n прямых. Далее рассматривается нижняя граница, которая представляет собой ломаную. Максимум ломаной достигается в одной из вершин, где пересекаются две стратегии противника, которые являются **активными**.

В теории игр доказывается, что у любой конечной игры $m\times n$ существует решение, в котором число активных стратегий каждой стороны не превосходит наименьшего из чисел m или n. Следовательно, игра $2\times n$ имеет решение, в котором с каждой стороны участвует не более двух активных стратегий. (Так же может быть решена и игра $m\times 2$). Стоит только найти эти стратегии – и игра $2\times n$ превращается в игру 2×2.

Пример. Решить игру со следующей платежной матрицей:

$$P = \begin{array}{c c} \begin{pmatrix} 11 & 12 & 1 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} p_1 \\ p_2 \end{array} \\ \begin{array}{ccc} B_1 & B_2 & B_3 \end{array} & \end{array}$$



Решение. Эта игра имеет 2 стратегии со стороны первого игрока и три стратегии со стороны второго. Поэтому графическим способом определим одну из стратегий второго игрока, которая является неактивной. Построим график относительно стратегий первого игрока.

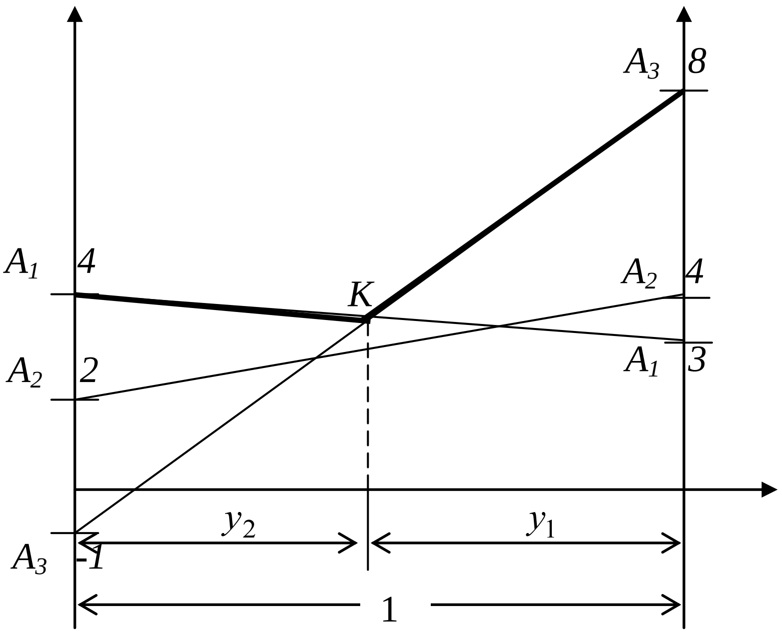
Из графика видно, что для второго игрока явно невыгодной является первая стратегия, которая является неактивной. Таким образом, из матрицы игры исключаем первый столбец и приходим к матрице размерности два на два следующего вида: $P=\begin{pmatrix}12 & 1\\ 0 & 4\end{pmatrix}$. Для этой матрицы запишем систему уравнений $\begin{cases}12p_1+0p_2=v\\ p_1+4p_2=v\\ p_1+p_2=1\end{cases}$ - для первого игрока, и систему: $\begin{cases}12q_2+q_4=v,\\ 0q_2+4q_4=v,\\ q_2+q_4=1.\end{cases}$ - для второго игрока.

Решение этих систем дает следующий результат: $\langle(4/15;\quad 11/15)\quad(0;\quad 1/5\quad 4/5)\quad 3.2\rangle$.

Игра размера $m\times 2$, как уже отмечалось выше, предварительно решается графически с точки зрения второго игрока. При этом определяются активные стратегии второго игрока. На графике применяется минимаксная стратегия, и рассматривается минимум верхней границы проигрыша. Рассмотрим пример.

Пример 8. Решить матричную игру со следующей матрицей: $P=\begin{pmatrix}4 & 3\\ 2 & 4\\ -1 & 8\end{pmatrix}$.

Решение. Построим график, где слева отложим значения проигрышей второго игрока при использовании им первой стратегии, а справа – значения проигрышей второго игрока при использовании им второй стратегии.



Из графика видно, что вторая стратегия для первого игрока является невыгодной, поскольку при её применении выигрыш первого игрока (и, соответственно, проигрыш второго) будет меньше. Таким образом, активными стратегиями первого игрока будут первая и третья. Соответственно запишем системы уравнений для смешанных стратегий игроков:

$$\begin{cases} 4q_1 + 3q_2 = v, \\ -q_1 + 8q_2 = v, \\ q_1 + q_2 = 1. \end{cases}$$

Решение системы: $q_1^* = 1/2$; $q_2^* = 1/2$; $v = 7/2$.

Решением системы будут значения $p_1^* = 9/10$, $p_2^* = 1/10$. Таким образом, решение игры выглядит так: $\left\langle \left(\frac{9}{10}; 0; \frac{1}{10} \right); \left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2} \right); \frac{7}{2} \right\rangle$.