Распределительные задачи и области их применения

Задача о размещении (транспортная задача) – это распределительная задача, в которой работы и ресурсы измеряются в одних и тех же единицах. В таких задачах ресурсы могут быть разделены между работами, и отдельные работы могут быть выполнены с помощью различных комбинаций ресурсов. Примером типичной транспортной задачи (ТЗ) является распределение (транспортировка) продукции, находящейся на складах, по предприятиям-потребителям. Стандартная ТЗ определяется как задача разработки наиболее экономичного плана перевозки продукции *одного вида* из нескольких пунктов отправления в пункты назначения. При этом величина транспортных расходов прямо пропорциональна объему перевозимой продукции и задается с помощью тарифов на перевозку *единицы продукции*.

Исходными параметрами при построении модели для решения транспортной задачи являются:

1) n – количество пунктов отправления, m – количество пунктов назначения.

2) a_i – запас продукции в пункте отправления A_i ($i = \overline{1, n}$) [ед. прод.].

3) b_j – спрос на продукцию в пункте назначения B_j ($j = \overline{1, m}$) [ед. прод.].

4) c_{ij} – тариф (стоимость) перевозки единицы продукции из пункта отправления A_i в пункт назначения B_j [руб. / ед. прод.].

Искомыми параметрами при построении модели для решения транспортной задачи являются:

1) x_{ij} – количество продукции, перевозимой из пункта отправления A_i в пункт назначения B_j [ед. прод.].

2) $L(X)$ – транспортные расходы на перевозку всей продукции [руб.].

Основными этапами построения модели для решения транспортной задачи являются:

I. Определение переменных. (Этот этап весьма формален, т.к. переменными как правило служат x_{ij} – количество продукции, перевозимой из пункта отправления A_i в пункт назначения B_j).

II. Проверка сбалансированности задачи. (Задача называется сбалансированной, если сумма запасов продукции во всех пунктах отправления равна суммарной потребности во всех пунктах потребления, т.е. $\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{j=1}^{m} b_j$. В случае, когда *суммарные запасы превышают суммарные потребности*, необходим дополнительный **фиктивный** (реально не существующий) пункт потребления, который будет формально потреблять существующий излишек запасов, т.е.: $b_{ф} = \sum_{i=1}^{n} a_i - \sum_{j=1}^{m} b_j$

Если *суммарные потребности превышают суммарные запасы*, то необходим дополнительный **фиктивный** пункт отправления, формально восполняющий существующий недостаток продукции в пунктах отправления: $a_{ф} = \sum_{j=1}^{m} b_j - \sum_{i=1}^{n} a_i$

Для фиктивных перевозок вводятся **фиктивные** тарифы $c^{ф}$, величина которых обычно приравнивается к нулю $c^{ф} = 0$. Но в некоторых ситуациях величину фиктивного тарифа можно интерпретировать как **штраф**, которым облагается каждая единица недопоставленной продукции. В этом случае величина $c^{ф}$ может быть любым положительным числом.

III. Построение сбалансированной транспортной матрицы.

Общий вид транспортной матрицы

<table>
<tr><td rowspan="2">Пункты отправления, A_i</td><td colspan="4">Пункты назначения B_j</td><td rowspan="2">Запасы продукции, в пунктах отправления</td></tr>
<tr><td>B_1</td><td>B_2</td><td>…</td><td>B_m</td></tr>
<tr><td>A_1</td><td>c_{11}</td><td>c_{12}</td><td>…</td><td>c_{1m}</td><td>a_1</td></tr>
<tr><td>A_2</td><td>c_{21}</td><td>c_{22}</td><td>…</td><td>c_{2m}</td><td>a_2</td></tr>
<tr><td>…</td><td>…</td><td>…</td><td>…</td><td>…</td><td>…</td></tr>
<tr><td>A_n</td><td>c_{n1}</td><td>c_{n2}</td><td>…</td><td>c_{nm}</td><td>a_n</td></tr>
<tr><td>Потребности в продукции, в пунктах назначения</td><td>b_1</td><td>b_2</td><td>…</td><td>b_m</td><td>$\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{j=1}^{m} b_j$</td></tr>
</table>

Иногда в определенных направлениях перевозки продукции невозможны, например, по причине ремонта транспортных магистралей. Такие ситуации моделируются с помощью введения так называемых **запрещающих** тарифов $c^з$. Запрещающие тарифы должны сделать невыгодными перевозки в соответствующих направлениях. Для этого величина запрещающих тарифов должна быть больше реальных тарифов в транспортной матрице

$$c^з > \max(c_{ij})$$

Существующий алгоритм решения транспортных задач (**метод потенциалов**) предполагает, что ЦФ стремится к минимуму. Однако существуют ситуации, когда в рамках транспортной модели требуется максимизировать ЦФ, например, общий доход, объем продаж, прибыль, качество выполняемых работ и т.д. В этом случае в модель вместо искомой целевой функции $L(X)$ вводится ЦФ $L_1(X) = -L(X)$, в которой тарифы умножаются на (-1). Таким образом, максимизация $L(X)$ будет соответствовать минимизации $L_1(X)$.

Решение транспортной задачи осуществляется при помощи метода потенциалов, который является итерационным методом. В качестве начального базисного решения при нахождении оптимального решения методом потенциалов необходимо построение так называемого опорного плана, который является допустимым решением транспортной задачи.

Рассмотрим три основных метода нахождения опорных планов: метод северо-западного угла, метод минимального элемента и метод Фогеля. «Качество» опорных планов, полученных этими методами, различается: в общем случае метод Фогеля дает наилучшее решение (зачастую оптимальное), а метод северо-западного угла – наихудшее приближение.

Все рассматриваемые методы нахождения опорных планов отличаются только *способом выбора клетки* для заполнения. Само заполнение происходит одинаково независимо от используемого метода.