ГРАФИЧЕСКИЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ЛП

Графический метод довольно прост и нагляден для решения задач ЛП с двумя переменными. Он основан на *геометрическом* представлении допустимых решений и ЦФ задачи. Каждое из неравенств задачи ЛП определяет на координатной плоскости (x_1, x_2) некоторую полуплоскость, а система неравенств в целом – пересечение соответствующих полуплоскостей. Множество точек пересечения данных полуплоскостей называется **областью допустимых решений** (ОДР). ОДР всегда представляет собой **выпуклую** фигуру, т.е. обладающую следующим свойством: если две точки A и B принадлежат этой фигуре, то и весь отрезок AB принадлежит ей. ОДР графически может быть представлена выпуклым многоугольником, неограниченной выпуклой многоугольной областью, отрезком, лучем, одной точкой. В случае несовместности системы ограничений задачи ОДР является пустым множеством.

Оптимальное решение всегда находится на границе ОДР т.е. ЦФ $L(X) = c_1x_1 + c_2x_2$ принимает свое max(min) значение на границе области, точнее в ее угловых точках.

При поиске оптимального решения задач ЛП возможны следующие ситуации: существует единственное решение задачи; существует бесконечное множество решений (**альтернативный оптиум**); ЦФ не ограничена; область допустимых решений – единственная точка; задача не имеет решений.

Методика решения задач ЛП графическим методом

I. В ограничениях задачи замените знаки неравенств на знаки точных равенств и постройте соответствующие прямые.

II. Найдите и заштрихуйте полуплоскости, разрешенные каждым из ограничений-неравенств задачи. Для этого подставьте в конкретное неравенство координаты какой-либо точки [например, (0;0)], и проверьте истинность полученного неравенства.

Если неравенство истинное, ***то*** надо заштриховать полуплоскость, содержащую данную точку; ***иначе*** (неравенство ложное) надо заштриховать полуплоскость, не содержащую данную точку.

Поскольку x_1 и x_2 должны быть неотрицательными, то их допустимые значения всегда будут находиться выше оси Ox_1 и правее оси Ox_2 , т.е. в I-м квадранте. Ограничения-равенства разрешают только те точки, которые лежат на соответствующей прямой, поэтому выделите на графике такие прямые.

III. Определите ОДР как часть плоскости, принадлежащую одновременно всем разрешенным областям, и выделите ее. При отсутствии ОДР задача ***не имеет решений***, о чем сделайте соответствующий вывод.

IV. Если ОДР – не пустое множество, то определите координаты угловых точек. Определение координат сводится к решению системы соответствующих линейных уравнений.

V. Подставьте координаты угловых точек в уравнение для ЦФ и найдите max (min) значение целевой функции.

Можно вместо перебора всех угловых точек (**пункт IV, V*)*** произвести следующие действия:

IV.а Провести вектор, координатами которого служат коэффициенты в уравнении с целевой функцией. Сдвигать прямую перпендикулярную построенному вектору от начала по направлению вектора до момента, когда пересечение сдвигаемой прямой с ОДР будет составлять одну точку.

V.а Координаты найденной точки будут являться оптимальным планом, а если их подставить в уравнение целевой функции, то получим ее max (min) значение.

Задача

Найдем оптимальное решение задачи о красках, математическая модель которой имеет вид:

$$L(X) = 3x_1 + 2x_2 \to \max$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 6 & (1) \\ 2x_1 + x_2 \le 8 & (2) \\ -x_1 + x_2 \le 1 & (3) \\ \quad x_2 \le 2 & (4) \end{cases}$$

Построим прямые ограничений (рис. 1).

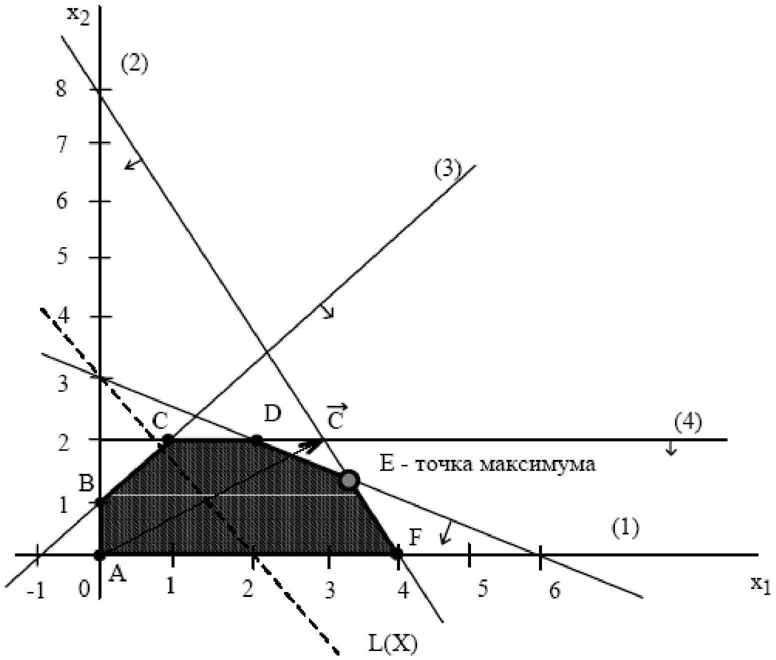

Рис. 1. Графическое решение задачи

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 6 & (5) \\ 2x_1 + x_2 = 8 & (6) \\ -x_1 + x_2 = 1 & (7) \\ \quad x_2 = 2 & (8) \end{cases}$$

Определим ОДР. Например, подставим точку (0;0) в исходное ограничение (3), получим $0 \le 1$, что является истинным неравенством, поэтому стрелкой (или штрихованием) обозначим полуплоскость, ***содержащую*** точку (0;0), т.е. расположенную правее и ниже прямой (3). Аналогично определим допустимые полуплоскости для остальных ограничений и укажем их стрелками у соответствующих прямых ограничений (см. рис. 1). Общей областью, разрешенной всеми ограничениями, т.е. ОДР является многоугольник ABCDEF.

Найдем координаты точек пересечения прямых ограничений, т.е. координаты угловых точек. В некоторых случаях хороший рисунок позволяет сразу определять координаты угловых точек.

$\mathrm{A}(0,0)$;

$\mathrm{B}(0,1)$;

$\mathrm{C}(1,2)$;

$\mathrm{D}(2,2)$;

Для определения координаты точки E решим систему уравнений с ограничениями (5) и (6).

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 6 \\ 2x_1 + x_2 = 8 \end{cases}$$

Решая данную систему получаем: $\begin{matrix} x_1 = \dfrac{10}{3} = 3\dfrac{1}{3} \\ x_2 = \dfrac{4}{3} = 1\dfrac{1}{3} \end{matrix}$

$E(\frac{10}{3}, \frac{4}{3})$

$F(4,0)$.

Найдем значение целевой функции в угловых точках, т.е. подставим их координаты в уравнение $L(X) = 3x_1 + 2x_2$.

$L(A) = L(0,0) = 3 \cdot 0 + 2 \cdot 0 = 0$

$L(B) = L(0,1) = 3 \cdot 0 + 2 \cdot 1 = 2$

$L(C) = L(1,2) = 3 \cdot 1 + 2 \cdot 2 = 7$

$L(D) = L(2,2) = 3 \cdot 2 + 2 \cdot 2 = 10$

$L(E) = L\left(\frac{10}{3}, \frac{4}{3}\right) = 3 \cdot \frac{10}{3} + 2 \cdot \frac{4}{3} = 12\frac{2}{3}$

$L(F) = L(4,0) = 3 \cdot 4 + 2 \cdot 0 = 12$

E – это точка максимума ЦФ.

Таким образом, наилучшим режимом работы фирмы является ежесуточное производство краски 1-го вида в объеме 3 1/3 т и краски 2-го вида в объеме 1 1/3 т. Доход от продажи красок составит 12 2/3 тыс. руб. в сутки.

Решая графическим методом, предполагающим построение целевого вектора, проводим вектор, координатами которого служат коэффициенты в уравнении с целевой функцией $\{3{,}2\}$; сдвигая прямую, перпендикулярную построенному вектору (от начала к концу), найдем точку, являющуюся последней в пересечении сдвигаемой прямой с ОДР (это точка Е), ее координаты, найденные из решения системы соответствующих уравнений, будут являться оптимальным планом, а значение целевой функции в ней будет max.

В более общем случае разработан и широко применяется универсальный метод решения любой задачи ЛП, называемый симплекс-методом.

Симплекс – метод, как метод решения задач ЛП был предложен американским математиком-экономистом Данцигом в 1951 году.

Графически симплекс метод представляет из себя передвижение по выпуклому многограннику от вершины к вершине, при этом значение целевой функции на каждом шаге улучшается до тех пор, пока не достигается оптимум.

Идея симплекс – метода состоит в том, чтобы преобразовать уравнение содержащее целевую функцию к виду: $-Ax_i - Bx_j - Cx_k - ... = L - D$, т.к. в этом случае становиться возможным выразить $L = D - Ax_i - Bx_j - Cx_k - ...$, а в силу того что перед нами ставится задача максимизировать L, то эта задача достигается в случае, когда все переменные, присутствующие в данном уравнении, принимают нулевые значения (т.к. переменные не отрицательны по условию).