

Игры с природой

Рассмотрим следующий экономический пример. Пусть требуется принять решение о выпуске на рынок некоторого товара. Может случиться, что объём спроса на этот товар известен точно; может быть, что известно лишь статистическое распределение возможных значений спроса; наконец, может оказаться, что известны лишь границы, в которых заключен спрос, но ни каких даже вероятностных соображений о его предстоящих значениях нет. Последний случай квалифицируется как неопределённость. Такая неопределённость может возникнуть, когда спрос (например, на сезонные товары) зависит от метеорологических условий (конфликт с природой) или в условиях рынка от деятельности конкурента, уже удовлетворившего неизвестную часть спроса. Приведённые примеры при определённых условиях могут быть приведены к игре.

Фирма Исполнитель выполняет и сдает проект. На этапе выполнения возможны следующие стратегии: C_1 – выполнение собственными силами; C_2 – привлечение только научных консультантов; C_3 – привлечение только финансовых консультантов; C_4 – привлечение научных и финансовых консультантов. Результат сдачи проекта зависит от требовательности Заказчика, который может: P_1 – не проводить экспертиз; P_2 – провести только научную экспертизу; P_3 – провести научную и экономическую экспертизу; экономическая экспертиза без научной не проводится. Чем больше проверок проекта, тем меньший финансовый результат можно ожидать, особенно, если не были привлечены соответствующие эксперты (из-за устранения несоответствий, переносов сроков сдачи и т.п.). Однако и привлечение консультантов влечет дополнительные затраты. Известно, что Заказчик имеет некоторую степень доверия к консультантам и при их привлечении вероятность соответствующей проверки снижается. Заметим, что Заказчик в этой ситуации не имеет заинтересованности в финансовом результате работы Исполнителя и может рассматриваться как Природа. Несмотря на свою осознанность, он имеет свои собственные интересы – качественный результат выполнения заказа, сроки выполнения и т.п. Эти интересы слабо коррелируют с доходом Исполнителя, т.к. общая стоимость работ обычно оговаривается заранее.

Пусть финансовый результат для Исполнителя (в млн. руб.) и вероятности проверок Заказчика могут быть оценены заранее и сведены в таблицу игры с природой

| | P_1 | P_2 | P_3 |
|-------|--------|-------|-------|
| C_1 | 10 0,3 | 5 0,3 | 2 0,4 |
| C_2 | 7 0,6 | 6 0,1 | 4 0,3 |
| C_3 | 9 0,5 | 4 0,4 | 3 0,1 |
| C_4 | 6 0,8 | 6 0,1 | 5 0,1 |

Рассмотрим несколько значений в ячейках таблицы.

Значения 10 и 0,3 в ячейке $C_1 P_1$ показывают, что если Исполнитель выполнит проект самостоятельно, а Заказчик не будет организовывать проверок, то Исполнитель получит 10 млн. руб. Вероятность того, что Заказчик не будет организовывать проверку, если Исполнитель выполнил работу самостоятельно, равна 0,3 или 30%.

Если же в этом случае Заказчик организует обе проверки (ячейка $C_1 P_3$), то финансовый результат фирмы-исполнителя падает до 2 млн. руб. из-за необходимости значительной доработки проекта. Вероятность такого события при самостоятельном выполнении работ равна 0,4 или 40%.

Значения 5 и 0,1 в ячейке $C_4 P_3$ показывают, что если Исполнитель привлечет к проекту научных и финансовых консультантов, то при организации обеих проверок Исполнитель получит уже 5 млн. руб., так как проект будет выполнен с учетом многих требований. Вероятность того, что Заказчик будет организовывать обе проверки в этом случае равна 0,1 или 10%. Если же в этом случае Заказчик не будет организовывать экспертной проверки вовсе (вероятность чего очень велика и равна 0,8 или 80%), то выигрыш фирмы-исполнителя составит только 6 млн. руб., а не 10, так как велики будут расходы на привлечение консультантов.

Критерий Байеса (Bayes) (статистический, наибольшего среднего результата, максимального математического ожидания)

В этом критерии для каждой стратегии (строки) определяется средний ожидаемый результат как сумма произведений вдоль строки результатов на их вероятности:

$$B_i = p_{i1} \cdot a_{i1} + p_{i2} \cdot a_{i2} + \dots + p_{in} \cdot a_{in}$$

Лучшей по критерию Байеса считается та стратегия, для которой этот результат наибольший:

$$B_I = \max_i B_i \Rightarrow C_I \rightarrow \text{The best (Bayes)}$$

Применим критерий Байеса к нашему примеру.

$$B_1 = 0,3 \cdot 10 + 0,3 \cdot 5 + 0,4 \cdot 2 = 5,3$$

$$B_2 =$$

$$B_3 =$$

$$B_4 =$$

$$B_I = \max(5,3; B_2; B_3; B_4) = \Rightarrow C_x \rightarrow \text{The best (Bayes)}$$

Таким образом, по критерию Байеса наилучшей является стратегия **СВ**, то есть средний лучший результат приносит стратегия привлечения только финансовых консультантов.

Если фирма-исполнитель постоянно выполняет аналогичные проекты для схожих заказчиков, то общий результат деятельности будет наилучшим при

выборе именно третьей стратегии. Если такой заказ имеет разовый характер, то критерий Байеса является менее предпочтительным.

Критерий Вальда (Wald) (пессимизма, наибольшего худшего результата, максимина)

В этом критерии для каждой стратегии (строки) определяется наименьший достижимый результат как минимальный элемент в строке:

$$W_i = \min_j (a_{ij}) = \min_{\text{строка}} (a_{ij})$$

Лучшей по критерию Вальда считается та стратегия, для которой этот результат наибольший: $W_I = \max_i W_i \Rightarrow C_I \rightarrow \text{The best (Wald)}$

Применим критерий Вальда к нашему примеру.

$$W_1 = \min(10; 5; 2) = 2$$

$$W_2 =$$

$$W_3 =$$

$$W_4 =$$

$$W_I = \max(2; W_2; W_3; W_4) = \Rightarrow C_X \rightarrow \text{The best (Wald)}$$

Таким образом, по критерию Вальда наилучшей является стратегия **CW**, то есть при привлечении научных и финансовых консультантов мы в самом худшем случае получим наибольший выигрыш.

Критерий оптимизма (максимакса, крайнего оптимизма)

В этом критерии для каждой стратегии (строки) определяется наибольший достижимый результат как максимальный элемент в строке:

$$O_i = \max_j (a_{ij}) = \max_{\text{строка}} (a_{ij})$$

Лучшей по критерию оптимизма считается та стратегия, для которой этот результат наибольший: $O_I = \max_i O_i \Rightarrow C_I \rightarrow \text{The best (optimism)}$

Применим критерий оптимизма к нашему примеру.

$$O_1 = \max(10; 5; 2) = 10$$

$$O_2 =$$

$$O_3 =$$

$$O_4 =$$

$$O_I = \max(10; O_2; O_3; O_4) = \Rightarrow C_O \rightarrow \text{The best (optimism)}$$

Таким образом, по критерию оптимизма наилучшей является стратегия **CO**, то есть наибольший возможный выигрыш есть шанс получить только выполняя проект своими силами без привлечения консультантов.

Критерий Гурвица (Hurwich) (пессимизма-оптимизма, компромиссный)

В этом критерии для каждой стратегии определяется «взвешенный» результат из самого пессимистического и самого оптимистического для данной стратегии. Вес каждого определяется так называемыми коэффициентами пессимизма и оптимизма, сумма которых равна единице.

Обычно в задаче задается лишь коэффициент пессимизма k (χ , λ или κ). Коэффициент оптимизма равен, соответственно, $(1-k)$. Значение этого коэффициента определяется личными особенностями лица, принимающего решения в данной ситуации и никак не зависит от вида самой матрицы.

После задания коэффициента пессимизма k и коэффициента оптимизма $(1-k)$ для каждой стратегии находят пессимистический вариант B_i и оптимистический вариант O_i и вычисляют параметр Гурвица:

$$H_i = k \cdot B_i + (1-k) \cdot O_i$$

Лучшей по критерию Гурвица считается та стратегия, для которой этот результат наибольший: $H_I = \max_i H_i \Rightarrow C_I \rightarrow \text{The best (Hurwich)}$

Варианты применения критерия Гурвица. В некоторых случаях считается разумным вместо лучшего (худшего) вариантов использовать средний результат между несколькими лучшими (худшими) значениями. Встречаются случаи, когда для критерия Гурвица используют лучшее (худшее) значение, вероятность которого не меньше заданной величины. Тем самым отсекаются крайне редко реализуемые предельные значения.

Для решения задач будем использовать критерий Гурвица в классической постановке, а коэффициент пессимизма будем задавать явно в условии задачи.

Применим критерий Гурвица к нашему примеру. Коэффициент пессимизма возьмем равным $k=0,6$. Тогда коэффициент оптимизма равен $(1-k)=1-0,6=0,4$.

$$H_1 = 0,6 \cdot 2 + 0,4 \cdot 10 = 5,2$$

$$H_2 =$$

$$H_3 =$$

$$H_4 =$$

$$H_I = \max(5,2; H_2, H_3, H_4) = \Rightarrow CH \rightarrow \text{The best (Hurwich)}$$

Таким образом, по критерию Гурвица наилучшими оказались стратегии: **СН**, то есть по этому критерию предпочтительно привлекать научных и финансовых консультантов или только финансовых консультантов.

Критерий Сэвиджа (Savage) (минимального максимального риска)

В этом критерии сначала строится матрица (таблица) рисков. Алгоритм построения матрицы такой.

1. Матрица рисков строится по столбцам.

2. В каждом столбце находим самое большое значение выигрыша.
3. Из этого значения по очереди вычитают все значения в данном столбце и записывают результат в те же позиции.

Символьно эту процедуру можно записать в таком виде:

$$r_{ij} = \max_{\text{столб}} a_{ij} - a_{ij}$$

Построим матрицу рисков в нашем примере.

Максимальный элемент в первом столбце исходной матрицы равен 10.

Вычитая из 10 остальные элементы столбца, получим:

$$\begin{pmatrix} 10-10=0 \\ 10-7=3 \\ 10-9=1 \\ 10-6=4 \end{pmatrix}, \text{ то есть первый столбец матрицы рисков равен } \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Аналогично находим элементы других столбцов:

$$\begin{pmatrix} 6-5=1 \\ 6-6=0 \\ 6-4=2 \\ 6-6=0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 5-2=3 \\ 5-4=1 \\ 5-3=2 \\ 5-5=0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, матрица рисков для нашего примера будет иметь вид:

$$(r_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Далее в каждой строке матрицы рисков определяется наибольший результат (максимальный элемент в строке):

$$S_i = \max_j (r_{ij}) = \max_{\text{строка}} (r_{ij})$$

Лучшей по критерию Сэвиджа считается та стратегия, для которой этот результат наименьший:

$$S_I = \min_i S_i \Rightarrow C_I \rightarrow \text{The best (Savage)}$$

Применим критерий Сэвиджа к примеру:

$$S_1 = \max(0; 1; 3) = 3$$

$$S_2 =$$

$$S_3 =$$

$$S_4 =$$

$$S_I = \min(3; S_2; S_3; S_4) = \Rightarrow CH \rightarrow \text{The best (Savage)}$$

Таким образом, по критерию Сэвиджа наилучшей является стратегия CH , то есть при привлечении только финансовых консультантов мы рискуем потерять наименьшее значение относительно других возможных вариантов.

Запись ответа

Как было нами оговорено, в качестве ответа записываем ту стратегию, которая чаще всего выделяется как лучшая по перечисленным критериям.

Выпишем оптимальные результаты по разным критериям:

$C_B \rightarrow \text{The best (Bayes)}$

$C_W \rightarrow \text{The best (Wald)}$

$C_O \rightarrow \text{The best (optimism)}$

$C_H \rightarrow$ The best (Hurwich)

$C_S \rightarrow$ The best (Savage)

Как видно, стратегия **C** чаще всего встречается в лучших результатах. Она и будет записана нами в ответ как самая оптимальная.

Ответ: по совокупности критериев выбираем стратегию **C** – привлечь к выполнению работ только финансовых консультантов.