МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное
бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«КАЗАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

ОСНОВЫ ТЕОРИИ НАДЕЖНОСТИ ЭЛЕКТРОМЕХАНИЧЕСКИХ КОМПЛЕКСОВ

Учебное пособие

Казань 2017

УДК 621. 3.06+519.6 (076.1)
ББК 32.973 я 73

Рецензенты:

кандидат технических наук, доцент кафедры Радио-электронных квантовых устройств Казанского национального исследовательского технического университета им.А.Н.Туполева – Казанский авиационный институт А.И.Усанов;

кандидат технических наук, доцент кафедры Теоретические основы электротехники Казанского государственного энергетического университета В.И.Капаев,

Основы теории надежности электромеханических комплексов: учебное пособие / Сост.: П.П. Павлов, Р.С. Литвиненко. – Казань: Казан. гос. энерг. ун-т, 2017. – 92 с.

В учебном пособии рассмотрены основные вопросы, связанные с определением показателей надежности различных электромеханических комплексов и систем, а также положения, касающиеся оценки влияния надежности технического объекта на техногенный (технический) риск.

Предназначено для студентов всех форм обучения по образовательным программам «Электромеханические комплексы и системы» направления подготовки 13.04.02 «Электроэнергетика и электротехника».

УДК 621. 3.06+519.6 (076.1)
ББК 32.973 я 73

ВВЕДЕНИЕ

Вопросам надежности в технике уделяется большое внимание, так как создаваемые сложные технические системы должны обладать высокой надежностью и безопасностью в эксплуатации. От надежности зависят такие показатели, как качество, безопасность, риск, живучесть и др. Надежность технических систем должна быть обеспечена на всех этапах жизненного цикла: при проектировании, изготовлении и эксплуатации.

Показатели надежности – вероятностные величины, поэтому изучение дисциплин «Математическая статистика и теория надежности электрического транспорта» и «Эксплуатационная надежность электротехнического оборудования» тесно связано с положениями, относящимися к теории вероятностей, математической статистике и теории случайных процессов. В связи с этим авторы рассмотрели во второй главе прикладной характер этих наук в процессе изучения вопросов оценки показателей надежности. Тем не менее, предполагается, что при освоении теории надежности технических систем студент уже обладает определенными знаниями, касающимися случайных величин и случайных процессов.

В пособии достаточно полно изложены вопросы экспериментального определения показателей надежности элементов и оценки надежности технического объекта как сложной системы, с учетом наличия либо отсутствия восстановления отказавших элементов. Все теоретические положения сопровождаются рассмотрением конкретных примеров, часть из которых была реализована с использованием математического пакета Mathcad.

Отказ технической системы неизбежно ведет к потерям: производство останавливается или сокращается, отказавшая система ремонтируется, последствия аварий ликвидируются и т.д. Потери могут быть так велики, что возникает сомнение в целесообразности эксплуатации техники из-за ее низкой надежности. Поэтому в пятой главе рассматриваются эти проблемы применительно к техногенному риску как результату отказов техники, и исследованию влияния надежности техники на величину риска.

Учебное пособие предназначено для студентов кафедры Электротехнических комплексов и систем при изучении дисциплины «Эксплуатационная надежность электротехнического оборудования», в ходе освоения которой предполагается формирование следующих компетенций:

общекультурные:

– способность к саморазвитию, самореализации, использованию творческого потенциала (ОК-3);

общепрофессиональные:

– способностью применять современные методы исследования, оценивать и представлять результаты выполненной работы (ОПК-2);

профессиональные:

– способностью планировать и ставить задачи исследования, выбирать методы экспериментальной работы, интерпретировать и представлять результаты научных исследований (ПК-1);

– способность самостоятельно выполнять исследования (ПК-2);

– способность проводить поиск по источникам патентной информации, определять патентную чистоту разрабатываемых объектов техники, подготавливать первичные материалы и патентованию изобретений, регистрации программ для ЭВМ и баз данных (ПК-4).

Таким образом, целью издания является использование студентами приведенных в пособии теоретических положений и практических рекомендаций для углубленного изучения материала дисциплины «Эксплуатационная надежность электротехнического оборудования» во время самостоятельной работы, а также для решения прикладных задач оценки надежности технических различных объектов.

При написании четвертой главы были использованы материалы диссертационного исследования А.В. Попова «Исследование и разработка методов расчета эксплуатационной надежности асинхронных электродвигателей нефтехимического производства».

1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ТЕРМИНЫ ТЕОРИИ НАДЕЖНОСТИ

Надежность – это свойство объекта сохранять во времени в установленных пределах значения всех параметров, характеризующих способность выполнять требуемые функции в заданных режимах и условиях применения, технического обслуживания, хранения и транспортирования [1].

Надежность является комплексным свойством, которое в зависимости от назначения объекта и условий его применения может включать безотказность, долговечность, ремонтопригодность и сохраняемость или определенное сочетание этих свойств.

Безотказность – свойство объекта непрерывно сохранять работоспособное состояние в течении некоторого времени или наработки.

Долговечность – свойство объекта сохранять работоспособное состояние до наступления предельного состояния при установленной системе технического обслуживания и ремонта.

Ремонтопригодность – свойство объекта, заключающееся в приспособленности к поддержанию и восстановлению работоспособного состояния путем технического обслуживания и ремонта.

Сохраняемость – свойство объекта сохранять в заданных пределах значения параметров, характеризующих способности объекта выполнять требуемые функции в течении и после хранения и (или) транспортирования.

Надежность является одним из самых важных параметров техники. Ее показатели необходимы для оценки качества техники, ее эффективности, живучести, риска. Надежность зависит от многих внешних и внутренних факторов и оценивается многими критериями и показателями. Это привело к появлению в теории надежности большого числа различных терминов и определений. Далее приведены некоторые из них, часто применяемые на практике и в теории.

Элемент – объект, обладающий рядом свойств, внутреннее строение которого значения не имеет. В теории надежности под элементом понимают элемент, узел, блок, имеющий показатель надежности, самостоятельно учитываемый при расчете показателя надежности системы. Понятия элемента и системы трансформируются в зависимости от решаемой задачи. Например, полупроводниковое реле при оценке его надежности рассматривается как система, состоящая из элементов – транзисторов, диодов, резисторов и т.п. При оценке надежности системы управления тяговыми двигателями полупроводниковое реле является элементом системы.

Система – совокупность, связанных между собой элементов, обладающая свойством, отличным от свойств отдельных ее элементов.

Структура системы – взаимосвязи и взаиморасположение составных частей системы, ее устройство. Обычно понятие структура связывают с ее графическим отображением. В зависимости от связей между элементами различают следующие виды структур: последовательные, параллельные, с обратной связью, сетевые и иерархические.

Процесс – это набор состояний системы, соответствующий упорядоченному (непрерывному или дискретному) изменению некоторого параметра, определяющего характеристики (свойства) системы. Процесс изменения системы во времени называется динамикой.

Технический объект в процессе функционирования может находиться в различных состояниях, оцениваемых численными показателями. Исправность – состояние объекта, при котором он соответствует всем требованиям, установленным нормативно-технической документацией (НТД). Работоспособность – состояние объекта, при котором он способен выполнять заданные функции, сохраняя значения основных параметров, установленных НТД. Основные параметры характеризуют функционирование объекта при выполнении поставленных задач.

Понятие исправности шире, чем понятие работоспособности. Работоспособный объект обязан удовлетворять лишь тем требованиям НТД, выполнение которых обеспечивает нормальное применение объекта по назначению. Таким образом, если объект неработоспособен, то это свидетельствует о его неисправности. С другой стороны, если объект неисправен, то это не означает, что он неработоспособен.

Предельное состояние – состояние объекта, при котором его применение по назначению недопустимо или нецелесообразно. Для некоторых объектов предельное состояние является последним в его функционировании, т.е. объект снимается с эксплуатации, для других объектов – определенной фазой жизненного цикла, требующей проведения ремонтно-восстановительных работ.

В связи с этим, объекты могут быть [2]:

– *невосстанавливаемые*, для которых работоспособность в случае возникновения отказа не подлежит восстановлению;

– *восстанавливаемые*, работоспособность которых может быть восстановлена, в том числе и путем замены.

В ряде случаев один и тот же объект, в зависимости от особенностей, этапов эксплуатации или назначения, может считаться восстанавливаемым или невосстанавливаемым.

Наработка – продолжительность или объем работы объекта, измеряемые единицами времени, числом циклов, километрами пробега и т.п.

Наработка до отказа – наработка от начала эксплуатации до возникновения первого отказа.

Наработка между отказами – наработка объекта от окончания восстановления его работоспособного состояния после отказа до возникновения следующего отказа.

Время восстановления работоспособного состояния – продолжительность восстановления работоспособного состояния объекта.

Резервированием называют способ повышения надежности путем включения резервных единиц, способных в случае отказа основного устройства выполнять его функции. Этот метод обладает большими возможностями получения заданных уровней надежности и имеет широкое практическое применение.

Резервирование можно разделить на следующие группы:

– *общее* – резервирование системы, при котором параллельно включаются идентичные системы;

– *раздельное* – резервирование системы путем использования отдельных резервных устройств;

– *комбинированное* – резервирование, при котором в одной и той же системе применяются общее и раздельное резервирование.

Главными способами включения резервных устройств при отказах основных являются следующие:

– *постоянное*, при котором резервные объекты соединены с основными в течении всего времени работы;

– *замещением*, при котором резервные объекты замещают основные только после отказа последних.

При этом в обоих случаях резервные объекты находятся в трех режимах работы:

– *нагруженном*, при котором резервные объекты находятся в тех же условиях, что и основные;

– *ненагруженном*, при котором резервные объекты не включены и не могут отказывать;

– *облегченном*, при котором резервные объекты включены, но работают не на полную нагрузку, т.е. их надежность в резервном состоянии выше, чем в рабочем. Однако отказ элементов возможен.

Контрольные вопросы

1. Какие свойства характеризуют надежность?
2. Что называется безотказностью технического объекта?
3. Какие виды резервирования вы знаете?

4. Что вы понимаете под структурой объекта?

2. КРИТЕРИИ И ПОКАЗАТЕЛИ НАДЕЖНОСТИ

Критерием называется признак, по которому оценивается надежность (например, вероятность безотказной работы $P(t)$, интенсивность отказов $\lambda(t)$, средняя наработка на отказ T). Показателем надежности называется численное значение критерия. Например, вероятность безотказной работы в течении 1000 часов равна 0,95, т.е. $P(1000)$ = 0,95. Показатели задаются в технических требованиях на изделие, рассчитываются в процессе проектирования, оцениваются в процессе испытаний и эксплуатации технического объекта.

Надежность является сложным физическим свойством, поэтому не существует одного обобщенного критерия и показателя, который бы достаточно полно характеризовал надежность техники. Только комплекс критериев позволяет оценить надежность сложной технической системы. Выбор критериев зависит от типа технического объекта, его назначения и требуемой полноты оценки надежности.

Между показателями надежности существуют однозначные математические зависимости в виде формул. Поэтому при разработке комплекса показателей надежности нельзя их задавать в виде равенств. Например, нельзя формулировать требования к надежности в таком виде: вероятность безотказной работы в течение 150 часов должна быть равна 0,97, а среднее время безотказной работы T = 650 часов. Такие требования могут оказаться противоречивыми.

2.1. Критерии надежности невосстанавливаемых систем

Отказ элемента является событием случайным, а время ξ до его восстановления – случайной величиной. Основной характеристикой надежности элемента является функция распределения продолжительности его безотказной работы $F(t) = P(\xi < t)$, определенная при $t \geq 0$. На ее основе могут быть получены следующие показатели надежности невосстанавливаемого элемента [3]:

$P(t)$ – вероятность его безотказной работы в течение времени t;

$Q(t) = 1 - P(t)$ – вероятность отказа в течение времени t;

T_1 – среднее время безотказной работы (средняя наработка до отказа);

$f(t)$ – плотность распределения времени безотказной работы;

$\lambda(t)$ – интенсивность отказа в момент времени t;

$\Lambda(t)$ – функция ресурса;

t_γ – гамма-процентный ресурс – наработка, в течение которой элемент не достигает состояния отказа с вероятностью $\frac{\gamma}{100}$.

Вероятность безотказной работы

Вероятность безотказной работы – это вероятность того, что технический объект не откажет в течение времени *t* или что время ξ работы до отказа технического объекта больше времени его функционирования *t*:

$$P(t) = P(\xi > t). \qquad (2.1)$$

Вероятность безотказной работы является убывающей функцией времени, обладающей следующими свойствами:

$$0 \le P(t) \le 1, \quad P(0) = 1, \quad P(+\infty) = 0.$$

По статистическим данным об отказах, полученным из опыта эксплуатации, $P(t)$ определяется следующей статистической оценкой:

$$P^*(t) = \frac{N(t)}{N_0} = \frac{N_0 - n(t)}{N_0}, \qquad (2.2)$$

где N_0 – общее число образцов, находящихся на испытании; $N(t)$ – число исправно работающих образцов в момент времени *t*, $n(t)$ – число отказавших образцов в течение времени *t*. Знак * обозначает статистическую оценку соответствующих показателей надежности.

Вероятность безотказной работы, как критерий надежности, обладает следующими достоинствами:

– характеризует надежность во времени, являясь интервальной оценкой;

– определяет многие важные показатели техники, например эффективность, живучесть, риск;

– сравнительно просто вычисляется и определяется по статистическим данным об отказах техники;

– достаточно полно характеризует надежность невосстанавливаемых объектов.

Основной недостаток этого критерия – ограниченность применения.

Плотность распределения времени безотказной работы (частота отказов)

Плотность распределения времени безотказной работы $f(t)$ – это плотность распределения случайной величины ξ. Она наиболее полно характеризует надежность техники в конкретный момент времени (точечная характеристика). По ней можно определить любой показатель надежности невосстанавливаемой системы.

Статистически $f(t)$ определяется отношением числа отказавших образцов техники в единицу времени к числу испытуемых образцов при условии, что отказавшие образцы не восполняются исправными:

$$f^*(t) = \frac{n(t, t+\Delta t)}{N_0 \Delta t}, \tag{2.3}$$

где $n(t, t+\Delta t)$ – число отказавших образцов за промежуток времени $[t, t+\Delta t]$; N_0 – число образцов, первоначально поставленных на испытания.

Так как $f(t) = Q'(t) = -P'(t)$, то для малых значений Δt имеем

$$f^*(t) = \frac{P(t) - P(t+\Delta t)}{\Delta t}.$$

Пусть $N(t)$ – число исправно работающих образцов к моменту времени t; $N(t+\Delta t)$ – число образцов, исправно работающих к моменту $t+\Delta t$. Поскольку

$$P(t) = \frac{N(t)}{N_0}, \quad P(t+\Delta t) = \frac{N(t+\Delta t)}{N_0},$$

то

$$f^*(t) = \frac{N(t) - N(t+\Delta t)}{N_0 \Delta t},$$

что совпадает с выражением (2.3), так как $N(t) - N(t+\Delta t) = n(t, t+\Delta t)$.

Интенсивность отказов

Интенсивностью отказов называется отношение плотности распределения к вероятности безотказной работы объекта:

$$\lambda(t) = \frac{f(t)}{P(t)}. \tag{2.4}$$

Статистически интенсивность отказов есть отношение числа отказавших образцов техники в единицу времени к среднему числу образцов, исправно работающих на интервале $[t, t+\Delta t]$:

$$\lambda^*(t) = n(t, t+\Delta t) \Big/ N_{\text{ср}} \cdot \Delta t, \qquad (2.5)$$

где $N_{\text{ср}}(t) = \dfrac{[N(t) + N(t+\Delta t)]}{2}$ – среднее число исправно работающих образцов на интервале $[t, t+\Delta t]$. Соотношение (2.5) для малых Δt следует непосредственно из (2.2) и (2.3).

На основе определения интенсивности отказов (2.4) имеет место равенство

$$\lambda(t) = -\frac{P'(t)}{P(t)}. \qquad (2.6)$$

Интегрируя (6), получим

$$\int_0^t \lambda(t)dt = -\ln P(t),$$

или

$$P(t) = e^{-\int_0^t \lambda(t)dt}.$$

Интенсивность отказов $\lambda(t)$ является основным показателем надежности элементов сложных систем. Это объясняется следующими обстоятельствами:

– надежность многих элементов можно оценить одним числом, так как интенсивность отказа элементов – величина постоянная;

– по известной интенсивности $\lambda(t)$ наиболее просто оценить остальные показатели надежности как элементов, так и сложных систем;

– $\lambda(t)$ обладает хорошей наглядностью;

– интенсивность отказов нетрудно получить экспериментально.

Опыт эксплуатации сложных систем показывает, что изменение интенсивности отказов $\lambda(t)$ большого количества объектов описывается U-образной кривой (рис. 2.1).

Время можно условно разделить на три характерных участка:

1. Период приработки.

2. Период нормальной эксплуатации.

3. Период старения объекта.

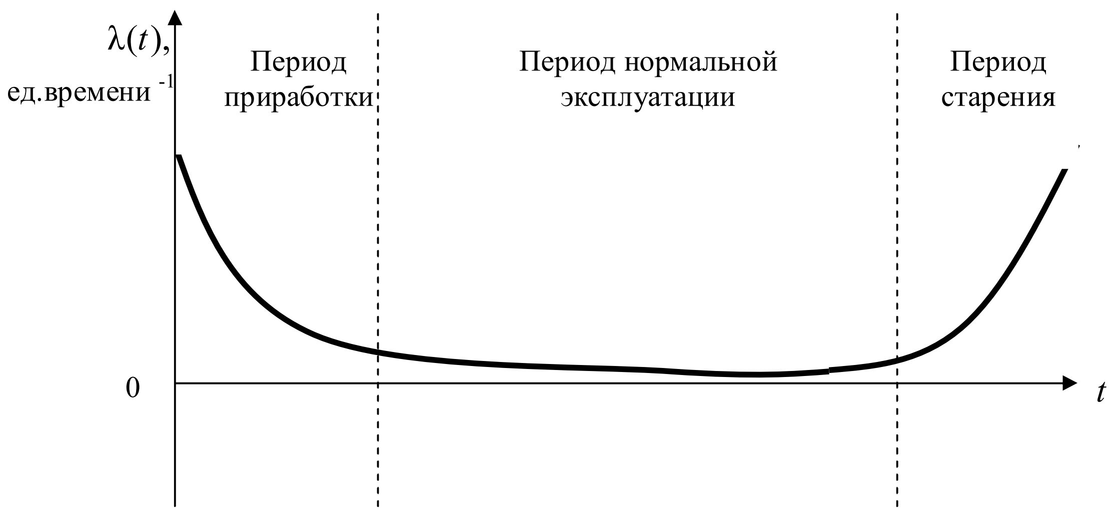


Рис. 2.1. Вид кривой интенсивности отказов

Период приработки объекта имеет повышенную интенсивность отказов, вызванную приработочными отказами, обусловленными дефектами производства, монтажа и наладки. Иногда с окончанием этого периода связывают гарантийное обслуживание объекта, когда устранение отказов производится изготовителем. В период нормальной эксплуатации интенсивность отказов практически остается постоянной, при этом отказы носят случайный характер и появляются внезапно, прежде всего из-за случайных изменений нагрузки, несоблюдения условий эксплуатации, неблагоприятных внешних факторов и т.п. Именно этот период соответствует основному времени эксплуатации объекта. Возрастание интенсивности отказов относится к периоду старения объекта и вызвано увеличением числа отказов из-за износа, старения и других причин, связанных с длительной эксплуатацией [2].

Среднее время безотказной работы

Средним временем безотказной работы T_1 называется математическое ожидание времени безотказной работы технического объекта:

$$T_1 = M(\xi). \tag{2.7}$$

По статистическим данным об отказах T_1 определяется следующей зависимостью:

$$T_1^* = \frac{1}{N_0}\sum_{i=1}^{N_0} t_i , \qquad (2.8)$$

где N_0 – число испытываемых образцов, t_i – время безотказной работы i-го образца.

Как математическое ожидание случайной величины с плотностью $f(t)$, среднее время безотказной работы вычисляется по формуле:

$$T_1 = \int_0^\infty t f(t) dt . \qquad (2.9)$$

Интегрируя (2.9) по частям, получим

$$T_1 = \int_0^\infty t f(t) dt = -\int_0^\infty t P'(t) dt = -tP(t)\Big|_0^\infty + \int_0^\infty P(t) dt .$$

Первое слагаемое равно нулю, поэтому выражение для T_1 будет иметь вид:

$$T_1 = \int_0^\infty P(t) dt . \qquad (2.10)$$

Среднее время безотказной работы является интегральным показателем надежности. Его основное достоинство – высокая наглядность. Недостаток этого показателя в том, что он, будучи интегральным, характеризует надежность техники длительного времени работы.

Между показателями надежности существуют следующие зависимости:

$$P(t) = \overline{F}(t) = 1 - F(t) , \qquad (2.11)$$

$$P(t) = e^{-\int_0^t \lambda(t) dt} = e^{-\Lambda(t)} , \qquad (2.12)$$

$$f(t) = -P'(t) , \qquad (2.13)$$

$$P(t) = \int_t^\infty f(t) dt = \int_0^\infty f(x+t) dx , \qquad (2.14)$$

$$\lambda(t) = \frac{f(t)}{P(t)} , \qquad (2.15)$$

$$T_1 = \int_0^\infty P(t)dt = \int_0^\infty tf(t)dt, \qquad (2.16)$$

$$\Lambda(t) = -\ln P(t) = \int_0^t \lambda(x)dx, \qquad (2.17)$$

$$P(t_\gamma) = \frac{\gamma}{100}. \qquad (2.18)$$

Пример 1. В результате проведения испытаний в течение 800 часов полупроводниковых диодов в количестве $N_0 = 100$ были получены следующие данные об отказах (табл. 2.1).

Таблица 2.1

Исходные данные об отказах

Интервал, час	0–100	100–200	200–300	300–400	400–500	500–600	600–700	700–800
Количество отказавших элементов $n(t, t+\Delta t)$	1	2	1	3	2	2	1	3

Вычислите показатели надежности: $P(t)$, $f(t)$, $\lambda(t)$, T_1.

Решение. Будем иметь в виду, что достоверно неизвестен момент отказа на промежутке времени Δt. Поэтому будем предполагать, что отказы происходят в середине этого промежутка, т.е. в моменты времени $t = 50$, 150, 250, 350 и т.д. На первом интервале произошел один отказ, тогда согласно формуле (2.2) вероятность безотказной работы будет:

$$P(50) = \frac{N_0 - n(100)}{N_0} = \frac{100-1}{100} = 0{,}99.$$

На втором участке произошло 2 отказа, а всего за два периода длины Δt – 3 отказа. Тогда

$$P(150) = \frac{N_0 - n(200)}{N_0} = \frac{100-3}{100} = 0{,}97.$$

Вычисления значений $f(t)$ произведем по формуле (3):

$$f(50)=\frac{n(t,t+\Delta t)}{N_0\Delta t}=\frac{1}{100\times 100}=10^{-4}\,\text{час}^{-1},$$

$$f(150)=\frac{2}{100\cdot 100}=2\cdot 10^{-4}\,\text{час}^{-1}.$$

В данном случае число отказов на промежутке длины Δt не суммируется с числом отказов на предыдущих участках, так как функция $f(t)$ является точечной.

Вычислим значения $\lambda(t)$, воспользовавшись выражением (2.5). На первом участке произошел один отказ, при этом в начале участка число исправных образцов $N(0)=N_0=100$, а в конце участка $N(100)=N_0-1=99$. Тогда

$$\lambda(50)=\frac{n(t,t+\Delta t)}{N_{\text{СР}}\Delta t}=\frac{1}{\frac{100+99}{2}\cdot 100}=1{,}01\cdot 10^{-4}\,\text{час}^{-1}.$$

Аналогично на втором участке

$$\lambda(150)=\frac{2}{\frac{99+97}{2}\cdot 100}=2{,}03\cdot 10^{-4}\,\text{час}^{-1}$$

и т.д.

Вычислим среднее время безотказной работы по формуле (8):

$$T_1=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}t_i=\frac{1\cdot 50+2\cdot 150+1\cdot 250+3\cdot 350+2\cdot 450+2\cdot 550+1\cdot 650+3\cdot 750}{15}=437\ \text{час}.$$

Значения $P(t)$, $f(t)$, $\lambda(t)$, T_1 для остальных временных интервалов представлены в табл. 2.2. В данном случае испытания закончены при отказе 15 из 100 полупроводниковых диодов.

Таблица 2.2

Результаты определения $P(t)$, $f(t)$, $\lambda(t)$

Интервал, час	0 –100	100 –200	200 –300	300 –400	400 –500	500–600	600–700	700 –800
$P(t)$	0,99	0,97	0,96	0,93	0,91	0,89	0,88	0,85

$f(t)\,10^{-4}$, час$^{-1}$	1	2	1	3	2	2	1	3
$\lambda(t)\,10^{-4}$, час$^{-1}$	1,01	2,03	1,04	3,17	2,20	2,22	1,12	3,47

Очевидно, что полученный результат существенно ниже действительного значения среднего времени безотказной работы как математического ожидания случайной величины.

2.2. Критерии надежности восстанавливаемых систем

Показателями надежности восстанавливаемых элементов и систем могут быть также показатели надежности невосстанавливаемых элементов. Это имеет место в тех случаях, когда система, в состав которой входит элемент, является неремонтируемой по условиям ее работы (необитаемый космический аппарат, аппаратура, работающая в агрессивных средах, самолет в процессе полета, отсутствие запчастей для ремонта и т.п.). Надежность восстанавливаемых объектов оценивается следующими показателями [4]:

T – среднее время работы между отказами (средняя наработка на отказ);

$T_{\text{в}}$ – среднее время восстановления;

$\omega(t)$ – параметр потока отказов;

$\text{К}_{\text{г}}(t)$ – функция готовности – вероятность того, что система исправна в момент времени t;

$\text{К}_{\text{п}}(t)$ – функция простоя – вероятность того, что в момент времени t система неисправна и восстанавливается;

$\text{К}_{\text{г}}$ – коэффициент готовности – вероятность того, что система будет исправной при длительной эксплуатации (стационарный режим);

$\text{К}_{\text{п}}$ – коэффициент простоя – вероятность того, что система будет неисправной при длительной эксплуатации.

Рассмотрим подробнее эти показатели.

Среднее время работы между отказами и среднее время восстановления

Среднее время между отказами T определяется отношением средней суммарной наработки к среднему числу отказов при длительной работе объекта. Среднее время восстановления $T_{\text{в}}$ определяется отношением среднего суммарного времени восстановления к среднему числу восстановлений при длительной работе объекта.

По статистическим данным среднее время между отказами вычисляется по формуле:

$$T^{*} = \frac{1}{N_0}\sum_{i=1}^{N_0} t_i \ , \qquad (2.19)$$

где t_i – время между отказами i – го образца, полученное при условии, что испытания ведутся с восстановлением отказавших образцов техники или их заменой. В этом случае число испытываемых образцов N_0 остается постоянным.

Определение среднего времени восстановления будет рассмотрено ниже.

Параметр потока отказов

Параметром потока отказов $\omega(t)$ называется производная (скорость изменения) среднего числа отказов объекта в момент *t*.

Статистически параметр потока отказов определяется как отношение числа отказавших образцов техники в единицу времени к числу образцов, поставленных на испытание при условии, что отказавшие образцы заменяются исправными или отремонтированными:

$$\omega^{*}(t) = \frac{n(t, t+\Delta t)}{N_0 \Delta t}, \qquad (2.20)$$

где $n(t, t+\Delta t)$ – число отказавших образцов за промежуток времени $[t, t+\Delta t]$;

N_0 – число образцов, первоначально поставленных на испытания.

Параметр потока отказов обладает следующими свойствами:

– в случае экспоненциального закона времени работы объекта с параметром λ и мгновенного восстановления $\omega(t) \equiv \lambda$;

– при мгновенном восстановлении предел, к которому стремится параметр потока отказов при $t \to \infty$, равен величине, обратной среднему времени безотказной работы, т.е. $\lim\limits_{t\to\infty} \omega(t) = \frac{1}{T}$;

– при мгновенном восстановлении параметр потока отказов и плотность распределения времени до отказа связаны следующим интегральным уравнением Вольтера второго рода:

$$\omega(t) = f(t) + \int_0^t \omega(\tau) f(t-\tau) d\tau .$$

Это уравнение устанавливает зависимость между показателями надежности восстанавливаемой и невосстанавливаемой техники. Оно позволяет определить по статистическим данным об отказах восстанавливаемой техники в процессе ее эксплуатации показатели надежности невосстанавливаемой техники.

Функция готовности и функция простоя

Функцией готовности $\text{К}_\text{г}(t)$ называется вероятность того, что восстанавливаемая система исправна в момент времени *t*.

Функцией простоя $\text{К}_\text{п}(t)$ называется вероятность того, что в момент времени *t* система находится в отказовом состоянии (в ремонте).

Приведем основные зависимости между введенными показателями:

$$\text{К}_\text{г}(t) + \text{К}_\text{п}(t) = 1, \tag{2.21}$$

$$\text{К}_\text{г} = \frac{T}{T + T_\text{в}}, \quad \text{К}_\text{п} = \frac{T_\text{в}}{T + T_\text{в}}, \tag{2.22}$$

$$\text{К}_\text{г} = \lim_{t \to \infty} \text{К}_\text{г}(t), \quad \text{К}_\text{п} = \lim_{t \to \infty} \text{К}_\text{п}(t).$$

Данные показатели являются наиболее важными для восстанавливаемых элементов и систем.

2.3. Законы распределения времени до отказа

Математический аппарат теории надежности основывается, главным образом, на теоретико-вероятностных методах, поскольку сам процесс появления отказов в технике по своей физической природе носит вероятностный характер.

В частности, для изучения теории надежности прежде всего необходимо знать основные положения теории вероятностей: понятия о случайных событиях и случайных величинах и их характеристиках, законы распределения случайных величин, действия над случайными величинами. При экспериментальном определении численных характеристик надежности необходимо знать правила статистической обработки опытных данных, т.е. владеть основами математической статистики.

Вероятностные методы исследования случайных явлений являются эффективным аппаратом научного изучения случайных процессов в вопросах надежности. Они позволяют не только количественно оценить фактический или ожидаемый уровень надежности, но и облегчают задачу разработки научно обоснованных мероприятий повышения надежности.

В связи с выше изложенным авторы считают необходимым привести наиболее часто используемые в теории надежности параметрические семейства распределений случайной величины ξ, полагая, что читатель имеет определенный уровень подготовки в области математического анализа и математической статистики.

Функция $F(t) = 1 - e^{-\lambda t}$ при $t \geq 0$ задает *экспоненциальное* (показательное) распределение. Экспоненциальным законом распределения можно аппроксимировать время безотказной работы большого числа элементов [5]. В первую очередь, это относится к элементам радиоэлектронной аппаратуры, а также к машинам, эксплуатируемым в период после окончания приработки до существенного проявления постепенных отказов.

Это распределение имеет один параметр $\lambda = \frac{1}{T_1}$, где T_1 – средняя наработка элемента до отказа. Таким образом, параметр λ характеризует число отказов элемента в единицу времени и является интенсивностью отказов. Плотность экспоненциального распределения задается как:

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t}.$$

Функция надежности

$$P(t) = e^{-\lambda t}$$

определяет вероятность безотказной работы за время t (рис. 2.2).

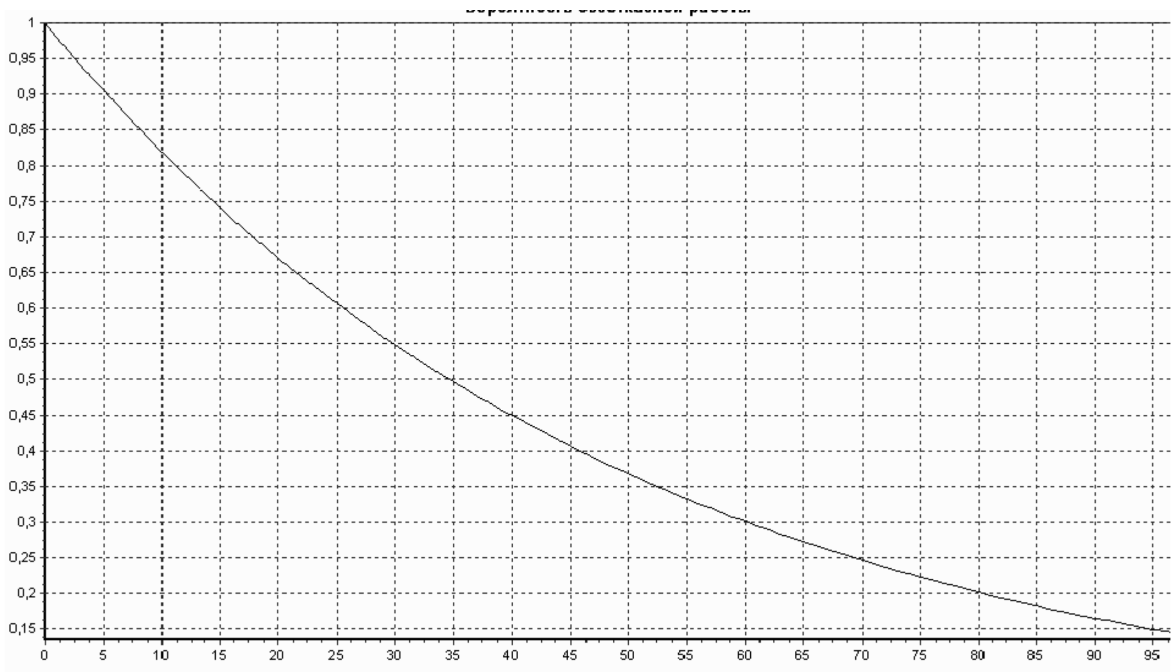


Рис. 2.2. Вероятность безотказной работы при экспоненциальном законе распределения времени до отказа

В данном случае интенсивность отказов есть величина постоянная $\lambda(t) = \lambda = \text{const}$. Функция ресурса для экспоненциального распределения является линейной $\Lambda(t) = \lambda t$. Величина γ-процентного ресурса определяется по формуле

$$t_\gamma = \frac{1}{\lambda} \ln \frac{\gamma}{100}.$$

Экспоненциальное распределение выделяется среди других распределений свойством «отсутствия памяти». Это означает, что объект, проработавший время t, имеет такое же распределение, что и новый, только что начавший работу. Данное свойство как бы исключает износ и старение объекта.

Числовые характеристики экспоненциального распределения выражаются через его параметр: математическое ожидание $M(X) = \dfrac{1}{\lambda}$, дисперсия $D(X) = \dfrac{1}{\lambda^2}$, среднее квадратическое отклонение $\sigma(X) = \dfrac{1}{\lambda}$. На основании формул (2.11) – (2.18) между показателями надежности невосстанавливаемых систем существуют следующие зависимости:

$$P(t) = e^{-\lambda t}, \quad T = \frac{1}{\lambda}, \quad f(t) = \lambda e^{-\lambda t}.$$

Для характеристик постепенных отказов обычно используют другие законы распределения.

Нормальное распределение (распределение Гаусса) определяется плотностью

$$f(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}}, \quad -\infty < t < +\infty$$

и зависит от двух параметров m и σ, которые являются соответственно математическим ожиданием и средним квадратическим отклонением времени безотказной работы элемента. График плотности нормального распределения (кривая Гаусса) изображена на рис. 2.3.

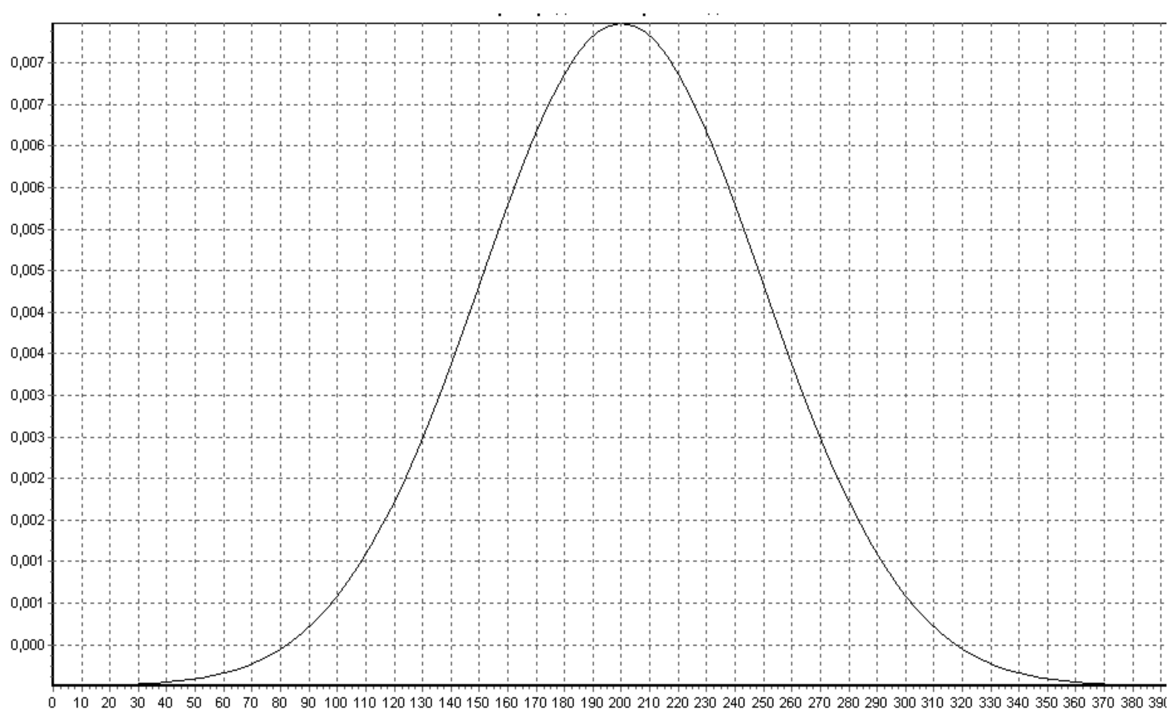


Рис. 2.3. Плотность нормального распределения

Согласно закону больших чисел, распределение всегда подчиняется нормальному закону, если на изменение его случайной величины оказывают влияние многие примерно равнозначные факторы. Нормальному распределению подчиняются ошибки измерений, дальность полета снарядов и т.п. При большом времени работы элемента и наличии восстановления среднее число отказов имеет асимптотически нормальное распределение [6].

Для нормального распределения функция надежности вычисляется по формуле:

$$P(t)=\int_t^{\infty}\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}dx=0{,}5-\Phi_0\left(\frac{t-m}{\sigma}\right),$$

где $\Phi_0(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^t e^{-\frac{x^2}{2}}dx$ – функция Лапласа, значения которой табулированы.

Отметим важное свойство нормального распределения: сумма независимых случайных величин, имеющих нормальное распределение, также распределена по нормальному закону. При этом параметры суммы выражаются через параметры слагаемых, а именно: математическое ожидание суммы равно сумме математических ожиданий, дисперсия суммы равна сумме дисперсий.

Усеченное нормальное распределение получается из нормального при ограничении интервала изменения случайной величины на промежуток $[0,+\infty)$. Плотность распределения определяется также, как для нормального распределения, но с коэффициентом пропорциональности c:

$$f(t)=\frac{c}{\sigma_0\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(t-m_0)^2}{2\sigma_0^2}}.$$

Усеченное нормальное распределение зависит от двух параметров m_0 и σ_0, где m_0 – значение случайной величины, соответствующее максимальному значению $f(t)$ и называется модой. Коэффициент c определяется из условия нормировки:

$$\int_0^\infty f(t)dt=1$$

откуда

$$c=\frac{1}{0{,}5+\Phi_0\left(\frac{m_0}{\sigma_0}\right)}.$$

Математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение усеченного нормального распределения определяются через параметры m_0 и σ_0 по формулам:

$$m=m_0+k\sigma_0,\quad \sigma=\sigma_0\sqrt{1+k\frac{m_0}{\sigma_0}-k^2},$$

где $k=\frac{c}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{m_0^2}{2\sigma_0^2}}$.

В *логарифмически нормальном* распределении логарифм случайной величины подчиняется нормальному закону с плотностью:

$$f(t)=\frac{1}{st\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(\ln t-\mu)^2}{2s^2}},$$

где μ и s – параметры распределения. Математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение определяются в соответствии с формулами

$$m = \sqrt{e^{2\mu + s^2}}, \; \sigma = \sqrt{e^{2\mu + s^2}\left(e^{s^2} - 1\right)}.$$

Логарифмически нормальное распределение применяют, например, для описания наработки подшипников качения. Оно удобно для описания случайных величин, представляющих собой произведение достаточно большого числа случайных величин, подобно тому, как нормальное распределение описывает сумму большого числа случайных величин.

Распределение *Вейбулла* является достаточно универсальным, благодаря возможности варьирования двух его параметров. Оно характеризуется плотностью распределения вероятностей:

$$f(t) = \frac{\alpha t^{\alpha - 1}}{\beta^{\alpha}} e^{-\left(\frac{t}{\beta}\right)^{\alpha}}$$

с параметром формы α и параметром масштаба β. Математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение выражаются через эти параметры следующим образом:

$$m = \beta\Gamma\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right), \; \sigma = \beta\sqrt{\Gamma\left(1 + \frac{2}{\alpha}\right) - \Gamma^2\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right)},$$

где $\Gamma(t) = \int_0^{+\infty} x^{t-1} e^{-x} dx$ – гамма-функция. Универсальность распределения Вейбулла объясняется следующим: при $\alpha = 1$ распределение превращается в экспоненциальное; при $\alpha < 1$ функция плотности и интенсивности отказов убывающие; при $\alpha > 1$ интенсивность отказов возрастающая; при $\alpha = 2$ функция $\lambda(t)$ линейная и распределение Вейбулла превращается в распределение Рэлея с плотностью:

$$f(t) = 2\lambda t e^{-\lambda t^2},$$

при $\alpha = 3{,}3$ распределение Вейбулла близко к нормальному. Наряду с логарифмически нормальным распределением, оно хорошо описывает наработку деталей по усталостным разрушениям, наработку до отказа подшипников, а также используется для оценки надежности деталей и узлов машин, в частности автомобилей, подъемно-транспортных и других машин [7].

Зависимости между показателями надежности в случае распределения Вейбулла имеют вид:

$$P(t)=e^{-\left(\frac{t}{\beta}\right)^{\alpha}},\ \lambda=\frac{\alpha}{\beta^{\alpha}}t^{\alpha-1},\ T_1=\beta\Gamma\left(1+\frac{1}{\alpha}\right).$$

На рис. 2.4. представлен график интенсивности отказов для параметров распределения Вейбулла: $\alpha=3$ и $\beta=200$ час.

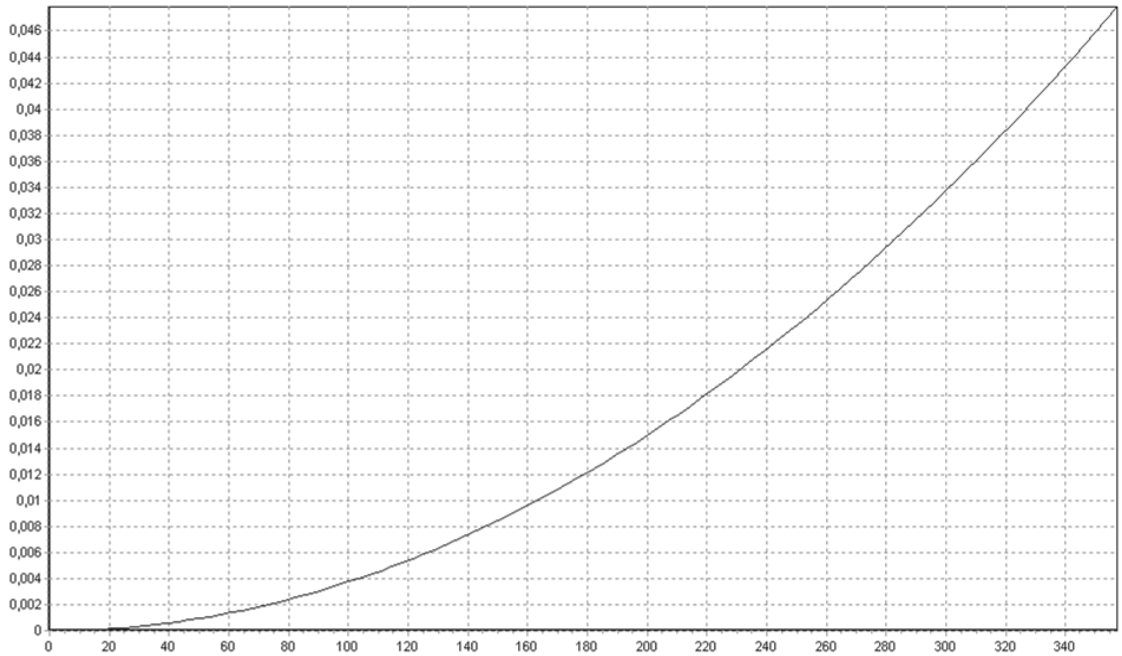


Рис. 2.4. Интенсивность отказов для распределения Вейбулла

Гамма-распределение имеет плотность

$$f(t)=\frac{t^{\alpha-1}}{\beta^{\alpha}\Gamma(\alpha)}e^{-\frac{t}{\beta}}$$

с параметрами α и β. Математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение связаны с этими параметрами соотношениями:

$$m=\alpha\beta,\ \sigma=\sqrt{\alpha}\beta.$$

Вероятность безотказной работы элемента, имеющего гамма-распределение, выражается через интеграл

$$P(t)=\int_{t}^{\infty}\frac{x^{\alpha-1}}{\beta^{\alpha}\Gamma(\alpha)}e^{-\frac{x}{\beta}}dx.$$

Параметр α, характеризующий асимметрию гамма-распределения, определяет вид характеристик надежности. При $\alpha > 1$ интенсивность отказа возрастает, при $\alpha < 1$ убывает, а при $\alpha = 1$ становится постоянной, т.е. гамма-распределение превращается в экспоненциальное.

При целом α гамма-распределение называется распределением *Эрланга* порядка α. Сумма α случайных величин, имеющих экспоненциальное распределение с параметром λ, имеет распределение Эрланга с параметрами α и $\beta = \frac{1}{\lambda}$. Вероятность безотказной работы элемента, имеющего распределение Эрланга, равна

$$P(t) = \sum_{i=0}^{\alpha-1} \frac{t^i}{i!\beta^i} e^{-\frac{t}{\beta}}.$$

Зависимости между показателями надежности в случае гамма-распределения имеют вид:

$$P(t) = e^{-\frac{t}{\beta}} \sum_{i=0}^{\alpha-1} \frac{t^i}{\beta^i i!}, \quad T = \alpha\beta, \quad \lambda = \frac{t^{\alpha-1}}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha) \sum_{i=0}^{\alpha-1} \frac{t^i}{\beta^i i!}}.$$

Смесь распределений определяется как линейная комбинация других распределений, например распределение с плотностью

$$f(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i \lambda_i e^{-\lambda_i t},$$

где $\sum_{i=1}^{n} c_i = 1$, образует смесь n экспоненциальных распределений. Такое распределение называется гиперэкспоненциальным.

Смесь гамма-распределений

$$f(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i \frac{t^{\alpha_i - 1}}{\beta_i^{\alpha_i} \Gamma(\alpha_i)} e^{-\frac{t}{\beta_i}}$$

при условии $\sum_{i=1}^{n} c_i = 1$ образует плотность обобщенного гамма-распределения и т.п.

Пример 2.1. Нерезервированная система состоит из 5 элементов, имеющих различные законы распределения времени до отказа. Виды законов распределений и их параметры приведены в табл. 2.3.

Таблица 2.3

Законы распределения времени до отказа

Номер элемента	1	2	3	4	5
Закон распределения времени до отказа	W(2;1800)	Г(7;300)	$R(8\times10^{-8})$	Exp(0.002)	TN(2000;90)

Примечание. *В табл. 3 приняты следующие обозначения законов распределения: W – Вейбулла, Г – гамма, R – Рэлея, Exp – экспоненциальный, TN – усеченный нормальный, N – нормальный. В скобках указаны параметры распределений.*

Определите показатели надежности каждого элемента: вероятность безотказной работы, среднее время безотказной работы, интенсивность отказа, плотность распределения времени безотказной работы. Для показателей, зависящих от времени, получите решение в виде графиков.

Решение. Вычислим начальные моменты распределений: математические ожидания и средние квадратические отклонения, воспользовавшись формулами, приведенными в табл. 2.4 [3].

Таблица 2.4

Связь параметров распределений с первыми двумя моментами

Распределение	m	σ
Экспоненциальное $Exp(\lambda)$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda}$
Равномерное $U(a,b), a \ge 0$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{b-a}{2\sqrt{3}}$
Гамма $\Gamma(\alpha,\beta)$	$\alpha\beta$	$\sqrt{\alpha}\beta$
Усеченное нормальное $TN(m_0,\sigma_0)$	$m_0 + k\sigma_0$	$\sigma_0\sqrt{1+k\frac{m_0}{\sigma_0}-k^2}$, $k=\frac{c}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{m_0^2}{2\sigma_0^2}}$, $c=\frac{1}{0.5+\Phi_0\left(\frac{m_0}{\sigma_0}\right)}$

Рэлея $R(\lambda)$	$\sqrt{\frac{\pi}{4\lambda}}$	$\sqrt{\frac{4-\pi}{4\lambda}}$
Вейбулла $W(\alpha,\beta)$	$\beta\Gamma(1+1/\alpha)$	$\beta\sqrt{\Gamma(1+2/\alpha)-\Gamma^2(1+1/\alpha)}$
Нормальное $N(m,\sigma)$ $m>3\sigma$	m	σ

Примечание. *В таблице введены обозначения:* $\Phi_0(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^t e^{-\frac{x^2}{2}}dx$ *– функция Лапласа;* $\Gamma(\alpha)=\int\limits_0^\infty x^{\alpha-1}e^{-x}dx$ *– гамма-функция. Вычисление значений этих функций наиболее простым способом является обращение к системе Microsoft Excel.*

Определим математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение времени до отказа элементов.

Элемент 1

$$m=1800\cdot\Gamma(1{,}5)=1595 \text{ час}, \quad \sigma=1800\sqrt{\Gamma(2)-\Gamma^2(1{,}5)}=571{,}564 \text{ час}.$$

Элемент 2

$$m=7\cdot300=2100 \text{ час}, \quad \sigma=\sqrt{7}\cdot300=793{,}725 \text{ час}.$$

Элемент 3

$$m=\sqrt{\frac{\pi}{4\cdot8\cdot10^{-8}}}=3133 \text{час}, \quad \sigma=\sqrt{\frac{4-\pi}{4\cdot8\cdot10^{-8}}}=1638 \text{ час}.$$

Элемент 4

$$m=\frac{1}{0{,}0002}=5000 \text{ час}, \quad \sigma=m=5000 \text{ час}.$$

Элемент 5

$$k=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\left(0{,}5+\Phi_0\left(\frac{2000}{900}\right)\right)}e^{-\frac{2000^2}{2\cdot900^2}}=0{,}0342,$$

$$m=2000+0{,}0342\cdot900=2031 \text{ час},$$

$$\sigma=900\sqrt{1+0{,}0342\frac{2000}{900}-0{,}0342^2}=933{,}088 \text{ час}.$$

Решение поставленной задачи с использованием пакета программ в среде Mathcad представлено на рис. 2.5. [8]. Необходимо отметить, что в математической среде Mathcad существуют стандартные функции для определения математического ожидания и среднего квадратического отклонения (mean (A) и stdev(A)). В том случае, если бы были заданы не параметры различных распределений, а время до отказа представляло бы собой выборку эмпирических данных о надежности элементов, можно было бы использовать эти функции, не прибегая к необходимости ввода аналитических зависимостей. Помимо вышеназванных функций Mathcad содержит следующие полезные функции оценки параметров выборки данных:

var(A) – возвращает дисперсию элементов массива A;

Var(A) – возвращает несмещенную дисперсию элементов массива A;

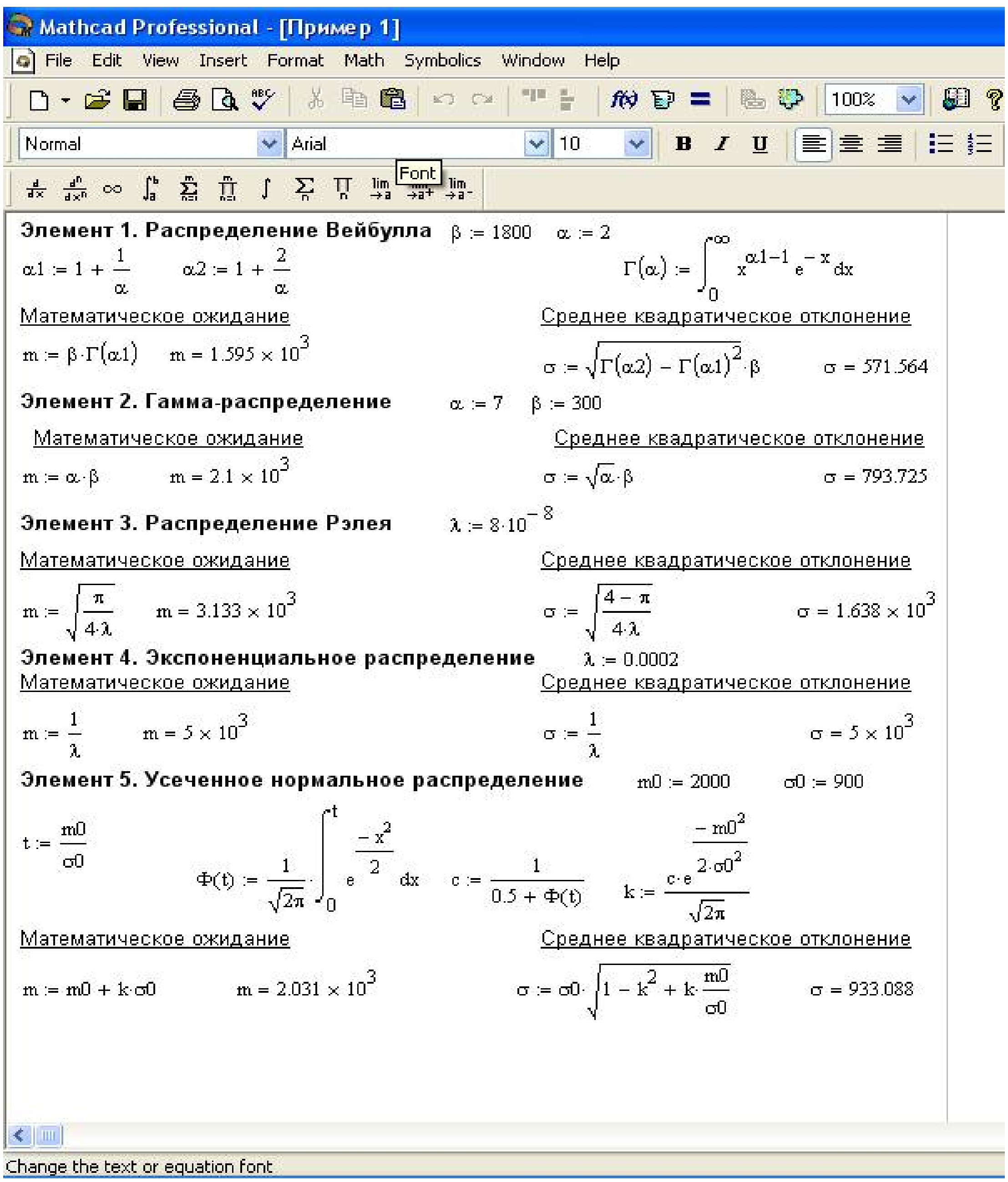


Рис. 2.5. Решение примера № 1 в среде Mathcad

Stdev(A) – возвращает несмещенное среднее кадратическое отклонение элементов массива A;

median(A) – возвращает медиану массива A;

mode(A) – возвращает моду массива A;

skew(A) – возвращает ассиметрию массива A и т.д.

Вычисление вероятности безотказной работы и плотности распределения времени до отказа элементов произведем в соответствии с аналитическими выражениями представленными в табл. 2.5. [2]

Равномерное и нормальное распределения имеют ограничения на параметры для того, чтобы их можно было использовать для решения задач надежности в неотрицательной временной области.

Таблица 2.5

Вероятность безотказной работы и плотность распределения времени до отказа

Распределение	$f(t)$	$P(t)$
Экспоненциальное $Exp(\lambda)$	$\lambda e^{-\lambda t}$	$e^{-\lambda t}$
Равномерное $U(a,b), a \geq 0$	$\begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, a \leq t \leq b; \\ 0, \quad t < a, t > b \end{cases}$	$\begin{cases} 1, t < a; \\ \dfrac{b-t}{b-a}, a \leq t \leq b; \\ 0, t > b \end{cases}$
Гамма $\Gamma(\alpha,\beta)$	$\dfrac{t^{\alpha-1}}{\beta^{\alpha}\Gamma(\alpha)} e^{-\frac{t}{\beta}}$	$1 - I\left(\alpha, \dfrac{t}{\beta}\right)$
Усеченное нормальное $TN(m_0, \sigma_0)$, $m \geq 1.33\sigma$	$\dfrac{C}{\sigma_0\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(t-m_0)^2}{2\sigma_0^2}}$, $C = \dfrac{1}{0.5} + \Phi_0\left(\dfrac{m_0}{\sigma_0}\right)$	$C\left(0{,}5 - \Phi_0\left(\dfrac{t-m_0}{\sigma_0}\right)\right)$
Рэлея $R(\lambda)$	$2\lambda t e^{-\lambda t^2}$	$e^{-\lambda t^2}$
Вейбулла $W(\alpha,\beta)$	$\dfrac{\alpha t^{\alpha-1}}{\beta^{\alpha}} e^{-\left(\frac{t}{\beta}\right)^{\alpha}}$	$e^{-\left(\frac{t}{\beta}\right)^{\alpha}}$
Нормальное $N(m,\sigma)$ $m > 3\sigma$	$\dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}}$	$0.5 - \Phi_0\left(\dfrac{t-m}{\sigma}\right)$

Примечание. *В гамма-распределении* $I(\alpha,t) = \dfrac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t x^{\alpha-1}e^{-x}dx$ *есть неполная гамма-функция.*

Равномерное и нормальное распределения имеют ограничения на параметры для того, чтобы их можно было использовать для решения задач надежности в неотрицательной временной области.

Элемент 1

$$P_1(t) = e^{-\left(\frac{t}{1800}\right)^2}, \; f_1(t) = \frac{2t}{1800^2} e^{-\left(\frac{t}{1800}\right)^2}.$$

Элемент 2

$$P_2(t) = 1 - I\left(7, \frac{t}{300}\right), \; f_2(t) = \frac{t^6}{300^7\,\Gamma(7)} e^{-\frac{t}{300}}.$$

Элемент 3

$$P_3(t) = e^{-8\cdot 10^{-8} t^2}, \; f_3(t) = 2\cdot 8\cdot 10^{-8} t e^{-8\cdot 10^{-8} t^2}.$$

Элемент 4

$$P_4(t) = e^{-0.0002t}, \; f_4(t) = 0.0002 e^{-0.0002t}.$$

Элемент 5

$$P_5(t) = \frac{c}{\sigma_0\sqrt{2\pi}} \int_t^{\infty} e^{-\frac{(x-m_0)^2}{2\sigma_0^2}} dx = \frac{0.5 - \Phi_0\left(\frac{t-m_0}{\sigma_0}\right)}{0.5 + \Phi_0\left(\frac{m_0}{\sigma_0}\right)} = \frac{0.5 - \Phi_0\left(\frac{t-2000}{900}\right)}{0.5 + \Phi_0\left(\frac{2000}{900}\right)}.$$

$$f_5(t) = \frac{1}{900\sqrt{2\pi}\left(0.5 + \Phi_0\left(\frac{2000}{900}\right)\right)} e^{-\frac{(t-2000)^2}{2\cdot 900^2}}.$$

Порядок определения вероятности безотказной работы и плотности распределения с использованием пакета программ представлены на рис. 2.6. Необходимо отметить, что в Mathcad имеются встроенные функции для оценки 17 видов распределений случайных величин [8]. Эти функции рассчитывают плотность вероятности, функцию распределения, квантиль вероятности, генерируют вектор случайных чисел, распределенных по любому из 17 видов распределений. Несмотря на это, решение данного примера показано с использованием формульного описания величин, а не операторов, позволяющих сразу получить искомый результат.

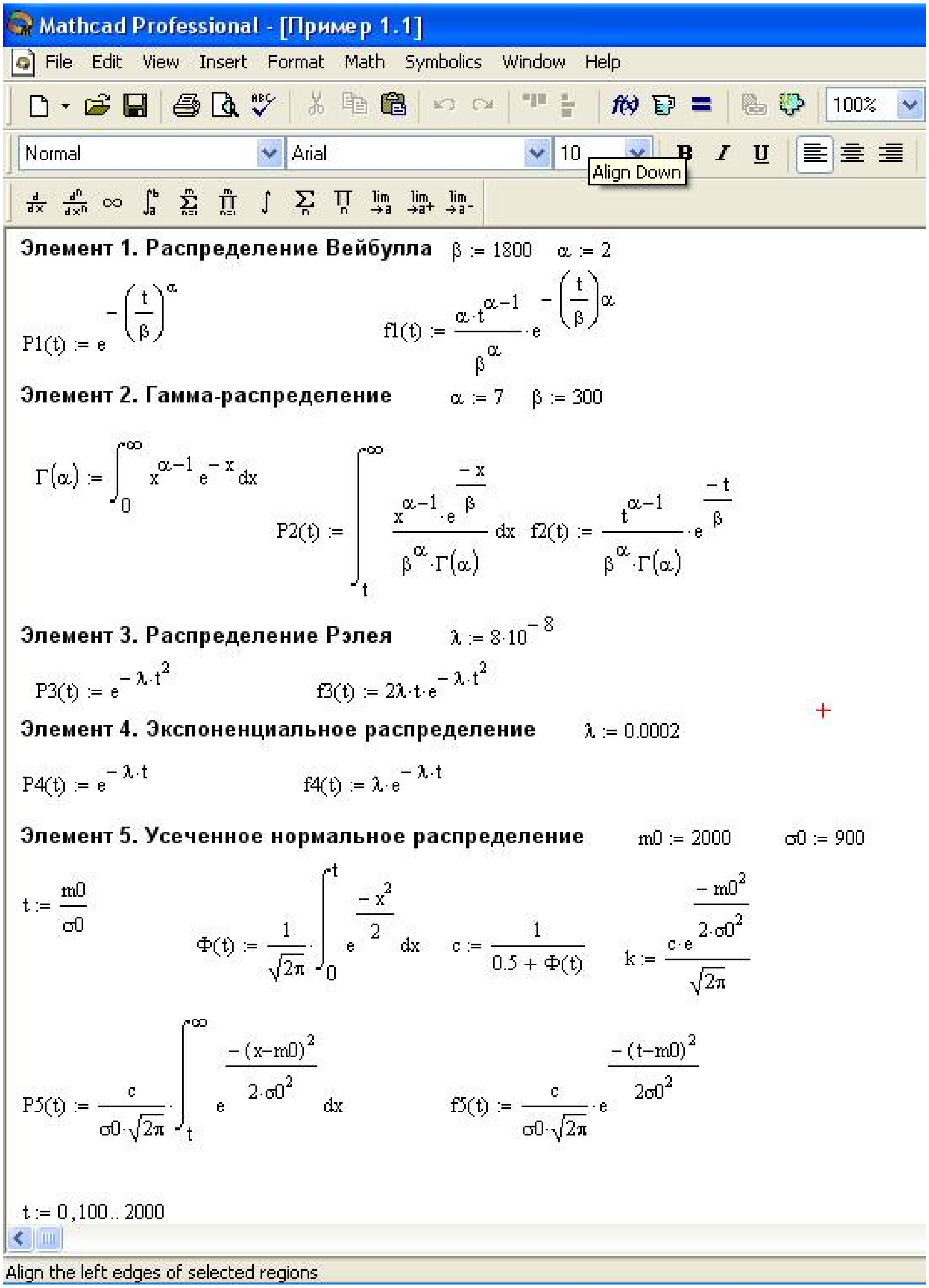


Рис. 2.6. Вычисление вероятности безотказной работы и плотности распределения

Табулируя эти функции от 0 до 2000 часов с шагом 100 часов, получим графическое изображение вероятностей безотказной работы и их плотностей распределения представленных на рис. 2.7. Номера графиков соответствуют номерам элементов.

Из графиков видно различное поведение вероятностей безотказной работы элементов. Скорость убывания вероятностей зависит от вида и параметров закона распределения. В нашем случае медленнее всего убывает $P(t)$ для экспоненциального распределения и распределения Рэлея, т.е. при большом времени работы наиболее надежными оказываются третий и четвертый элементы системы.

Вероятность безотказной работы всей системы в данном случае можно вычислить как произведение вероятностей безотказной работы ее элементов

$$P_C(t) = P_1(t)P_2(t)P_3(t)P_4(t)P_5(t).$$

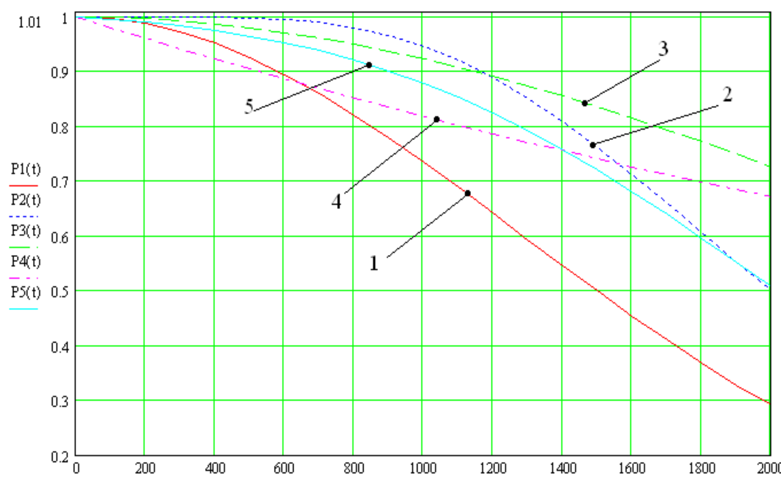
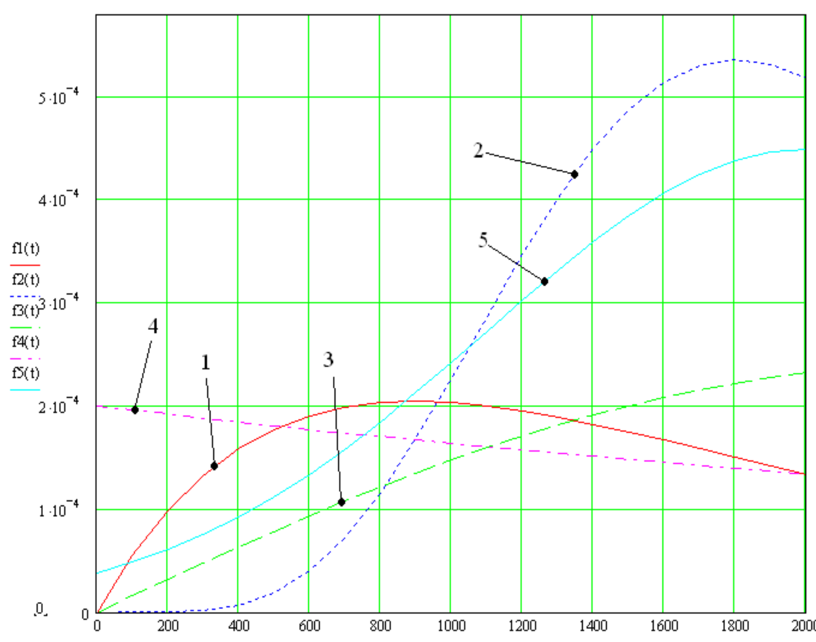


График изменения вероятности безотказной работы в течение $t = 2000$ часов



Плотность распределения элементов в течение $t = 2000$ часов

Рис. 2.7. Вероятности безотказной работы и плотности распределений элементов

На рис. 2.8 представлены результаты определения вероятности безотказной работы всей системы.

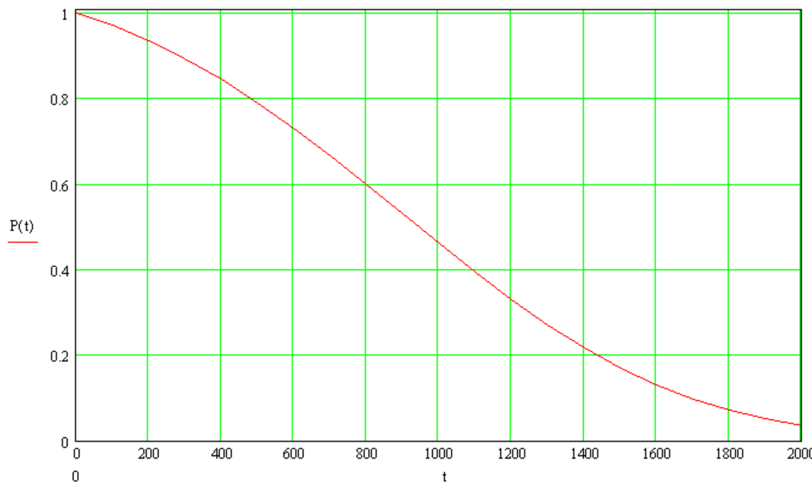


Рис. 2.8. Вероятность безотказной работы системы в течение t = 2000 часов

Контрольные вопросы

1. Какие законы распределения случайных величин вы знаете?
2. Какими параметрами характеризуется нормальный закон?
3. Что такое плотность распределения?
4. Что характеризует интенсивность отказов технического объекта?
5. По какой формуле рассчитывается вероятность безотказной работы гамма-распределения?

3. АНАЛИЗ НАДЕЖНОСТИ НЕВОССТАНАВЛИВАЕМЫХ СИСТЕМ

3.1. Надежность нерезервированной невосстанавливаемой системы

Структурная схема (схема расчета надежности) нерезервированной системы, состоящей из n элементов, приведена на рис. 3.1.

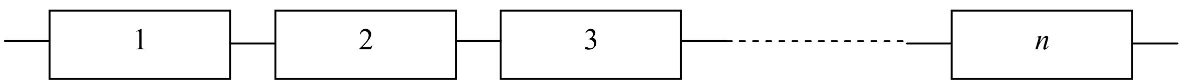


Рис. 3.1. Структурная схема нерезервированной системы

Такое соединение в теории надежности называется основным. В данном случае отказ системы происходит при отказе элемента с минимальным временем исправной работы, т.е.

$$X_C = \min(X_1, X_2, ..., X_n),$$

где X_C – время работы системы; X_i – времена до отказов элементов системы. При этом остальные элементы прекращают работу.

По теореме умножения вероятностей получим:

$$P(X_C > t) = P(\min(X_1, X_2, ..., X_n) > t =$$
$$= P(X_1 > t, X_2 > t, ..., X_n > t) = \prod_{j=1}^{n} P(X_j > t),$$

где t – время функционирования системы.

Отсюда следует, что вероятность безотказной работы системы равна произведению вероятностей безотказной работы ее элементов:

$$P_C(t) = \prod_{j=1}^{n} P_j(t). \tag{3.1}$$

Так как $f(t) = -P'(t)$, то

$$f_C(t) = \sum_{j=1}^{n} P_1(t) ... f_j(t) ... P_n(t).$$

Среднее время безотказной работы, являясь математическим ожиданием времени до отказа системы, вычисляется по формуле:

$$T_1 = \int_0^\infty t f_C(t) dt$$

или

$$T_1 = \int_0^\infty P_C(t) dt. \tag{3.2}$$

Определим интенсивность отказов системы $\lambda_C(t)$. По определению, интенсивность отказов

$$\lambda_C(t) = \frac{f_C(t)}{P_C(t)} = \frac{\sum\limits_{j=1}^{n} P_1(t) \ldots f_C(t) \ldots P_n(t)}{\prod\limits_{j=1}^{n} P_j(t)} = \sum_{j=1}^{n} \frac{f_j(t)}{P_j(t)},$$

поэтому

$$\lambda_C(t) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j(t). \tag{3.3}$$

Таким образом, интенсивность отказов системы с основным соединением элементов равна сумме интенсивностей отказов ее элементов, независимо от их законов распределения времени до отказа [4].

Если элементы имеют одинаковую надежность, то $\dfrac{\lambda_C(t)}{\lambda(t)} = n$. Последнее означает, что интенсивность отказов системы, состоящей из равнонадежных элементов, в n раз превышает интенсивность отказов элемента.

Получим формулы показателей надежности системы для случая постоянных интенсивностей отказов элементов. В данном случае $\lambda_j(t) = \lambda_j = \text{const}, \quad j = 1, \; 2, \; \ldots, \; n$.

Тогда

$$P_C(t) = \prod_{j=1}^{n} P_j(t) = \prod_{j=1}^{n} e^{-\lambda_j t} = e^{-t \sum\limits_{j=1}^{n} \lambda_j},$$

т.е.

$$P_C(t) = e^{-\lambda_C t}, \tag{3.4}$$

где $\lambda_C = \sum\limits_{j=1}^{n} \lambda_j$.

Среднее время безотказной работы

$$T_1 = \int\limits_0^\infty P_C(t)dt = \int\limits_0^\infty e^{-\lambda_C t}dt,$$

т.е.

$$T_1 = \frac{1}{\lambda_C}. \qquad (3.5)$$

3.2. Надежность резервированной невосстанавливаемой системы

Основным способом повышения надежности и снижения техногенного риска является *структурное резервирование*, которое реализуется путем введения в систему дополнительных элементов, узлов, блоков.

Рассмотрим систему с постоянно включенным резервом и с резервом замещением.

Постоянно включенный резерв

Структурная схема системы с постоянно включенным резервом представлена на рис. 3.2.

Элемент с номером 0 является основным, а элементы с номерами 1, 2, …, m – резервными. Общее число элементов в системе $n = m + 1$, где m – кратность резервирования – отношение числа резервных элементов к числу основных.

В данном случае отказ системы наступает при отказе элемента с максимальным временем работы, т.е.

$$X_C = \max(X_0, X_1, ..., X_m).$$

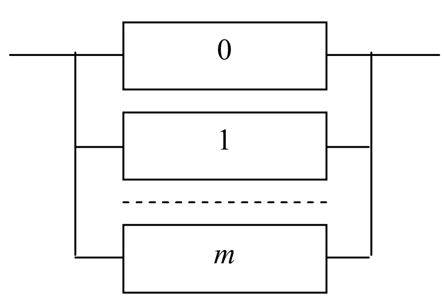


Рис. 3.2. Резервированная система с постоянно включенным резервом

По теореме умножения вероятностей имеем:

$$P(X_C \le t) = P(\max(X_0, X_1, ..., X_m) \le t) =$$
$$P(X_0 \le t, X_1 \le t, ..., X_m \le t) = \prod_{i=0}^{m} P(X_i \le t).$$

Отсюда следует, что вероятность отказа системы равна произведению вероятностей отказов ее элементов:

$$Q_C(t) = \prod_{i=0}^{m} Q_i(t)$$

или

$$P_C(t) = 1 - \prod_{i=0}^{m} (1 - P_i(t)). \tag{3.6}$$

На практике наиболее часто имеют место случаи, когда основная система и все резервные одинаковы и имеют вероятность безотказной работы $P(t)$.

Тогда

$$P_C(t) = 1 - (1 - P(t))^n. \tag{3.7}$$

Так как $f(t) = Q'(t)$, то

$$f_C(t) = \sum_{i=0}^{m} Q_0(t) ... f_i(t) ... Q_m(t),$$

тогда

$$f_C(t) = \sum_{i=0}^{m} (1 - P_0(t)) ... f_i(t) ... (1 - P_m(t)).$$

Определим интенсивность отказов $\lambda_C(t)$ резервированной системы с постоянно включенным резервом. По определению интенсивности отказов имеем:

$$\lambda_C(t) = \frac{f_C(t)}{P_C(t)} = \frac{\sum\limits_{i=0}^{m} Q_0(t)...f_i(t)...Q_m(t)}{1 - \prod\limits_{i=0}^{m} Q_i(t)} = \frac{\sum\limits_{j=0}^{m} f_j(t) \prod\limits_{i \neq j}^{m} Q_i(t)}{1 - \prod\limits_{i=0}^{m} Q_i(t)}.$$

Получим расчетные формулы для случая равнонадежных систем и постоянной интенсивности отказов элементов $\lambda_0 = \lambda_1 = ... = \lambda_m = \lambda$. В этом случае вероятность безотказной работы системы определяется по формуле:

$$P_C(t) = 1 - (1 - P(t))^{m+1} = 1 - \left(1 - e^{-\lambda t}\right)^{m+1}. \tag{3.8}$$

Выражение для интенсивности отказов системы легко получить из соотношения:

$$\lambda_C(t) = -\frac{P'_C(t)}{P_C(t)}.$$

Подставляя в это соотношение $P_C(t)$ из (3.8) и его производную $P'_C(t)$, получим:

$$\lambda_C(t) = \frac{(m+1)\lambda e^{-\lambda t}\left(1 - e^{-\lambda t}\right)^m}{1 - \left(1 - e^{-\lambda t}\right)^{m+1}}. \tag{3.9}$$

Из выражения (3.9) видно, что $\lambda_C(0) = 0$ и с ростом t увеличивается. Предельное значение равно $\lim\limits_{t \to \infty} \lambda_C(t) = \lambda$.

С учетом (3.8) выражение для среднего времени безотказной работы системы примет вид

$$T_1 = \int\limits_0^{\infty} P_C(t)dt = \int\limits_0^{\infty} \left(1 - \left(1 - e^{-\lambda t}\right)^{m+1}\right)dt.$$

В [1] с учетом вычисления вспомогательного интеграла была получена следующая зависимость:

$$T_1 = \frac{1}{\lambda} \sum_{k=1}^{m+1} \frac{1}{k}.$$

Так как среднее время безотказной работы нерезервированной системы $T_0 = \frac{1}{\lambda}$, то

$$T_1 = T_0 \sum_{k=1}^{m+1} \frac{1}{k}.$$

Из формулы видно, что с ростом кратности резервирования среднее время безотказной работы системы растет медленно.

В частности, для экспоненциальных распределений времени до отказа элементов с одинаковыми параметрами λ имеют место равенства [9]:

$$P_C(t) = 1 - \left(1 - e^{-\lambda t}\right)^{m+1}, \tag{3.10}$$

$$f_C(t) = (m+1)\lambda e^{-\lambda t}\left(1 - e^{-\lambda t}\right)^{m}, \tag{3.11}$$

$$\lambda_C(t) = \frac{(m+1)\lambda e^{-\lambda t}\left(1 - e^{-\lambda t}\right)^{m}}{1 - \left(1 - e^{-\lambda t}\right)^{m+1}}. \tag{3.12}$$

Формулы справедливы для случая, когда нерезервированная система рассматривается как один элемент, показатели надежности которого известны. В действительности любая система состоит из большого числа элементов, каждый из которых имеет показатель надежности, самостоятельно учитываемый при расчете [3, 4]. В таком случае формула для вероятности безотказной работы имеет вид:

$$P_C(t) = 1 - \prod_{i=0}^{m} \left(1 - \prod_{j=1}^{n} P_{ij}(t)\right), \tag{3.13}$$

где n – число элементов нерезервированной системы; $P_{ij}(t)$ – вероятность безотказной работы элемента с номером (i,j).

Пример 3.1. Дана резервированная система с постоянным резервом кратности $m=2$. Элементы системы имеют постоянную интенсивность отказа $\lambda = 0{,}05$ час$^{-1}$. Найдите показатели надежности всей системы.

Решение. В соответствии с формулами получим (3.10) – (3.12) получим

$$P_C(t) = 1 - \left(1 - e^{-0,05t}\right)^3,$$

$$f_C(t) = 3 \cdot 0{,}05 e^{-0,05t}\left(1 - e^{-0,05t}\right)^2,$$

$$\lambda_C(t) = \frac{0.15 e^{-0,05t}\left(1 - e^{-0,05t}\right)^2}{1 - \left(1 - e^{-0,05t}\right)^3} = \frac{0{,}15\left(1 - e^{-0,05t}\right)^2}{3 - 3e^{-0,05t} + e^{-0,1t}}.$$

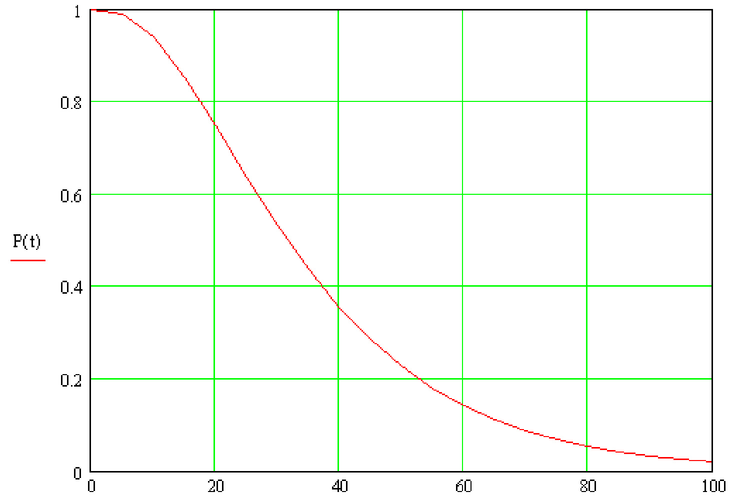
Результаты определения показателей надежности системы на интервале времени от 0 до 100 часов с шагом 5 часов сведены в таблицу 3.1.

Таблица 3.1.

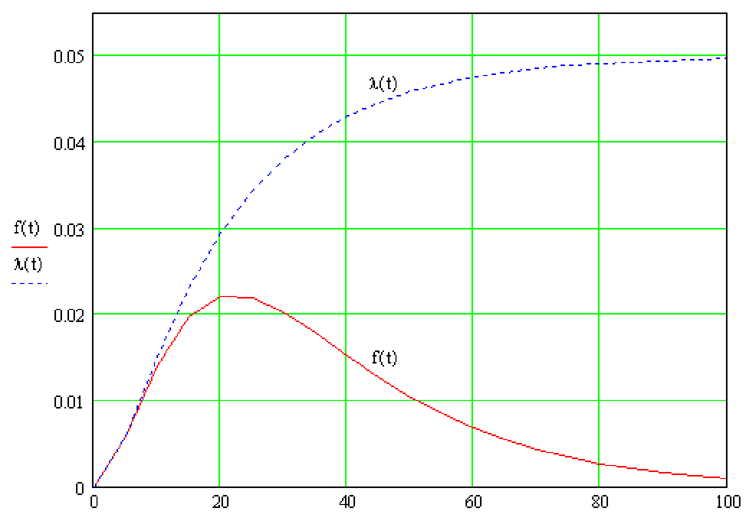
Показатели надежности резервированной системы
с постоянно включенным резервом и кратностью *m=2*

t, час	$P_C(t)$	$f_C(t)$	$\lambda_C(t)$
0	1	0	0
5	0,989177	0,005716	0,005778
10	0,939084	0,014085	0,014999
15	0,853108	0,019726	0,023122
20	0,74742	0,022049	0,029501
25	0,636777	0,021878	0,034357
30	0,531138	0,0202	0,038031
35	0,435977	0,017794	0,040814
40	0,353538	0,015177	0,04293
45	0,284042	0,012653	0,044546
50	0,226594	0,010374	0,045784
55	0,179785	0,008402	0,046736
60	0,142048	0,006743	0,047469
65	0,111871	0,005374	0,048036
70	0,087884	0,00426	0,048475
75	0,068907	0,003364	0,048815
80	0,053947	0,002648	0,049079
85	0,042185	0,002079	0,049283
90	0,032958	0,00163	0,049442
95	0,025731	0,001275	0,049566
100	0,020078	0,000997	0,049662

Графически иллюстрация результатов представлена на рис. 3.3.



Вероятность безотказной работы в течение t = 100 часов



Плотность распределения и интенсивность отказов в течение t = 100 часов

Рис. 3.3. Показатели надежности системы

Пример 3.2. Структурная схема системы представляет собой дублированную систему с постоянно включенным резервом. Элементы системы имеют разные законы распределения времени до отказа: экспоненциальный с интенсивностью отказа $\lambda = 0{,}002$ час$^{-1}$ и Вейбулла с параметрами $\alpha = 4$, $\beta = 500$ час. Определите показатели надежности системы.

Решение. Определим вероятность безотказной работы элементов:

$$P_1(t) = e^{-\lambda t} = e^{-0{,}002t}, \; P_2(t) = e^{-(t/\beta)^{\alpha}} = e^{-(t/500)^4},$$

тогда в соответствии с (3.6) вероятность безотказной работы системы равна

$$P_C(t) = 1 - (1 - e^{-0{,}002t})(1 - e^{-(t/500)^4}).$$

Плотность распределения времени до отказа получим на основании формулы $f(t) = Q'(t)$. Отсюда, так как $Q(t) = \left(1 - e^{-0{,}002t}\right)\left(1 - e^{-(t/500)^4}\right)$,

$$f(t) = e^{-t^4/625\cdot 10^8}\left(\frac{t^3}{15625\cdot 10^6} - \frac{e^{-t/500}\left(t^3 + 3125\cdot 10^4\right)}{15625\cdot 10^6}\right) + \frac{e^{-t/500}}{500}.$$

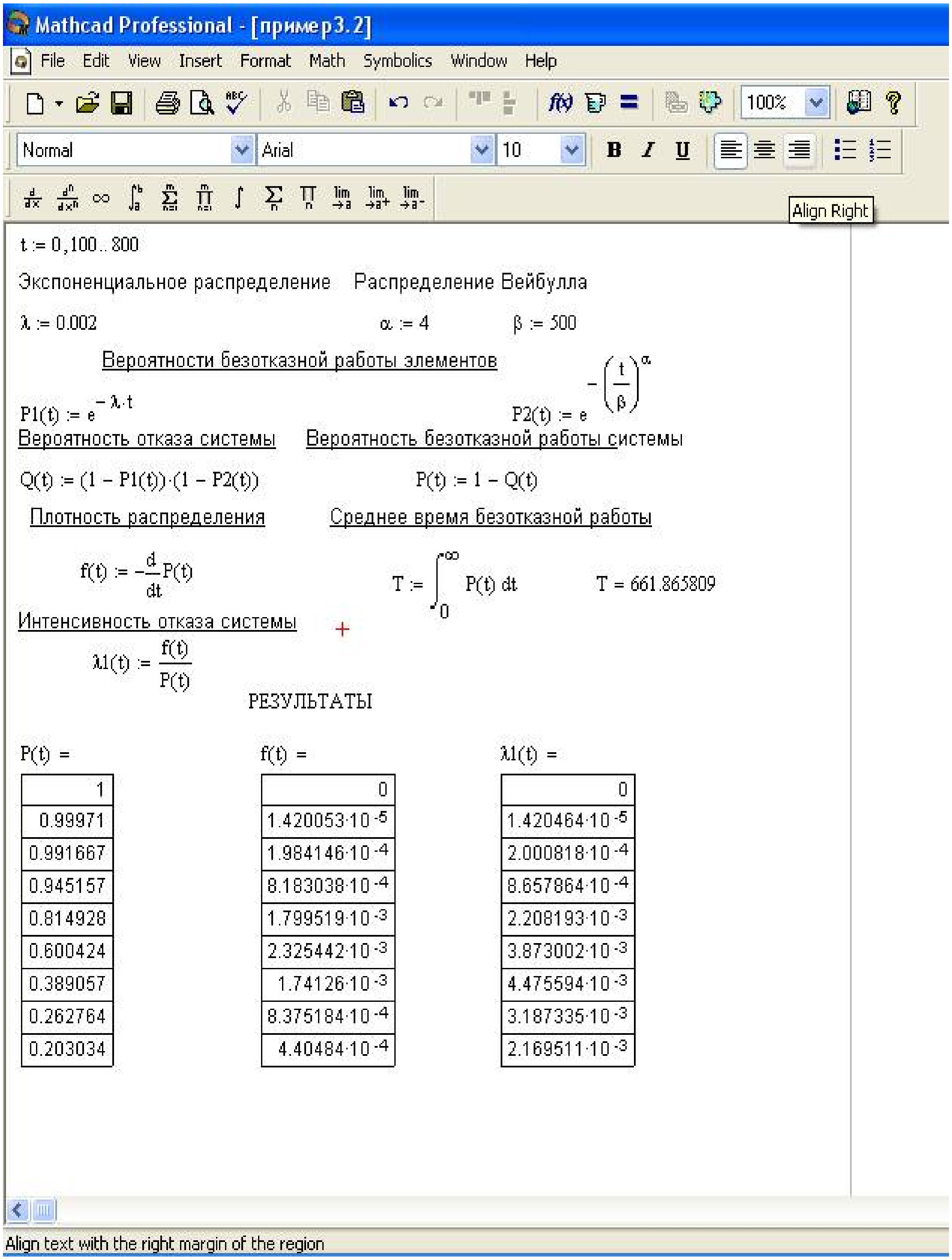
Проинтегрировав вероятность безотказной работы, получено значение среднего времени безотказной работы

$$T_{1C} = \int_0^\infty P(t)dt = \int_0^\infty \left(1 - e^{-0{,}002t}\right)\left(1 - e^{-(t/500)^4}\right) = 661{,}866 \text{ час}.$$

Решение этой задачи с использованием Mathcad представлено на рис. 3.4.

На рис.3.5 приведены зависимости от времени вероятностей безотказной работы элементов. Из графиков видно, что вероятность безотказной работы элемента с законом распределения времени до отказа Вейбулла больше в области малых значений *t* и меньше при больших *t*.

Интересным, с точки зрения теории надежности является график интенсивности отказов резервированной системы (рис. 3.6). Согласно теории надежности, интенсивность отказа резервированной системы при $t = 0$ равна 0 и с ростом *t* приближается к интенсивности отказа наиболее надежного элемента. В нашем случае при больших *t* более надежной является система с экспоненциальным законом распределения времени до отказа, имеющей интенсивность отказа $\lambda = 0{,}002\,\text{час}^{-1}$. Из рис. 3.6, видно, что это условие выполнено идеально.



$t := 0, 100 .. 800$

Экспоненциальное распределение   Распределение Вейбулла

$\lambda := 0.002$ $\alpha := 4$ $\beta := 500$

Вероятности безотказной работы элементов

$P1(t) := e^{-\lambda \cdot t}$ $P2(t) := e^{-\left(\frac{t}{\beta}\right)^{\alpha}}$

Вероятность отказа системы   Вероятность безотказной работы системы

$Q(t) := (1 - P1(t)) \cdot (1 - P2(t))$ $P(t) := 1 - Q(t)$

Плотность распределения   Среднее время безотказной работы

$f(t) := -\frac{d}{dt}P(t)$ $T := \int_0^{\infty} P(t)\,dt$ $T = 661.865809$

Интенсивность отказа системы

$\lambda 1(t) := \frac{f(t)}{P(t)}$

РЕЗУЛЬТАТЫ

$P(t) =$	$f(t) =$	$\lambda 1(t) =$
1	0	0
0.99971	$1.420053 \cdot 10^{-5}$	$1.420464 \cdot 10^{-5}$
0.991667	$1.984146 \cdot 10^{-4}$	$2.000818 \cdot 10^{-4}$
0.945157	$8.183038 \cdot 10^{-4}$	$8.657864 \cdot 10^{-4}$
0.814928	$1.799519 \cdot 10^{-3}$	$2.208193 \cdot 10^{-3}$
0.600424	$2.325442 \cdot 10^{-3}$	$3.873002 \cdot 10^{-3}$
0.389057	$1.74126 \cdot 10^{-3}$	$4.475594 \cdot 10^{-3}$
0.262764	$8.375184 \cdot 10^{-4}$	$3.187335 \cdot 10^{-3}$
0.203034	$4.40484 \cdot 10^{-4}$	$2.169511 \cdot 10^{-3}$

Рис. 3.4. Определение показателей надежности дублированной системы с постоянно включенным резервом

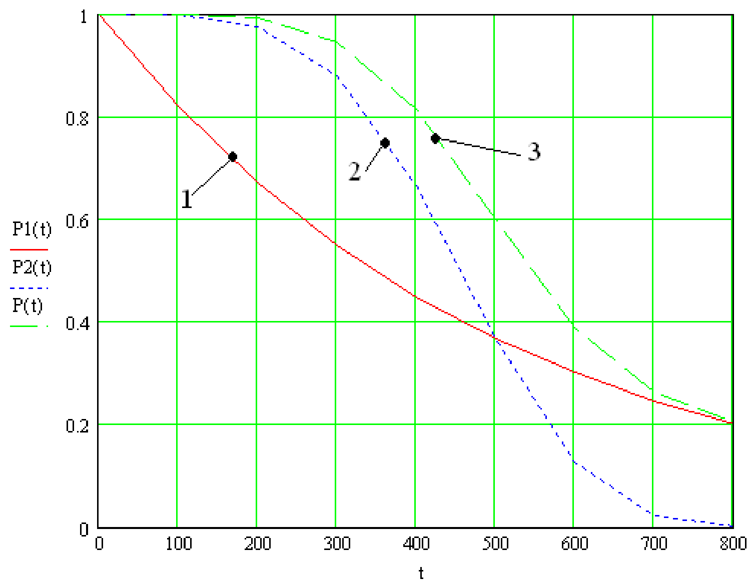


Рис. 3.5. Вероятность безотказной работы элементов с законом распределения времени до отказа: экспоненциальным (кривая 1),
Вейбулла (кривая 2); и системы в целом (кривая 3)

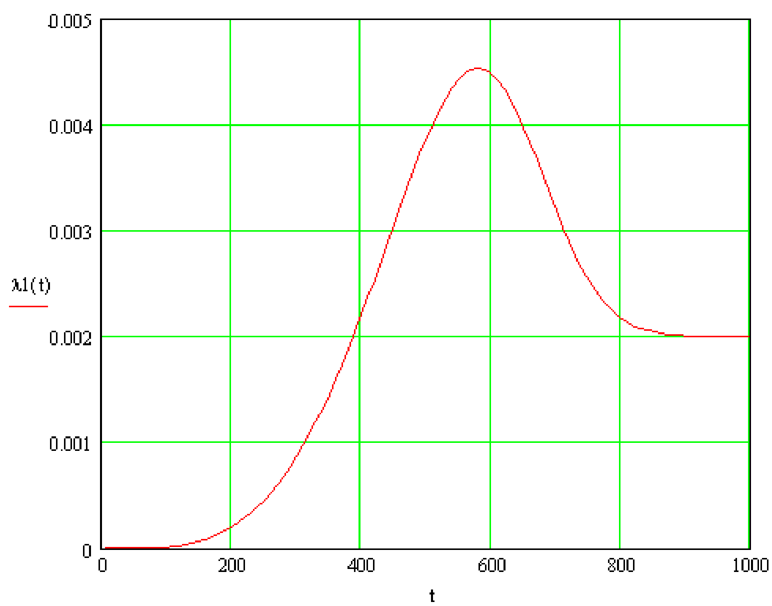


Рис. 3.6. Интенсивность отказа системы

Резервирование с дробной кратностью

Существуют технические системы, называемые мажоритарными, с дробной кратностью резервирования $\frac{m}{n-m}$, где m – число резервных элементов, n – общее число элементов. Отказ такой системы наступает при отказе $(m+1)$-го элемента.

Показатели надежности мажоритарной системы при условии, что все элементы имеют одинаковую надежность, вычисляются по формулам:

$$P_C(t) = \sum_{i=0}^{m} C_n^i Q^i(t) P^{n-i}(t), \tag{3.14}$$

$$f_C(t) = (n-m) C_n^m Q^m(t) P^{n-m-1}(t) f(t), \tag{3.15}$$

$$\lambda_C(t) = \frac{(n-m) C_n^m Q^m(t) P^{n-m}(t)}{\sum_{i=0}^{m} C_n^i Q^i(t) P^{n-i}(t)} \lambda(t). \tag{3.16}$$

Здесь $C_n^m = \dfrac{n!}{m!(n-m)!}$, где $n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$ – широко используемое обозначение для числа сочетаний из n элементов по m.

Пример 3.3. Пусть система состоит из трех одинаковых элементов. При этом ее отказ наступает при отказе любых двух или всех трех элементов. В данном случае имеет место мажоритарное резервирование с кратностью ½, т.е. один резервный элемент и два основных. Определите показатели надежности $P_C(t), T_{1C}, \lambda_C(t)$, при условии, что интенсивности отказа постоянны.

Решение. В соответствии с формулой (3.14) и с учетом $m = 1$, $n = 3$ получим

$$P_C(t) = \sum_{i=0}^{m} C_n^i Q^i(t) P^{n-i}(t) = C_3^0 Q^0(t) P^{3-0}(t) + C_3^1 Q^1(t) P^{3-1}(t) =$$
$$= P^3(t) - 3Q(t)P^2(t) = P^3(t) - 3(1 - P(t))P^2(t) = 3P^2(t) - 2P^3(t).$$

Здесь $C_3^0 = \dfrac{3!}{0!(3-0)!} = \dfrac{1 \cdot 2 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 0$, $\quad C_3^1 = \dfrac{3!}{1!(3-1)!} = \dfrac{1 \cdot 2 \cdot 3}{1 \cdot 1 \cdot 2} = 3$.

Для постоянных интенсивностей отказов $P(t) = e^{-\lambda t}$, и, значит,

$$P_C(t) = 3e^{-2\lambda t} - 2e^{-3\lambda t}.$$

Сравним надежность мажоритарной и нерезервированной системы.

Для этого решим неравенство:

$$P_C(t) > P(t), \quad \text{или} \quad 3P^2(t) - 2P^3(t) > P(t).$$

Отсюда следует, что $P(t) > 0{,}5$. Таким образом, мажоритарное резервирование позволяет повысить надежность системы при условии $P(t) > 0{,}5$.

На рис. 3.7. приведены зависимости вероятности безотказной работы нерезервированной и резервированной системы при $\lambda = 0{,}01 \text{час}^{-1}$.

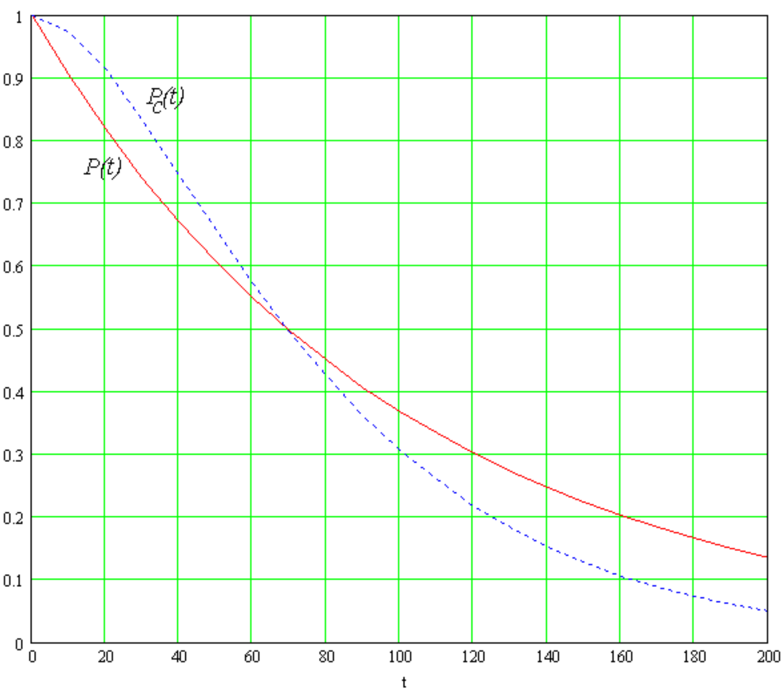


Рис. 3.7. Зависимости вероятности безотказной работы системы от времени

Из рисунка видно, что $P_C(t) > P(t)$, если $P(t) > 0{,}5$.

Вычислим среднее время безотказной работы системы:

$$T_1 = \int_0^\infty P_C(t)dt = \int_0^\infty \left(3e^{-2\lambda t} - 2e^{-3\lambda t}\right)dt = \frac{3}{2\lambda} - \frac{2}{3\lambda} = \frac{5}{6\lambda} = \frac{5}{6}T_0.$$

Результат вычислений показал, что среднее время безотказной работы системы с кратностью резервирования ½ ниже, чем нерезервированной.

Вычислим интенсивность отказа:

$$\lambda_C(t)=\frac{P'_C(t)}{P_C(t)}=-\frac{\left(3e^{-2\lambda t}-2e^{-3\lambda t}\right)'}{3e^{-2\lambda t}-2e^{-3\lambda t}}=\frac{6\lambda\left(e^{-2\lambda t}-e^{-3\lambda t}\right)}{3e^{-2\lambda t}-2e^{-3\lambda t}}.$$

График этой функции показан на рис. 3.8.

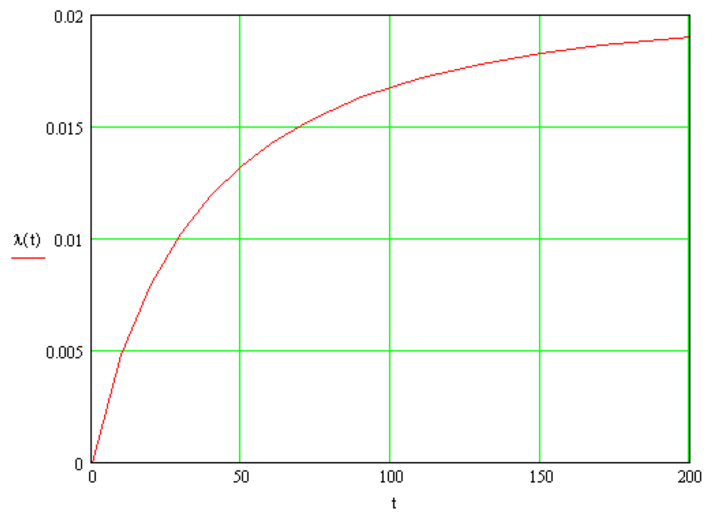


Рис. 3.8. Зависимость интенсивности отказов мажоритарной системы от времени

График подтверждает приведенные ранее свойства интенсивности отказов мажоритарной системы. В частности, $\lambda_C(t)$ с течением времени приближается к $2\lambda=0{,}02$ час$^{-1}$.

Общее резервирование замещением

Структурная схема системы приведена на рис. 3.9. Отказ системы наступает при отказе нулевого элемента, затем первого, второго и т.д., т.е всех $(m+1)$ элементов.

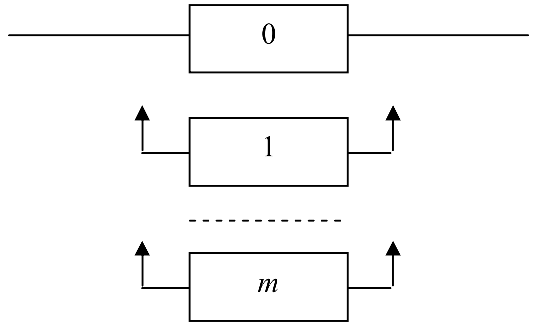


Рис. 3.9. Резервированная система с резервом замещением

Вероятность безотказной работы, плотность распределения времени до отказа и среднее время безотказной работы системы определяются выражениями [3, 4]:

$$P_C(t) = P_0(t) + \sum_{i=1}^{m} f_0 * f_1 * ... * f_{i-1} * P_i(t), \tag{3.17}$$

$$f_C(t) = f_0 * f_1 * ... * f_m(t), \tag{3.18}$$

$$T_1 = \int_0^{\infty} P_C(t)dt = \sum_{i=0}^{m} T_{1i}. \tag{3.19}$$

Если все элементы равнонадежны, то

$$P_C(t) = \sum_{i=0}^{m} f^{*(i)} * P(t) = 1 - \int_0^t f^{*(m+1)}(x)dx. \tag{3.20}$$

Формулы содержат свертки функций, обозначенные символом (*). Свертка функций $f(t)$ и $g(t)$, заданных при $t \geq 0$, определяется соотношением:

$$f * g(t) = \int_0^t f(t-x)g(x)dx = \int_0^t f(x)g(t-x)dx.$$

Выражение $f^{*(i)}(t) = \underbrace{f * f * ... * f(t)}_{i}$ представляет собой i-кратную свертку функции $f(t)$.

Если интенсивность отказов элементов постоянна и равна λ, то формулы для вероятности и среднего времени безотказной работы системы имеют вид:

$$P_C(t) = \sum_{j=0}^{m} \frac{(\lambda t)^j}{j!} e^{-\lambda t}, \tag{3.21}$$

$$T_C = \frac{1}{\lambda}(m+1).$$

Пример 3.4. Дана резервированная система с резервом замещением кратности $m = 2$. Элементы системы имеют постоянную интенсивность отказа $\lambda = 0{,}05$ час$^{-1}$. Определите вероятность безотказной работы и среднее время работы системы. Сравните $P_C(t)$ с постоянно включенным резервом.

Решение. По формуле (3.21) получим:

$$P_C(t) = \sum_{j=0}^{m} \frac{(\lambda t)^j}{j!} e^{-\lambda t} = \left(1 + \lambda t + \frac{(\lambda t)^2}{2}\right) e^{-\lambda t}.$$

Результаты определения $P_C(t)$ при различных значениях t представлены в табл. 3.2. Для сравнения в таблицу помещены также значения $P_C(t)$ для постоянно включенного резерва, вычисленные по формуле (3.8).

Таблица 3.2.

Вероятность безотказной работы системы при различных видах резервирования

t, час	Резерв замещением	Постоянный резерв
0	1	1
10	0,985612	0,939084
20	0,919699	0,74742
30	0,808847	0,531138
40	0,676676	0,353538
50	0,543813	0,226594
60	0,42319	0,142048
70	0,320847	0,087884
80	0,238103	0,053947
90	0,173578	0,032958
100	0,124652	0,020078
110	0,088376	0,01221
120	0,061969	0,007418
130	0,043036	0,004504
140	0,029636	0,002733
150	0,020257	0,001658
160	0,013754	0,001006
170	0,009283	0,00061
180	0,006232	0,00037

Графики вероятностей безотказной работы для обоих видов резервирования показаны на рис. 3.10.

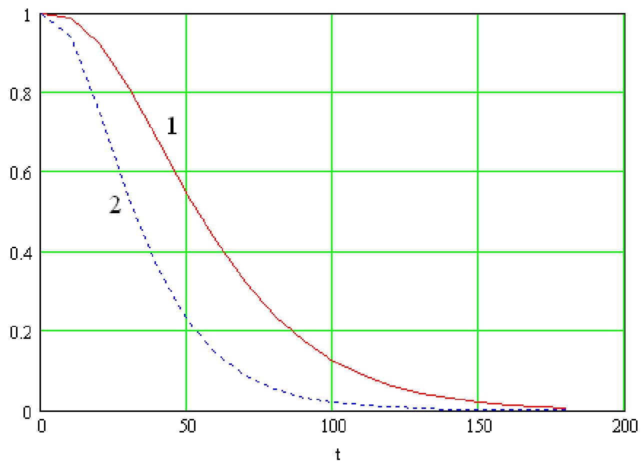


Рис. 3.10. Вероятность безотказной работы для резерва замещением (кривая 1) и для постоянно включенного резерва (кривая 2)

Скользящее резервирование

Резервирование называется скользящим если мажоритарная система *m/n* имеет резерв замещением (ненагруженный резерв) (рис. 3.11).

Сначала работают (*n–m*) основных элементов системы, а остальные элементов (находятся в очереди на работу). При отказе любого основного элемента он заменяется новым из числа резервных, который теперь выполняет функции основного элемента.

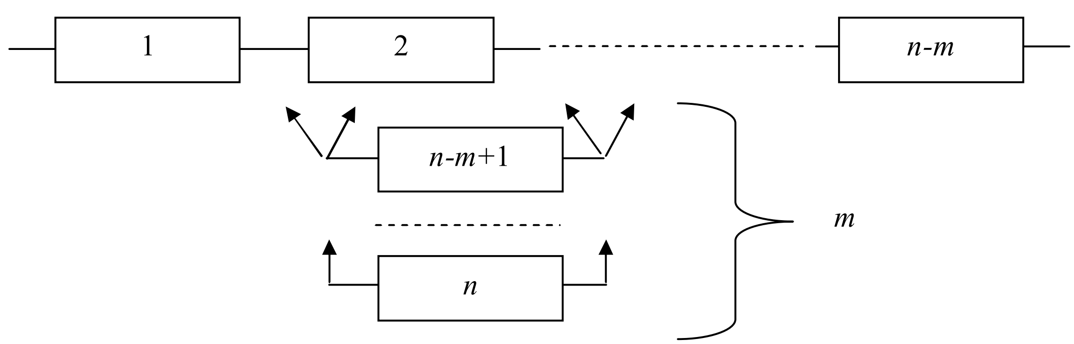


Рис. 3.11. Скользящее резервирование

При этом количество резервных элементов уменьшается. При отказе следующего основного элемента он опять заменяется новым из числа резервных и т.д. отказ системы наступает, когда будут израсходованы все резервные элементы и откажет любой из основных элементов [4].

Вероятность безотказной работы системы со скользящим резервом при условии, что все элементы системы имеют одинаковую надежность, равна

$$P_C(t) = \sum_{k=0}^{m} \sum_{k_1+k_2+\ldots+k_{n-m}=k} f^{*(k_1)} * P(t) f^{*(k_2)} * P(t) \ldots f^{*(k_{n-m})} * P(t). \quad (3.21)$$

Если элементы системы имеют экспоненциальное распределение вероятностей времени до отказа с параметром λ, то вероятность безотказной работы, интенсивность отказов и среднее время безотказной работы системы соответственно равны:

$$P_C(t) = \sum_{k=0}^{m} \frac{\left((n-m)\lambda t\right)^k}{k!} e^{-(n-m)\lambda t}, \quad (3.22)$$

$$\lambda_C(t) = (n-m)\lambda \frac{\dfrac{\left((n-m)\lambda t\right)^m}{m!}}{\sum\limits_{k=0}^{m} \dfrac{\left((n-m)\lambda t\right)^k}{k!}}, \quad (3.23)$$

$$T_{1C} = \frac{m+1}{n-m} T_1. \quad (3.24)$$

Выражения для вероятности безотказной работы системы с резервированием при некоторых наиболее употребительных числах основных и резервных элементов приведены в табл. 3.3 [3].

Таблица 3.3

Вероятность безотказной работы систем с резервированием

Структура системы		Количество основных однотипных элементов (блоков)				
		1	2	3	4	5
Количество резервных элементов (блоков)	0		p^2	p^3	p^4	p^5
	1	$2p - p^2$	$3p^2 - 2p^3$	$4p^3 - 3p^4$	$5p^4 - 4p^5$	
	2	$3p - 3p^2 + p^3$	$6p^2 - 8p^3 + 3p^4$	$10p^3 - 15p^4 + 6p^5$		
	3	$4p - 6p^2 + 4p^3 - p^4$	$10p^2 - 20p^3 + 15p^4 - 4p^5$			
	4	$5p - 10p^2 + 10p^3 - 5p^4 + p^5$				

Контрольные вопросы

1. Какие виды резервирования вы знаете?
2. Что такое резерв замещением?
3. Как определить кратность резервирования?
4. По какой формуле можно определить вероятность безотказной работы системы со скользящим резервированием при экспоненциальном распределении отказов ее элементов?

4. АНАЛИЗ НАДЕЖНОСТИ ВОССТАНАВЛИВАЕМЫХ СИСТЕМ

4.1. Надежность нерезервированной восстанавливаемой системы

Основными особенностями восстанавливаемых систем по сравнению с невосстанавливаемыми являются:

– большое число состояний;

– наличие последействия отказов элементов;

– зависимость показателей надежности от большого числа факторов (интенсивности восстановления, дисциплины обслуживания).

Расчет показателей надежности восстанавливаемых систем – задача более трудная, чем невосстанавливаемых. Существующие инженерные методы ориентированы лишь на случай экспоненциальных законов распределения времени безотказной работы и времени восстановления.

В случае неэкспоненциальных законов аналитических формул и тем более инженерных методик не существует. Приходиться использовать численные методы расчета и компьютерные технологии.

Анализ надежности восстанавливаемых систем с основным соединением элементов

Восстанавливаемая система, состоящая из n элементов, может находиться в большом числе состояний. Например, i-й элемент отказал $\left(i=1,\ 2,\ \ldots,\ n\right)$, а остальные исправны; i-й и j-й элемент отказали, а остальные исправны и т.д. Из-за отказов и восстановлений система в дискретные моменты времени переходит из одного состояния в другое. В процессе длительной эксплуатации она может побывать в каждом из возможных состояний многократно. Тогда ее функционирование может быть описано графом, узлам которого приписываются состояния системы, а ветвям – возможные переходы из состояния в состояние. Если в графе имеется n узлов, то среди них будет k узлов, соответствующих отказовым состояниям, и $(n–k)$ – исправным.

Если оценивать функционирование системы до некоторого i-го состояния, например до первого ее отказа, то i-е состояние считается поглощающим. Система, попавшая в i-е состояние, уже не может перейти в другое, и в графе отсутствуют ветви переходов из этого состояния (говорят, что в такие ветви ставится экран).

Вид графа зависит от структуры системы (схемы расчета надежности), числа обслуживающих бригад и дисциплины обслуживания. Обычно узлы графа нумеруются, и отмечаются (например, крестом) те, которые соответствуют отказовым состояниям системы. На графе указываются все интенсивности переходов.

Граф состояний системы, состоящей из n элементов, представлен на рис. 4.1 [2], где приняты обозначения:

λ_i – интенсивность отказа i-го элемента;

μ_i – интенсивность восстановления i-го элемента.

Исправное состояние обозначено (0), а отказовые пронумерованы от 0 до n и отмечены крестом. В любом из i-м отказовом состоянии система не работает, i-й элемент находится в ремонте. Очевидно, что система в i-ое отказовое состояние может попасть с интенсивностью отказа i-го элемента, т.е. λ_i, и может быть восстановлена (возращена в состояние (0)) с интенсивностью μ_i. Указанные интенсивности приведены на графе. В рассматриваемом случае вид графа и интенсивности переходов не зависят от числа обслуживающих бригад, так как предполагается, что после возникновения отказа элемента вся система не работает и отказы элементов в процессе ее восстановления не возникают.

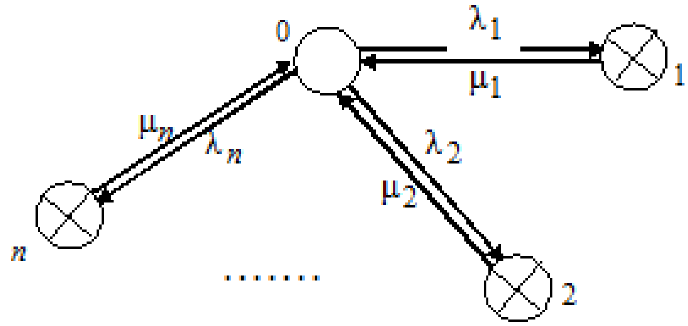


Рис. 4.1. Граф состояний системы с основным соединением элементов

Если необходимо проанализировать поведение системы до первого отказа, то следует считать, что состояния (1), (2), …, (n) являются поглощающими (система, попав в эти состояния, больше не возвращается в исправное состояние (0), экран на графе состояний).

Математической моделью функционирования системы в смысле надежности является следующая система дифференциальных уравнений [3]:

$$\begin{cases} \dfrac{dp_0(t)}{dt} = -\lambda_C p_0(t) + \sum\limits_{i=1}^{n} \mu_i p_i(t); \\ \dfrac{dp_i(t)}{dt} = \lambda_i p_0(t) - \mu_i p_i(t), \quad i = 1,2,\dots,n \end{cases} \tag{4.1}$$

где $\lambda_C = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$ – интенсивность отказа системы.

Решение системы уравнений обычно осуществляется при начальных условиях $p_0(0) = 1, p_1(0) = p_2(0) = ... = p_n(0) = 0$.

Показатели надежности восстанавливаемых систем, такие как функция готовности, коэффициент готовности, наработка на отказ и среднее время восстановления, могут быть получены из системы (4.1) в аналитическом виде. Однако наиболее просто их получить непосредственно из графа состояний топологическим методом.

Вычисление коэффициента готовности

Коэффициент готовности является финальной вероятностью того, что система исправна в произвольный момент времени *t*. На графе это состояние помечено цифрой 0. Тогда $\mathrm{K}_\Gamma = p_0$. На основании топологического метода получим:

$$p_0 = \frac{\prod_{i=1}^{n} \mu_i}{\prod_{i=1}^{n} \mu_i + \frac{\lambda_1}{\mu_1} \prod_{i=1}^{n} \mu_i + \frac{\lambda_2}{\mu_2} \prod_{i=1}^{n} \mu_i + ... + \frac{\lambda_n}{\mu_n} \prod_{i=1}^{n} \mu_i}.$$

Отсюда получим

$$\mathrm{K}_\Gamma = \frac{1}{1 + \sum_{i=1}^{n} \rho_i}, \qquad (4.2)$$

где $\rho_i = \frac{\lambda_i}{\mu_i}$.

Вычисление среднего времени между отказами

Наработку на отказ *T* наиболее просто определить по формуле

$$T = \frac{\sum_{i \in E_+} p_i}{\sum_{i \in E_+} p_i \sum_{j \in E_-} \lambda_{ij}} = \frac{p_0}{p_0 \sum_{i=1}^{n} \lambda_i},$$

где E_+ – множество работоспособных состояний системы;

E_{-} – множество отказовых состояний системы.

Тогда

$$T = \frac{1}{\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i}, \tag{4.3}$$

так как система имеет одно исправное состояние с номером 0.

Из полученного выражения следуют два важных вывода:

1) наработка на отказ нерезервированной системы не зависит от восстановления;

2) наработка на отказ и среднее время безотказной работы совпадают.

Вычисление среднего времени восстановления

Так как $\text{К}_{\Gamma} = \dfrac{T}{T + T_{\text{В}}}$, то $T_{\text{В}} = \dfrac{1 - \text{К}_{\Gamma}}{\text{К}_{\Gamma}} T$. Подставляя в это выражение значения $\text{К}_{\text{г}}$ и T из (4.2) и (4.3), получим:

$$T_{\text{В}} = \frac{1}{\lambda_C} \sum_{i=1}^{n} \rho_i \, . \tag{4.4}$$

Вычисление функции готовности

Вычисление функции готовности требует решения системы дифференциальных уравнений (4.1). В преобразовании Лапласа она имеет вид:

$$\begin{cases} (s + \lambda_C) p_0(s) - \sum\limits_{i=1}^{n} \mu_i p_i(s) = 1 \\ (s + \mu_i) p_i(s) = \lambda_i p_0(s) = 0, \quad i = 1,2,\ldots,n. \end{cases} \tag{4.5}$$

Так как $\text{К}_{\Gamma}(t) = p_0(t)$, то достаточно найти $p_0(s)$, а затем преобразование Лапласа $p_0(t)$.

Определение $\text{К}_{\Gamma}(t)$ с помощью преобразования Лапласа при большом n вызывает большие трудности, а при $n > 10$ – непреодолимые, так как найти обратное преобразование даже с помощью компьютерных технологий в большинстве случае не удается. При неэкспоненциальных законах распределения отказов и восстановлений расчет надежности даже для основного соединения элементов значительно усложняется. Поэтому рассмотрим наиболее приемлемый вариант определения функции готовности, когда система рассматривается как один элемент с постоянной интенсивностью отказов и восстановлений.

Из теории надежности известно [2], что функция готовности удовлетворяет интегральному уравнению:

$$\mathrm{K}_{\Gamma}(t) = f * g * \mathrm{K}_{\Gamma}(t) + P(t), \qquad (4.6)$$

где $f(t)$ – плотность распределения времени до отказа, $P(t)$ – вероятность безотказной работы; $g(t)$ – плотность распределения времени восстановления системы.

Решением уравнения (4.6) является функция

$$\mathrm{K}_{\Gamma}(t) = P(t) + \sum_{k=1}^{\infty} f^{*(k)} * g^{*(k)} * P(t). \qquad (4.7)$$

Функция $\mathrm{K}_{\Gamma}(t)$ представлена в аналитическом виде, но в общем случае непригодна для инженерных расчетов. Поэтому из решения системы дифференциальных уравнений, а также из формулы (4.6), при условии экспоненциального закона распределения времени до отказа и времени восстановления получим

$$\mathrm{K}_{\Gamma}(t) = \frac{\mu}{\mu+\lambda} + \frac{\lambda}{\mu+\lambda} e^{-(\lambda+\mu)t}, \qquad (4.8)$$

где λ – интенсивность отказа, μ – интенсивность восстановления системы.

Более подробную информацию о методах формирования функции готовности системы в случае произвольных законов распределения времени до отказа и времени восстановления можно найти в [2].

Пример 4.1. Нерезервированная система состоит из 7 элементов. Интенсивности их отказов приведены в табл. 4.1.

Таблица 4.1.

Номер элемента	1	2	3	4	5	6	7
λ_i, час$^{-1}$	0,0003	0,0002	0,0009	0,0006	0,0004	0,0003	0,0005

Интенсивности восстановления элементов одинаковы и равны $\mu = 0{,}4$ час$^{-1}$.

Определите показатели надежности системы.

Решение. Вычислим интенсивность отказов системы

$$\lambda_C = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 0{,}0003 + 0{,}0002 + 0{,}0009 + 0{,}0006 + 0{,}0004 + 0{,}0003 + 0{,}0005 = 0{,}0032.$$

Наработка на отказ, среднее время восстановления и коэффициент готовности равны соответственно:

$$T = \frac{1}{\lambda_C} = \frac{1}{0{,}0032} = 312{,}5 \text{ час};$$

$$T_В = \frac{1}{\mu} = \frac{1}{0{,}4} = 2{,}5 \text{ час};$$

$$К_Г = \frac{T}{T + T_В} = \frac{312{,}5}{312{,}5 + 2{,}5} = 0{,}99206.$$

Так как интенсивности восстановления элементов одинаковы, то систему можно рассматривать как один элемент с интенсивностью отказов λ_C и интенсивностью восстановления μ. Согласно (4.8) получим

$$К_Г(t) = \frac{\mu}{\mu+\lambda} + \frac{\lambda}{\mu+\lambda} e^{-(\lambda+\mu)t} = \frac{0{,}4}{0{,}0032+0{,}4} + \frac{0{,}0032}{0{,}0032+0{,}4} e^{-(0{,}0032+0{,}4)t} =$$
$$= 0{,}9921 + 0{,}0079 e^{-0{,}4032t}.$$

Табулируя функцию от 0 до 50 часов с шагом 2 часа, получим значения, приведенные в табл. 4.1.

Таблица 4.1

Функция готовности системы

t, час	$К_г(t)$	*t*, час	$К_г(t)$
0	1	26	0,9921
2	0,995627	28	0,9921
4	0,993675	30	0,9921
6	0,992803	32	0,9921
8	0,992414	34	0,9921
10	0,99224	36	0,992099
12	0,992163	38	0,992099
14	0,992128	40	0,992099
16	0,992112	42	0,992099
18	0,992106	44	0,992099
20	0,992102	46	0,992099
22	0,992101	48	0,992099

24	0,9921	50	0,992099

График функции готовности представлен на рис. 4.2.

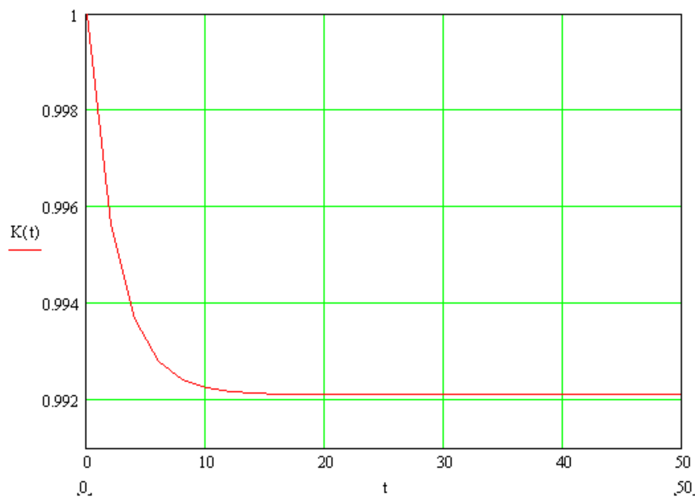


Рис. 4.2. Функция готовности системы

Из рисунка видно, что время переходного процесса мало и составляет около 12 часов. Это значит, что в случае высоконадежной системы ($K_{Г} > 0{,}99$) и большей длительности ее работы готовность системы целесообразно оценивать коэффициентом готовности.

4.2. Надежность резервированной восстанавливаемой системы

Особенностями расчета резервированных восстанавливаемых систем по сравнению с нерезервированными являются:

– необходимость учета дисциплины обслуживания;

– наличие последействия отказов, вызванного не только фактом обслуживания, но также отказами элементов;

– большое число состояний системы;

– сложность структурной схемы и графа состояний системы.

Методы расчета показателей надежности резервированных восстанавливаемых систем, как правило, являются сложными с точки зрения инженерного применения. Однако при определенных допущениях можно выделить классы систем, имеющих достаточно простые алгоритмы для вычисления показателей надежности. Такими допущениями обычно являются [4, 9]:

– относительная простота структурных схем расчета надежности;

– независимость элементов по отказам и по восстановлению;

– экспоненциальные законы распределения времени безотказной работы и времени восстановления элементов;

– определенные стратегии обслуживания отказавших элементов;

– стационарный характер показателей надежности системы.

При оценке надежности стационарных и нестационарных показателей надежности восстанавливаемых систем чаще всего используются методы одномерных и многомерных марковских случайных процессов. Далее рассмотрим примеры расчета надежности с помощью этих методов.

В некоторых случаях удается получить точные значения показателей надежности. В общем случае значения показателей надежности являются приближенными и рассчитываются программным путем.

Рассмотрим наиболее распространенный метод расчета надежности систем при экспоненциальных законах распределения отказов и восстановлений.

Предположим, что функционирование системы описывается графом, изображенным на рис. 4.3.

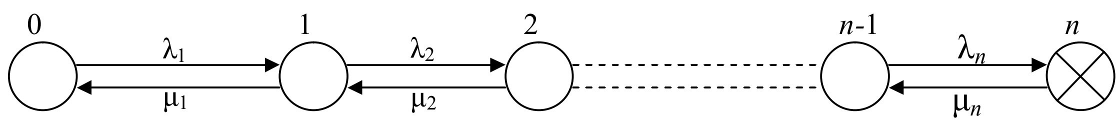


Рис.4.3. Граф функционирования технической системы

На рисунке обозначены:

λ_i – интенсивности переходов, соответствующие отказам элементов системы;

μ_i – интенсивности переходов, соответствующие восстановлениям элементов системы;

$n+1$ – общее число состояний.

Состояния с номерами 0, 1, 2…, n–1 являются исправными, а состояние с номером n – отказовым.

Рассмотрим методы расчета надежности резервированных систем при экспоненциальных законах распределения отказов и времени восстановления.

Общее постоянное резервирование элементов

Структурная схема и граф состояний системы приведены на рис. 4.4. и 4.5.

Получим расчетные формулы при следующих допущениях:

– резервирование целой кратности;

– последействия отказов отсутствует.

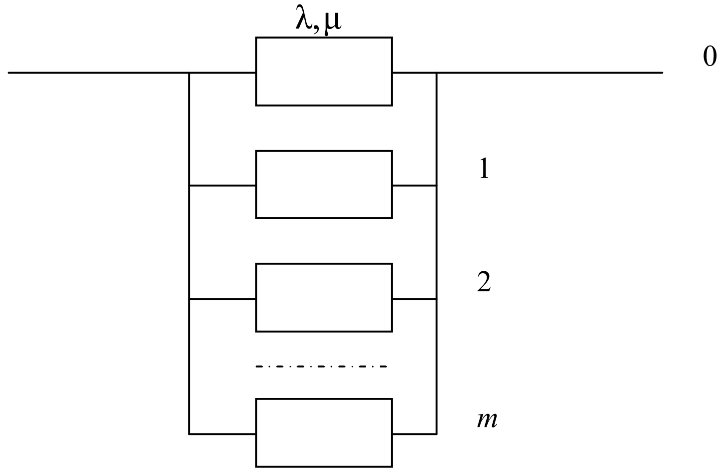


Рис. 4.4. Структурная схема резервированной системы

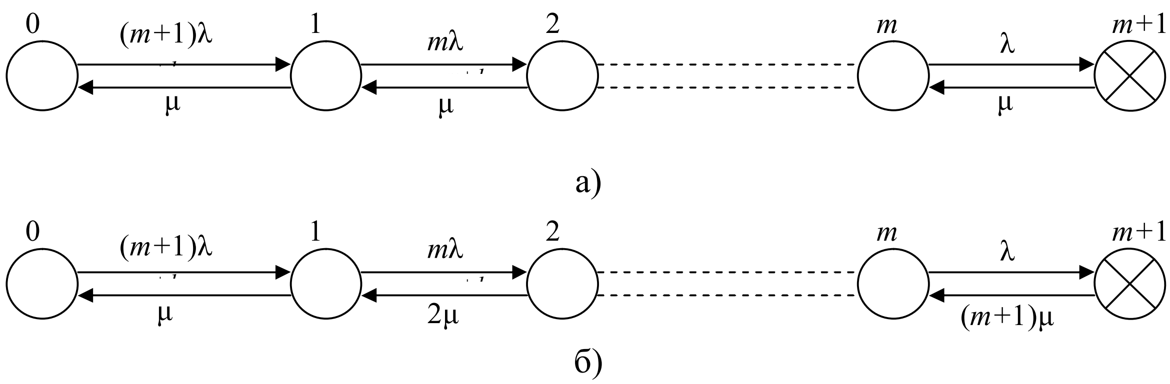


Рис. 4.5. Графы состояний резервированной системы:
одна бригада обслуживания (а), (m+1) бригада обслуживания (б)

Определим коэффициент готовности, наработку на отказ и среднее время восстановления для случая *одной обслуживающей бригады*.

Вычисление коэффициента готовности

Определим вероятность пребывания системы в отказовом состоянии m, т.е. коэффициент простоя.

Пользуясь топологическим методом [2, 3, 4] и графом рис. 4.5, получим

$$К_{П} = p_{m+1} = \frac{(m+1)!\lambda^{m+1}}{(m+1)!\lambda^{m+1} + \frac{(m+1)!\lambda^{m+1}}{1!}\frac{\mu}{\lambda} + \frac{(m+1)!\lambda^{m+1}}{2!}\frac{\mu^2}{\lambda^2} + \ldots + \mu^{m+1}}.$$

После сокращения на $(m+1)!\lambda^{m+1}$ получим

$$\text{К}_{\text{П}} = \frac{1}{1 + \frac{\gamma}{1!} + \frac{\gamma^2}{2!} + \ldots + \frac{\gamma^{m+1}}{(m+1)!}},$$

где $\gamma = \frac{\mu}{\lambda}$.

Так как коэффициент готовности и коэффициент простоя связаны зависимостью $\text{К}_{\text{г}} = 1 - \text{К}_{\text{п}}$ получим

$$\text{К}_{\text{Г}} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{m+1} \frac{\gamma^i}{i!}}{\sum\limits_{i=0}^{m+1} \frac{\gamma^i}{i!}}. \tag{4.9}$$

Вычисление среднего времени восстановления

Вычисление производится аналогично вычислению среднего времени между отказами (4.2) и в соответствии с графом рис. 4.5,а

$$T_{\text{В}} = \frac{\sum\limits_{i \in E_-} p_i}{\sum\limits_{i \in E_-} p_i \sum\limits_{j \in E_+} \lambda_{ij}} = \frac{p_{m+1}}{p_{m+1}\mu} = \frac{1}{\mu}.$$

Данная формула применима в случае одинаковых интенсивностей восстановления элементов.

Вычисление наработки на отказ

В силу соотношения $T = \frac{\text{К}_{\text{Г}}}{\text{К}_{\text{П}}} T_{\text{В}}$ и формул для $\text{К}_{\text{П}}$, $\text{К}_{\text{Г}}$ и $T_{\text{В}}$ получим

$$T = \frac{1}{\mu} \sum_{i=1}^{m+1} \frac{\gamma^i}{i!}, \text{ или } T = T_0 \sum_{i=1}^{m+1} \frac{\gamma^{i-1}}{i!}, \tag{4.10}$$

где $T_0 = \frac{1}{\lambda}$ – наработка на отказ нерезервированной системы. Тем самым, установлена зависимость наработки на отказ от кратности резервирования.

В случае *неограниченного восстановления* (число бригад обслуживания равно $m+1$) процедуры получения формул те же, что и в случае одной бригады обслуживания, поэтому приведем лишь конечные результаты

$$К_Г = 1 - \frac{\rho^{m+1}}{(1+\rho)^{m+1}}, \tag{4.11}$$

$$T = T_0 \frac{(1+\rho)^{m+1} - \rho^{m+1}}{(m+1)\rho^m}, \tag{4.12}$$

$$T_В = \frac{1}{(m+1)\mu}, \tag{4.13}$$

где $\rho = \dfrac{\lambda}{\mu}$.

Ремонтируемая резервированная система, состоящая из однотипных элементов

Предположим, что некоторый элемент зарезервирован $(m-1)$ раз однотипными по надежности элементами с интенсивностью отказа λ. Тогда вероятность безотказной работы системы выражается равенством

$$P(t) = \frac{z_1 + \mu + 3\lambda}{z_1 - z_2} e^{z_1 t} - \frac{z_1 + \mu + 3\lambda}{z_1 - z_2} e^{z_2 t}, \tag{4.14}$$

где

$$z_{1,2} = \frac{-(\mu + 3\lambda) \pm \sqrt{(\mu + 3\lambda)^2 - 8\lambda^2}}{2},$$

а средняя наработка до отказа равна

$$T_1 = \frac{\mu + 3\lambda}{2\lambda^2}. \tag{4.15}$$

Для резерва замещением вероятность безотказной работы системы выражается равенством

$$P(t) = \frac{z_1 + \mu + 2\lambda}{z_1 - z_2} e^{z_1 t} - \frac{z_1 + \mu + 2\lambda}{z_1 - z_2} e^{z_2 t}, \tag{4.16}$$

где

$$z_{1,2} = \frac{-(\mu + 2\lambda) \pm \sqrt{(\mu + 2\lambda)^2 - 4\lambda^2}}{2},$$

а средняя наработка до отказа равна

$$T_1 = \frac{\mu + 2\lambda}{\lambda^2}. \qquad (4.17)$$

Общее резервирование замещением

Структурная схема и граф состояний системы приведены на рис. 4.6. и 4.7.

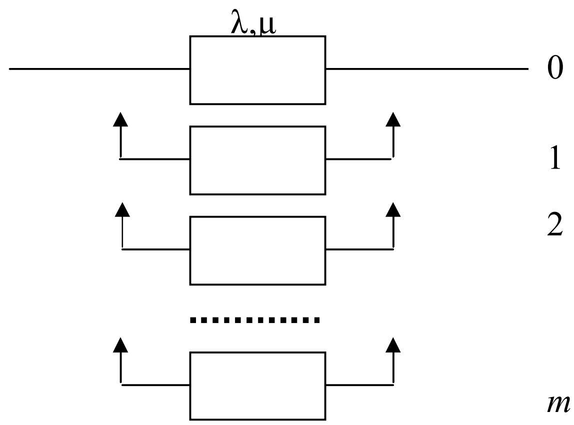


Рис. 4.6. Структурная схема резервированной системы

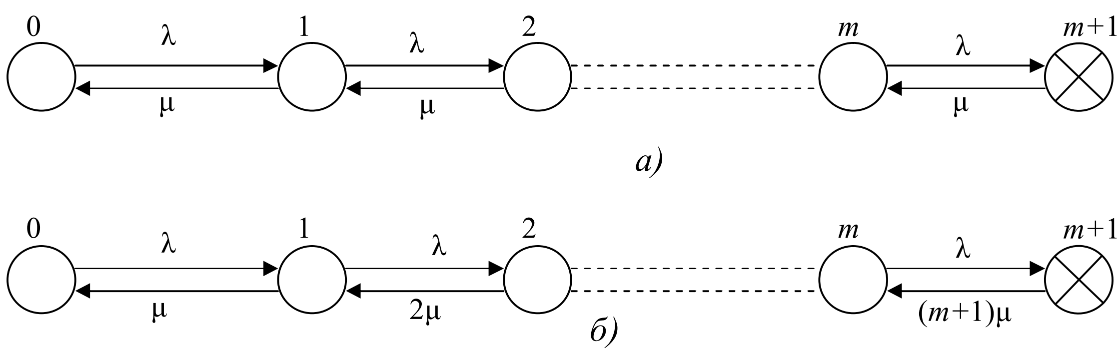


Рис. 4.7. Графы состояний резервированной системы:
одна бригада обслуживания (*а*), (m+1) бригада обслуживания (*б*)

Вычисление коэффициента готовности

$$\mathrm{K}_\Gamma = p_0 + p_1 + p_2 + \ldots + p_m = \frac{\mu^{m+1} + \lambda\mu^m + \lambda^2\mu^{m-1} + \ldots + \lambda^m\mu}{\mu^{m+1} + \lambda\mu^m + \lambda^2\mu^{m-1} + \ldots + \lambda^m\mu + \lambda^{m+1}} =$$

$$= \frac{1 + \rho + \rho^2 + \ldots + \rho^m}{1 + \rho + \rho^2 + \ldots + \rho^m + \rho^{m+1}}$$

или

$$\text{К}_\Gamma = \frac{\sum\limits_{i=0}^{m} \rho^i}{\sum\limits_{i=0}^{m+1} \rho^i}. \tag{4.14}$$

Также коэффициент готовности можно вычислить по формуле:

$$\text{К}_\Gamma = \frac{\sum\limits_{i=1}^{m+1} \gamma^i}{\sum\limits_{i=0}^{m+1} \gamma^i}$$

Вычисление среднего времени восстановления

$$T_\text{В} = \frac{1}{\mu}.$$

Вычисление наработки на отказ

$$T = \frac{\text{К}_\Gamma}{\text{К}_\Pi} T_\text{В} = T_\text{В} \sum_{i=1}^{m+1} \gamma^i ,$$

или

$$T = T_0 \sum_{i=0}^{m} \gamma^i .$$

Рассмотрим случай *неограниченного восстановления* (число ремонтных бригад равно числу подсистем, т.е. $m+1$). На основании графа состояний рис. 4.5,*б* и правил топологического метода выражение для коэффициента простоя примет следующий вид:

$$\text{К}_\Pi = \frac{\lambda^{m+1}}{(m+1)!\,\mu^{m+1} + \frac{(m+1)!}{1!}\mu^m \lambda + \frac{(m+1)!}{2!}\mu^{m-1}\lambda^2 + \ldots + (m+1)\mu\lambda^m + \lambda^{m+1}} =$$

$$= \frac{\frac{\rho^{m+1}}{(m+1)!}}{1 + \frac{\rho}{1!} + \frac{\rho^2}{2!} + \ldots + \frac{\rho^m}{m!} + \frac{\rho^{m+1}}{(m+1)!}}.$$

Тогда коэффициент готовности будет иметь вид

$$К_Г = 1 - К_П = \frac{1 + \frac{\rho}{1!} + \frac{\rho^2}{2!} + \ldots + \frac{\rho^m}{m!}}{1 + \frac{\rho}{1!} + \frac{\rho^2}{2!} + \ldots + \frac{\rho^m}{m!} + \frac{\rho^{m+1}}{(m+1)!}},$$

или

$$К_Г = \frac{\sum\limits_{i=0}^{m} \frac{\rho^i}{i!}}{\sum\limits_{i=0}^{m+1} \frac{\rho^i}{i!}}. \tag{4.15}$$

Среднее время восстановления выражается формулой

$$T_В = \frac{1}{(m+1)\mu}. \tag{4.16}$$

Наработку на отказ вычислим, воспользовавшись формулой $T = \frac{К_г}{К_п} T_в$:

$$T = T_В \frac{\sum\limits_{i=0}^{m} \frac{\rho^i}{i!}}{\frac{\rho^{m+1}}{(m+1)!}} = \frac{1}{\lambda} \sum_{i=0}^{m} \frac{m!}{(m-i)!} \gamma^i$$

или

$$T = T_0 \sum_{i=0}^{m} \frac{m!}{(m-i)!} \gamma^i, \tag{4.17}$$

где $T_0 = \frac{1}{\lambda}$ – наработка на отказ нерезервированной системы, $\gamma = \frac{\mu}{\lambda}$.

Пример 4.2. Вычислите коэффициент готовности, наработку на отказ, среднее время восстановления резервированной системы с постоянно включенным резервом и по методу замещения. Исходные данные: интенсивность отказов λ = 0,0035 час$^{-1}$, интенсивность восстановления μ = 0,1 час$^{-1}$. Решение необходимо получить при кратности резервирования m = 1, 2, 3, 4. Рассмотрите случаи одной бригады обслуживания и независимого восстановления.

Решение. Для проведения дальнейших расчетов определим наработку на отказ и среднее время восстановления нерезервированной системы

$$T_0 = \frac{1}{\lambda} = 285{,}7 \text{ час}, \quad T_В = \frac{1}{\mu} = 10 \text{ час}.$$

При кратности резервирования $m = 1$ получим:

Для случая системы с постоянно включенным резервом

$$К_П = \frac{1}{1 + \frac{\gamma}{1!} + \frac{\gamma^2}{2!}} = 0{,}00228, \text{ отсюда } К_г = 1 - К_п = 0{,}99772, \text{ где } \gamma = \frac{\mu}{\lambda} = 28{,}6.$$

В соответствии с формулой (4.10) наработка на отказ равна

$$T = T_0 \sum_{i=1}^{2} \frac{\gamma^{i-1}}{i!} = 285{,}7 \cdot (1 + 28{,}6/2) = 4371{,}21 \text{ час}.$$

Неограниченное восстановление ($n = m+1$)

$$К_Г = 1 - \frac{\rho^{m+1}}{(1+\rho)^{m+1}} = 1 - \frac{0{,}035^2}{(1+0{,}035)^2} = 0{,}998856,$$

$$T = T_0 \frac{(1+\rho)^{m+1} - \rho^{m+1}}{(m+1)\rho^m} = 285{,}7 \frac{(1+0{,}035)^2 - 0{,}035^2}{2 \cdot 0{,}035^1} = 4367{,}13 \text{ час},$$

$$T_в = \frac{1}{(m+1)\mu} = \frac{1}{2 \cdot 0{,}1} = 5 \text{ час}.$$

где $\rho = \frac{\lambda}{\mu} = 0{,}035$.

Для случая резерва замещением

$$К_Г = \frac{\sum_{i=1}^{2} \gamma^i}{\sum_{i=0}^{2} \gamma^i} = 0{,}99882,$$

$$T = T_0 \sum_{i=0}^{m} \gamma^i = 285{,}7 \cdot (1 + 28{,}6) = 8456{,}7 \text{ час}.$$

Неограниченное восстановление ($n = m + 1$)

$$K_Г = \frac{\sum\limits_{i=0}^{2}\frac{\rho^i}{i!}}{\sum\limits_{i=0}^{2+1}\frac{\rho^i}{i!}} = \frac{\frac{0{,}035^1}{1}+\frac{0{,}035^2}{1\cdot 2}}{\frac{0{,}035^1}{1}+\frac{0{,}035^2}{1\cdot 2}+\frac{0{,}035^3}{1\cdot 2\cdot 3}} = 0{,}999799,$$

$$T = T_0\sum_{i=0}^{1}\frac{1!}{(1-i)!}\gamma^i = 285{,}7\cdot(1+28{,}6) = 8456{,}7 \text{ час},$$

$$T_В = \frac{1}{(m+1)\mu} = \frac{1}{2\cdot 0{,}1} = 5 \text{ час}.$$

Аналогично были получены результаты при других кратностях резервирования. Результаты, полученные с помощью универсального программного средства Mathcad по предложенным ранее формулам представлены в табл. 4.2 [10].

Таблица 4.2

Результаты решения примера

Вид восстановления	Постоянное резервирование			Резервирование замещением		
	m	$K_Г$	T, час	m	$K_Г$	T, час
Ограниченное $n = 1$	0	0,966184	286	0	0,966184	286
	1	0,997716	4367	1	0,998818	8449
	2	0,9997688	43240	2	0,9999586	241685
	3	0,9999688	320902	3	0,9999986	6905575
	4	0,9999948	1907543	4	0,9999999	197302434
Неограниченное $n = m + 1$	0	0,966184	286	0	0,966184	286
	1	0,998856	4367	1	0,999409	8449
	2	0,999961	86194	2	0,9999931	483085
	3	0,9999987	1911739	3	0,9999999	41407533
	4	0,9999999	45226346	4	1	4732290000

Анализ полученных результатов позволяет сделать вывод, что резервирование с восстановлением дает возможность существенно повысить коэффициент готовности системы и особенно наработку на отказ. Значительное повышение надежности получается уже при кратности резервирования $m = 1$. При дублировании с восстановлением среднее время работы между отказами повысилось в 15 раз в случае постоянного резервирования и в 30 раз при резервировании замещением. Анализ данных таблицы показывает, что показатели надежности системы тем выше, чем выше кратность резервирования и число обслуживающих бригад.

4.3. Анализ надежности резервированных систем, защищенных от одного отказа

Как правило, при разработке техники резервирование производится при кратности $m=1$, это обусловлено ограничениями, накладываемыми на массогабаритные размеры проектируемого привода. Рассмотрим получение показателей надежности таких подсистем, отказ которых наступает при отказе двух элементов. В качестве таких подсистем могут быть дублированные системы с постоянно включенным резервом и резервом замещением, мажоритарные системы кратности ½ (рис. 4.8) [2].

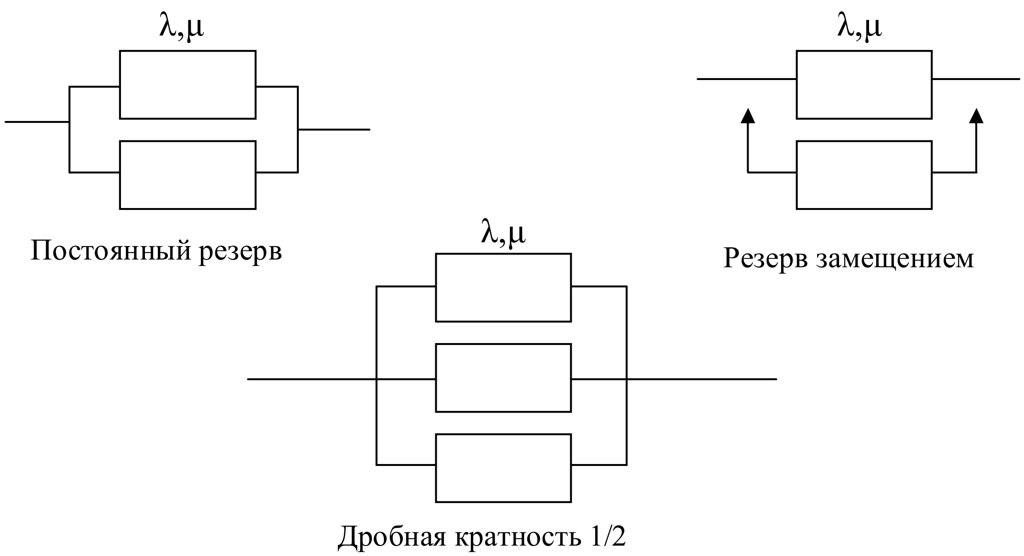


Рис. 4.8. Структурные схемы подсистем, защищенных от одного отказа

Невосстанавливаемая подсистема, защищенная от одного отказа

Предположим, что подсистема ЭП является невосстанавливаемой. Граф состояний такой системы представлен на рис. 4.9.

На рис. 4.9 исправные состояния обозначены (0,1), а отказовое (2) изображено квадратом. Очевидно, что система может перейти из состояния (0) в состояние (1), когда отказал один из элементов подсистемы, с интенсивностью λ, и, соответственно, из состояния (1) в отказовое состояние (2), когда отказал еще один из элементов подсистемы с интенсивностью λ^*. Указанные интенсивности приведены на графе.

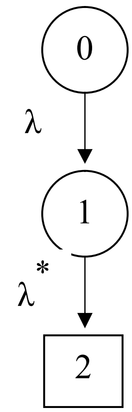


Рис. 4.9. Граф состояний невосстанавливаемой подсистемы, защищенной от одного отказа

Подсистема проработает безотказно в течение времени t, если до момента t первый элемент не откажет. Вероятность этого события равна $p_1 = e^{-\lambda t}$. Подсистема также проработает безотказно в течение времени t, если первый элемент откажет в любой момент времени $\tau<t$, а в течение времени $(t–\tau)$ больше не произойдет отказов. По формуле полной вероятности вероятность этого события равна

$$p_2 = \int_0^t \lambda e^{-\lambda\tau} e^{-\lambda^* t} d\tau = \lambda e^{-\lambda^* t} \int_0^t e^{\left(\lambda^* - \lambda\right)\tau} d\tau .$$

Если $\lambda \neq \lambda^*$, то

$$p_2 = \lambda e^{-\lambda^* t} \frac{e^{\left(\lambda^* - \lambda\right)t} - 1}{\lambda^* - \lambda} = \frac{\lambda e^{-\lambda t} - \lambda e^{-\lambda^* t}}{\lambda^* - \lambda},$$

а если $\lambda = \lambda^*$. то $p_2 = \lambda t e^{-\lambda t}$.

Поскольку $P(t) = p_1 + p_2$, то вероятность безотказной работы всей подсистемы, защищенной от одного отказа, определяется формулой

$$P(t) = \begin{cases} \dfrac{\lambda e^{-\lambda^* t} - \lambda^* e^{-\lambda t}}{\lambda - \lambda^*}, & \text{если} \quad \lambda \neq \lambda^* \\ (1+\lambda t)e^{-\lambda t}, & \text{если} \quad \lambda = \lambda^* \end{cases} \qquad (4.18)$$

Средняя наработка до отказа равна

$$T_1 = \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda^*} = \frac{\lambda + \lambda^*}{\lambda \lambda^*}. \qquad (4.19)$$

Результаты расчетов показателей надежности по формулам (4.18) и (4.19) для трех схем, изображенных на рис. 4.8, приведены в табл. 4.3 [3].

Таблица 4.3

Показатели надежности невосстанавливаемых подсистем, защищенных от одного отказа

Вид резерва	λ	λ^*	T_1	$P(t)$
Постоянно включенный	2λ	λ	$\frac{3}{2\lambda}$	$2e^{-\lambda t} - e^{-2\lambda t}$
Замещением	λ	λ	$\frac{2}{\lambda}$	$(1+\lambda t)e^{-\lambda t}$
С дробной кратностью	3λ	2λ	$\frac{5}{6\lambda}$	$3e^{-2\lambda t} - 2e^{-3\lambda t}$

Очевидно, что резерв замещением обеспечивает наибольшую надежность подсистемы по сравнению с другими видами резервирования, при этом для трех рассмотренных подсистем наблюдается существенное различие по критерию $P(t)$. Из рассмотренных систем мажоритарная система имеет самую низкую надежность по вероятности безотказной работы и соответственно по среднему времени безотказной работы.

Восстанавливаемая подсистема, защищенная от одного отказа

Граф состояний восстанавливаемой системы защищенной от одного отказа, представлен на рис. 4.10.

Обозначим $p_i(t)$ – вероятность пребывания подсистемы в момент времени t в состоянии i, $i = 0{,}1$. Тогда для исправных состояний имеет место система дифференциальных уравнений Колмагорова:

$$\begin{cases} p_0'(t) = -\lambda p_0(t) + \mu p_1(t); \\ p_1'(t) = \lambda p_0(t) - \left(\mu + \lambda^*\right) p_1(t). \end{cases}$$

Считая, что в момент времени $t = 0$ система исправна, т.е. $p_0(0) = 1, p_1(0) = 0$, получим в преобразовании Лапласа

$$\begin{cases} z\hat{p}_0(z) = -\lambda \hat{p}_0(z) + \mu \hat{p}_1(z) + 1 \\ z\hat{p}_1(z) = \lambda \hat{p}_0(z) - \left(\mu + \lambda^*\right) \hat{p}_1(z) \end{cases},$$

или

$$\begin{cases} (z+\lambda)\hat{p}_0(z) - \mu\hat{p}_1(z) = 1; \\ -\lambda\hat{p}_0(z) + \left(z+\mu+\lambda^*\right)\hat{p}_1(z) = 0. \end{cases}$$

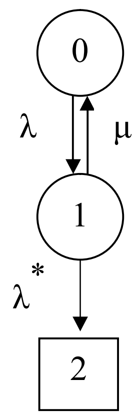


Рис. 4.10. Граф состояний восстанавливаемой подсистемы, защищенной от одного отказа

Решение этой системы дифференциальных уравнений определяется равенствами

$$\hat{p}_0(z) = \frac{z+\mu+\lambda^*}{\Delta}, \qquad \hat{p}_1(z) = \frac{\lambda}{\Delta},$$

где $\Delta = \begin{vmatrix} z+\lambda & -\mu \\ -\lambda & z+\mu+\lambda^* \end{vmatrix} = z^2 + \left(\mu+\lambda+\lambda^*\right)z + \lambda\lambda^*$ – главный определитель системы. Отсюда следует, что преобразование Лапласа вероятности безотказной работы имеет вид

$$\hat{P}(z) = \hat{p}_0(z) + \hat{p}_1(z) = \frac{z+\mu+\lambda+\lambda^*}{\Delta} = \frac{z+\mu+\lambda+\lambda^*}{z^2 + \left(\mu+\lambda+\lambda^*\right)z + \lambda\lambda^*}.$$

Представим полученную дробь в виде суммы простейших дробей. Полагая $a = \mu+\lambda+\lambda^*$, $b = \lambda\lambda^*$, найдем корни знаменателя $z_{1,2} = \dfrac{-a \pm \sqrt{a^2-4b}}{2}$. Тогда

$$\hat{P}(z) = \frac{z+\mu+\lambda+\lambda^*}{z^2 + \left(\mu+\lambda+\lambda^*\right)z + \lambda\lambda^*} = \frac{A_1}{z-z_1} + \frac{A_2}{z-z_2},$$

где коэффициенты A и A_2 определяются из системы уравнений

$$\begin{cases} A_1 + A_2 = 1 \\ A_1 z_2 + A_2 z_1 = -a, \end{cases}$$

откуда

$$A_1 = \frac{z_1 + a}{z_1 - z_2}, \qquad A_2 = \frac{z_2 + a}{z_1 - z_2}.$$

Переходя от функции $\hat{P}(z)$ к оригиналу, получим окончательное выражение для вероятностей безотказной работы системы

$$P(t) = A_1 e^{z_1 t} + A_2 e^{z_2 t}. \qquad (4.20)$$

Вычислим среднюю наработку до первого отказа подсистемы

$$T_1 = -\frac{z_1 + a}{(z_1 - z_2) z_1} + \frac{z_2 + a}{(z_1 - z_2) z_2} = \frac{a}{z_1 z_2} = \frac{\mu + \lambda + \lambda^*}{\lambda \lambda^*}. \qquad (4.21)$$

Рассматриваемая подсистема является обобщением подсистем, защищенных от одного отказа, со структурными схемами, изображенными на рис. 4.8. Для этих подсистем в табл. 4.4 приведены значения интенсивностей переходов λ, λ^*, графа состояний и выражение для среднего времени безотказной работы [2].

Таблица 4.4

Средняя наработка до отказа восстанавливаемых подсистем ЭП, защищенных от одного отказа

Вид резерва	λ	λ^*	T_1
Постоянно включенный	2λ	λ	$\frac{\mu + 3\lambda}{2\lambda^2}$
Замещением	λ	λ	$\frac{\mu + 2\lambda}{\lambda^2}$
С дробной кратностью	3λ	2λ	$\frac{\mu + 5\lambda}{6\lambda^2}$

В табл. 4.5 содержатся коэффициенты $z_{1,2}$ и $A_{1,2}$, стоящие в выражении вероятности безотказной работы (4.20).

Таблица 4.5

Коэффициенты для вероятностей безотказной работы восстанавливаемых подсистем, защищенных от одного отказа

Вид резерва	$z_{1,2}$	$A_{1,2}$
Постоянно включенный	$\dfrac{-(\mu+3\lambda)\pm\sqrt{(\mu+3\lambda)^2-8\lambda^2}}{2}$	$\dfrac{\pm(\mu+3\lambda)+\sqrt{(\mu+3\lambda)^2-8\lambda^2}}{2\sqrt{(\mu+3\lambda)^2-8\lambda^2}}$
Замещением	$\dfrac{-(\mu+2\lambda)\pm\sqrt{(\mu+2\lambda)^2-4\lambda^2}}{2}$	$\dfrac{\pm(\mu+2\lambda)+\sqrt{(\mu+2\lambda)^2-4\lambda^2}}{2\sqrt{(\mu+2\lambda)^2-4\lambda^2}}$
С дробной кратностью	$\dfrac{-(\mu+5\lambda)\pm\sqrt{(\mu+5\lambda)^2-24\lambda^2}}{2}$	$\dfrac{\pm(\mu+5\lambda)+\sqrt{(\mu+5\lambda)^2-24\lambda^2}}{2\sqrt{(\mu+5\lambda)^2-24\lambda^2}}$

Очевидно, что наибольшую надежность дает резервирование замещением, а наименьшую – резервирование с дробной кратностью.

Контрольные вопросы

1. Дайте определение коэффициенту готовности технического объекта.
2. Что понимается под функцией готовности технического объекта и каково ее отличие от коэффициента готовности?
3. Что такое резервирование с дробной кратностью?
4. Порядок определения вероятности безотказной работы системы топологическим методом.
5. Как определить вероятность нахождения технического объекта в различных состояниях, используя его граф состояний?

5. НАДЕЖНОСТЬ И ТЕХНИЧЕСКИЙ РИСК ЭЛЕКТРОМЕХАНИЧЕСКИХ КОМПЛЕКСОВ

Отказ технической системы неизбежно ведет к потерям: производство останавливается или сокращается, отказавшая система ремонтируется, последствия аварий или катастроф ликвидируются. Кроме того, эксплуатация техники оказывает негативное влияние на окружающую среду. Потери могут быть так велики, что возникает сомнение в целесообразности эксплуатации техники из-за ее низкой надежности.

Отказы являются событиями случайными. При этом потери зависят от вида отказа. Например, отказ двигателя автомобиля ведет к потерям, которые превосходят потери от отказа фары. Величина потерь также зависит от условий, в которых возник отказ. Например, отказ двигателя самолета на стоянке и в полете приводит к разным потерям. Потери, так же, как и отказы, являются событиями случайными. В процессе эксплуатации человек рискует. Автомобилист рискует при выезде на трассу, потребитель электроэнергии атомной электростанции рискует быть облученным. Риск является неизбежным атрибутом эксплуатации техники. Он является одним из важнейших показателей безопасности.

Риск, возникающий в результате отказов техники, называется **техногенным** [11, 12, 13]. Риск имеет место не только при эксплуатации техники. Он присутствует при любых аномалиях: неблагоприятные условия среды (метеорологический риск), неблагоприятная экономическая ситуация (экономический риск) и так далее. При изучении риска возникают проблемы, требующие для их решения серьезных научных исследований и их практической реализации. К таким проблемам относятся:

– создание научной терминологии риска;
– разработка методов снижения риска;
– разработка математических моделей риска;
– разработка методов снижения риска.

В настоящее время научной теории риска не существует: не сформулированы фундаментальные понятия и определения, не разработаны математические модели, отсутствуют инженерные методы расчета.

В данной главе эти проблемы рассматриваются только применительно к техногенному риску как результату отказов техники. Нашей основной целью является исследование влияния надежности техники на величину риска.

Риском называется возможность потерь вследствие внутренних аномалий в системе или аномалий среды [14]. Такое определение слишком общее, а поэтому может вызывать различные толкования, если его применять к техногенному риску и надежности.

Техническим риском называется возможность потерь из-за отказов техники. Это определение имеет следующие особенности [11, 12]:

– отражает случайный характер риска;

– не учитывает вредного влияния техники на окружающую среду;

– применимо лишь для случая потерь от отказов техники.

В большинстве случаев риск оценивается денежными единицами, хотя могут быть случаи, когда потери носят такой характер, что оценить их в деньгах трудно или даже невозможно. Из определения следует, что риск является случайной величиной, вызванной двумя причинами: случайностью события «отказ» и случайностью величины потерь. При расчетах используется его характеристика – математическое ожидание риска.

Технический риск нерезервированной невосстанавливаемой системы

Для нерезервированной системы, состоящей из n элементов, вероятность безотказной работы и среднее время безотказной работы определяются по формулам:

$$P(t) = e^{-\Lambda t} \quad \text{и} \quad T_1 = \frac{1}{\Lambda}, \tag{5.1}$$

где $\Lambda = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$ – интенсивность отказа системы.

Суммарный риск системы за время t вследствие отказа какого-либо элемента определяется по формуле

$$R(t) = \sum_{i=1}^{n} r_i q_i(t), \tag{5.2}$$

где $q_i(t) = \frac{\lambda_i}{\Lambda}\left(1 - e^{-\Lambda t}\right)$ – вероятность отказа i-го элемента системы в момент времени t;

r_i – риск из-за отказа i-го элемента, $i = 1,\ 2,\ ...,\ n$.

Формула (5.2) справедлива только в случае, когда время до отказа каждого элемента случайно и имеет экспоненциальное распределение вероятностей. В общем случае формула является приближенной.

Технический риск нерезервированной восстанавливаемой системы

Восстанавливаемые системы – это системы многократного использования. В течение всей эксплуатации они могут отказывать и ремонтироваться. Тогда общий риск системы можно вычислить по формуле:

$$R(t) = \int_0^t \text{К}_\Gamma(\tau) d\tau \sum_{i=1}^{n} \lambda_i r_i . \tag{5.3}$$

Расчет функции готовности $\text{К}_\text{г}(t)$ является сложной задачей. Поэтому целесообразно пользоваться следующими двусторонними оценками вычисления риска системы [2]:

$$\text{К}_\Gamma \cdot t \cdot \sum_{i=1}^{n} \lambda_i r_i \le R(t) \le t \cdot \sum_{i=1}^{n} \lambda_i r_i , \tag{5.4}$$

где К_Γ – коэффициент готовности системы.

Риск высоконадежной системы линейно возрастает со временем, определяется только надежностью техники и практически не зависит от интенсивности ее восстановления.

Технический риск резервированной системы, состоящей из независимых подсистем

Предположим, что *i*-ый элемент зарезервирован $m_i - 1$ раз однотипными по надежности элементами, *i* = 1, 2, …, *n*, причем вид резервирования произвольный. Система может быть неремонтируемой и ремонтируемой, но при этом отдельные ее подсистемы должны быть независимы по обслуживанию, т.е. имеет место неограниченное восстановление, когда ремонтных органов достаточно, чтобы не возникала очередь на восстановление отказавших элементов.

Вероятность безотказной работы и средняя наработка до отказа всей системы определяется в соответствии с формулами (3.1) и (3.2).

Тогда риск системы из-за отказа определяется по формуле [3]:

$$R(t) = \sum_{i=1}^{n} r_i \int_0^t P_1(x) ... Q_i^{/}(x) ... P_n(x) dx , \tag{5.5}$$

где $P_i(t)$ – вероятность безотказной работы;

$Q_i(t)$ – вероятность отказа *i* – ой подсистемы, *i* =1, 2, …, *n*.

Формула (5.5) является универсальной и может быть использована для различных систем независимо от вида резервирования и дисциплины обслуживания, в условиях наличия информации о законе распределения $P_i(t)$, так как возникает необходимость определения производной от $Q_i(t) = 1 - P_i(t)$.

Пример 5.1. Расчет надежности и риска восстанавливаемой технической системы на примере электрического силового привода.

Электрический силовой привод состоит из следующих основных элементов:

1. Потенциометрический датчик *RP*.
2. Стабилизирующее устройство *F*.
3. Полупроводниковый усилитель *A*.
4. Электромагнитный усилитель *G*.
5. Приводной двигатель *M*2.
6. Двигатель постоянного тока *M*1.
7. Редуктор *q*.

Показатели надежности и риска элементов представлены в таблице 5.1.

Таблица 5.1.

Показатели надежности и риска элементов электропривода

	Элементы электропривода						
	RP	*F*	*A*	*G*	*M*2	*M*1	*q*
Номер элемента	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
T, лет	10	8	9	11	15	10	12
$T_{В}$, час	5	4	6	8	18	18	4
r, у.е.	200	500	350	600	1500	1500	150

Вероятности отказов элементов ЭП имеют экспоненциальный закон распределения.

Определите показатели надежности и риска за время t = 2 года:

– исходного электропривода;

– электропривода с резервированием наименее надежного элемента (m = 1) (постоянно включенный резерв);

– электропривода с резервированием наименее надежного элемента (m = 1) (резерв замещением);

– электропривода с резервированием наименее надежного элемента (m = 1) (постоянно включенный резерв) при наличии восстановления;

– электропривода с резервированием наименее надежного элемента (m = 1) (резерв замещением) при наличии восстановления.

Решение.

1. Определение показателей надежности исходного электропривода и суммарного риска из-за его отказа.

Структурная схема исходного ЭП представляет собой основное соединение его элементов и представлена на рис.5.1.

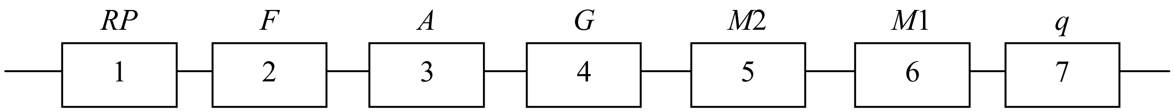


Рис. 5.1. Структурная схема ЭП

Найдем интенсивности отказов элементов

$$\lambda_1 = \frac{1}{10} = 0{,}1 \text{ год}^{-1},\ \lambda_2 = \frac{1}{8} = 0{,}125 \text{ год}^{-1},\ \lambda_3 = \frac{1}{9} = 0{,}111 \text{ год}^{-1},$$

$$\lambda_4 = \frac{1}{11} = 0{,}091 \text{ год}^{-1},\ \lambda_5 = \frac{1}{15} = 0{,}067 \text{ год}^{-1},\ \lambda_6 = \frac{1}{10} = 0{,}1 \text{ год}^{-1},$$

$$\lambda_7 = \frac{1}{12} = 0{,}083 \text{ год}^{-1}.$$

Суммарная интенсивность отказов ЭП равна

$$\Lambda_{ЭП} = \sum_{i=1}^{7} \lambda_i = 0{,}1 + 0{,}125 + 0{,}111 + 0{,}091 + 0{,}067 + 0{,}1 + 0{,}083 = 0{,}677 \text{ год}^{-1}.$$

По формуле из табл. 2.5. находим вероятность и среднее время безотказной работы исходного ЭП за время t = 2 года

$$P_{ЭП}(t) = e^{-\Lambda_{ЭП} t} = e^{-0{,}677 \cdot 2} = 0{,}258,$$

$$T_{ЭП} = \frac{1}{\Lambda_{ЭП}} = \frac{1}{0{,}677} = 1{,}477 \text{ год.}$$

Суммарный риск исходного ЭП определяется по формуле (5.2):

$$R(t) = \sum_{i=1}^{7} r_i \lambda_i \frac{1 - e^{-\Lambda_{ЭП}}}{\Lambda_{ЭП}} = 3366{,}4 \text{ у.е.}$$

2. Определение показателей надежности и риска электропривода с резервированием (m=1) (постоянно включенный резерв).

Анализ показателей надежности показывает, что наименее надежным элементом является стабилизирующее устройство F, так как оно имеет наибольшую интенсивность отказов. Поэтому все дальнейшие расчеты будем производить с учетом резервирования второго элемента идентичным по надежности элементом. Структурная схема ЭП с постоянно включенным резервом второго элемента представлена на рис. 5.2.

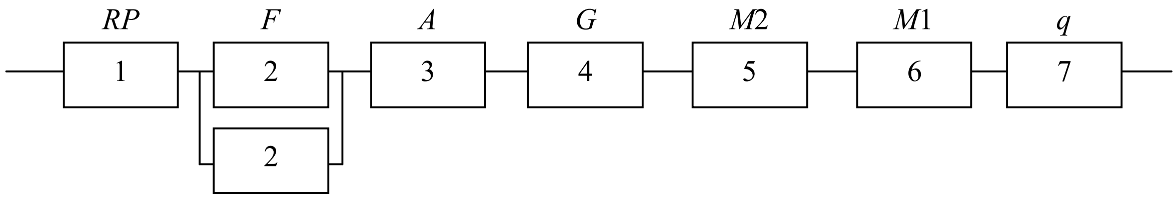


Рис. 5.2. Структурная схема ЭП с постоянно включенным резервом второго элемента

Вероятность безотказной работы каждой группы элементов с учетом экспоненциального закона распределения будет равна:

– *для второй группы* в соответствии с формулой (3.10):

$$P_2(t) = 1 - \left(1 - e^{-\lambda_2 t}\right)^2 = 0{,}951;$$

– *для остальных групп элементов:*

$$P_1(t) = e^{-\lambda_1 t} = 0{,}819; \qquad P_3(t) = e^{-\lambda_3 t} = 0{,}801;$$
$$P_4(t) = e^{-\lambda_4 t} = 0{,}834; \qquad P_5(t) = e^{-\lambda_5 t} = 0{,}875;$$
$$P_6(t) = e^{-\lambda_6 t} = 0{,}819; \qquad P_7(t) = e^{-\lambda_7 t} = 0{,}847.$$

Вероятность безотказной работы всего ЭП будет равна

$$P_{ЭП}(t) = \prod_{i=1}^{7} P_i(t) = e^{-\lambda_1 t}\left(1 - \left(1 - e^{-\lambda_2 t}\right)^2\right) e^{-\lambda_3 t} e^{-\lambda_4 t} e^{-\lambda_5 t} e^{-\lambda_6 t} e^{-\lambda_7 t} = 0{,}3153.$$

В соответствии с формулой (10) средняя наработка на отказ будет равна

$$T_1 = \int_0^\infty P(t)dt = \int_0^\infty e^{-\lambda_1 t}\left(1 - \left(1 - e^{-\lambda_2 t}\right)^2\right) e^{-\lambda_3 t} e^{-\lambda_4 t} e^{-\lambda_5 t} e^{-\lambda_6 t} e^{-\lambda_7 t} dt = 1{,}707 \text{ год.}$$

Для нахождения суммарного риска ЭП определим вероятности отказов и их производные

$$Q_1(t) = 1 - e^{-\lambda_1 t}; \qquad Q_1^{/}(t) = \lambda_1 e^{-\lambda_1 t};$$

$$Q_2(t) = \left(1 - e^{-\lambda_2 t}\right)^2; \qquad Q_2^{/}(t) = -2\lambda_2 e^{-\lambda_2 t}\left(e^{-\lambda_2 t} - 1\right);$$

$$Q_3(t) = 1 - e^{-\lambda_3 t}; \qquad Q_3^{/}(t) = \lambda_3 e^{-\lambda_3 t};$$

$$Q_4(t) = 1 - e^{-\lambda_4 t}; \qquad Q_4^{/}(t) = \lambda_4 e^{-\lambda_4 t};$$

$$Q_5(t) = 1 - e^{-\lambda_5 t}; \qquad Q_5^{/}(t) = \lambda_5 e^{-\lambda_5 t};$$

$$Q_6(t) = 1 - e^{-\lambda_6 t}; \qquad Q_6^{/}(t) = \lambda_6 e^{-\lambda_6 t};$$

$$Q_7(t) = 1 - e^{-\lambda_7 t}; \qquad Q_7^{/}(t) = \lambda_7 e^{-\lambda_7 t}.$$

По формуле (5.5) находим риск за время $t = 2$ года

$$R(2) = r_1 \int_0^2 Q_1^{/}(t) P_2(t) P_3(t) P_4(t) P_5(t) P_6(t) P_7(t) dt +$$

$$+ r_2 \int_0^2 P_1(t) Q_2^{/}(t) P_3(t) P_4(t) P_5(t) P_6(t) P_7(t) dt +$$

$$+ r_3 \int_0^2 P_1(t) P_2(t) Q_3^{/}(t) P_4(t) P_5(t) P_6(t) P_7(t) dt + r_4 \int_0^2 P_1(t) P_2(t) P_3(t) Q_4^{/}(t) P_5(t) P_6(t) P_7(t) dt +$$

$$+ r_5 \int_0^2 P_1(t) P_2(t) P_3(t) P_4(t) Q_5^{/}(t) P_6(t) P_7(t) dt + r_6 \int_0^2 P_1(t) P_2(t) P_3(t) P_4(t) P_5(t) Q_6^{/}(t) P_7(t) dt +$$

$$+ r_7 \int_0^2 P_1(t) P_2(t) P_3(t) P_4(t) P_5(t) P_6(t) Q_7^{/}(t) dt.$$

Подставив в выражение значение вероятностей безотказной работы и производные вероятностей отказов получим

$$R(2) = r_1 \int_0^2 \left(\lambda_1 e^{-\lambda_1 t}\right)\left(1 - \left(1 - e^{-\lambda_2 t}\right)^2\right) e^{-\lambda_3 t} e^{-\lambda_4 t} e^{-\lambda_5 t} e^{-\lambda_6 t} e^{-\lambda_7 t} dt +$$

$$+ r_2 \int_0^2 e^{-\lambda_1 t}\left(-2\lambda_2 e^{-\lambda_2 t}\left(e^{-\lambda_2 t} - 1\right)\right) e^{-\lambda_3 t} e^{-\lambda_4 t} e^{-\lambda_5 t} e^{-\lambda_6 t} e^{-\lambda_7 t} dt +$$

$$+ r_3 \int_0^2 e^{-\lambda_1 t}\left(1 - \left(1 - e^{-\lambda_2 t}\right)^2\right)(\lambda_3 e^{-\lambda_3 t}) e^{-\lambda_4 t} e^{-\lambda_5 t} e^{-\lambda_6 t} e^{-\lambda_7 t} dt +$$

$$+r_4\int_0^2 e^{-\lambda_1 t}\left(1-\left(1-e^{-\lambda_2 t}\right)^2\right)e^{-\lambda_3 t}(\lambda_4 e^{-\lambda_4 t})e^{-\lambda_5 t}e^{-\lambda_6 t}e^{-\lambda_7 t}dt+$$

$$+r_5\int_0^2 e^{-\lambda_1 t}\left(1-\left(1-e^{-\lambda_2 t}\right)^2\right)e^{-\lambda_3 t}e^{-\lambda_4 t}(\lambda_5 e^{-\lambda_5 t})e^{-\lambda_6 t}e^{-\lambda_7 t}dt+$$

$$+r_6\int_0^2 e^{-\lambda_1 t}\left(1-\left(1-e^{-\lambda_2 t}\right)^2\right)e^{-\lambda_3 t}e^{-\lambda_4 t}e^{-\lambda_5 t}e^{-\lambda_6 t}(\lambda_6 e^{-\lambda_7 t})dt+$$

$$+r_7\int_0^2 e^{-\lambda_1 t}\left(1-\left(1-e^{-\lambda_2 t}\right)^2\right)e^{-\lambda_3 t}e^{-\lambda_4 t}e^{-\lambda_5 t}e^{-\lambda_6 t}(\lambda_7 e^{-\lambda_7 t})dt.$$

Решение данного выражения достаточно громоздкое, поэтому рекомендуется выполнять его с помощью математических пакетов программ Derive, Mathcad и др. [8, 10]. В результате расчетов получим $R(2)=23{,}905+12{,}445+46{,}436+65{,}262+120{,}125+179{,}291+14{,}881=462{,}345$ у.е. Таким образом, можно сделать вывод, что резервирование второго элемента позволило незначительно повысить показатели надежности исходного ЭП, и в 7 раз сократить суммарный риск из-за ее отказа.

3. Определение показателей надежности и риска электропривода с резервированием (m = 1) (резерв замещением).

Структурная схема ЭП с резервированием (замещением) второго элемента представлена на рис. 5.3.

Вероятность безотказной работы групп элементов с учетом экспоненциального закона распределения будет равна:

– *для второй группы* в соответствии с формулой (3.21)

$$P_2(t)=\sum_{j=0}^{m}\frac{(\lambda_2 t)^j}{j!}e^{-\lambda_2 t}=\left(1+\lambda_2 t\right)e^{-\lambda_2 t}=0{,}974.$$

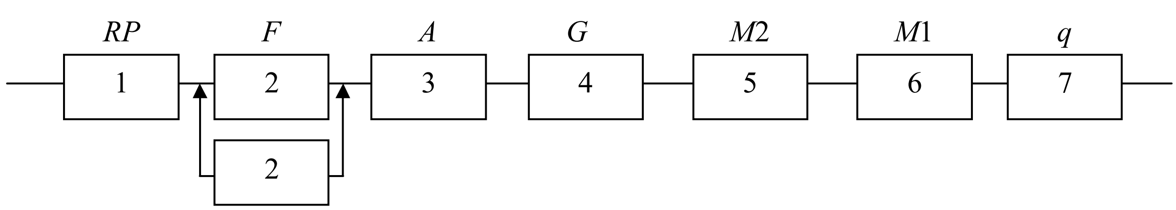


Рис. 5.3. Структурная схема ЭП с резервированием замещением второго элемента

– *для остальных групп элементов*, аналогично предыдущему случаю

$$P_1(t) = e^{-\lambda_1 t} = 0{,}819; \qquad P_3(t) = e^{-\lambda_3 t} = 0{,}801;$$
$$P_4(t) = e^{-\lambda_4 t} = 0{,}834; \qquad P_5(t) = e^{-\lambda_5 t} = 0{,}875;$$
$$P_6(t) = e^{-\lambda_6 t} = 0{,}819; \qquad P_7(t) = e^{-\lambda_7 t} = 0{,}847.$$

Вероятность безотказной работы всего ЭП будет равна

$$P_{ЭП}(t) = \prod_{i=1}^{7} P_i(t) = e^{-\lambda_1 t}\left((1+\lambda_2 t)e^{-\lambda_2 t}\right)te^{-\lambda_3 t}e^{-\lambda_4 t}e^{-\lambda_5 t}e^{-\lambda_6 t}e^{-\lambda_7 t} = 0{,}3228.$$

В соответствии с формулой (2.10) средняя наработка на отказ будет равна

$$T_1 = \int_0^\infty P(t)dt = \int_0^\infty e^{-\lambda_1 t}\left((1+\lambda_2 t)e^{-\lambda_2 t}\right)e^{-\lambda_3 t}e^{-\lambda_4 t}e^{-\lambda_5 t}e^{-\lambda_6 t}e^{-\lambda_7 t}dt = 1{,}75 \text{ года.}$$

Для нахождения суммарного риска ЭП определим вероятность отказа и ее производную для второй группы элементов

$$Q_2(t) = 1 - (1+\lambda_2 t)e^{-\lambda_2 t}, \qquad Q_2^{/}(t) = \lambda_2 e^{-\lambda_2 t}(1+\lambda_2 t) - \lambda_2 e^{-\lambda_2 t}.$$

Подставив в выражение (5.5) значение вероятностей безотказной работы и производные вероятностей отказов, получим

$$R(2) = r_1\int_0^2 \left(\lambda_1 e^{-\lambda_1 t}\right)\left((1+\lambda_2 t)e^{-\lambda_2 t}\right)e^{-\lambda_3 t}e^{-\lambda_4 t}e^{-\lambda_5 t}e^{-\lambda_6 t}e^{-\lambda_7 t}dt +$$
$$+ r_2\int_0^2 e^{-\lambda_1 t}\left(\lambda_2 e^{-\lambda_2 t}(1+\lambda_2 t) - \lambda_2 e^{-\lambda_2 t}\right)e^{-\lambda_3 t}e^{-\lambda_4 t}e^{-\lambda_5 t}e^{-\lambda_6 t}e^{-\lambda_7 t}dt +$$
$$+ r_3\int_0^2 e^{-\lambda_1 t}\left((1+\lambda_2 t)e^{-\lambda_2 t}\right)(\lambda_3 e^{-\lambda_3 t})e^{-\lambda_4 t}e^{-\lambda_5 t}e^{-\lambda_6 t}e^{-\lambda_7 t}dt +$$
$$+ r_4\int_0^2 e^{-\lambda_1 t}\left((1+\lambda_2 t)e^{-\lambda_2 t}\right)e^{-\lambda_3 t}(\lambda_4 e^{-\lambda_4 t})e^{-\lambda_5 t}e^{-\lambda_6 t}e^{-\lambda_7 t}dt +$$
$$+ r_5\int_0^2 e^{-\lambda_1 t}\left((1+\lambda_2 t)e^{-\lambda_2 t}\right)e^{-\lambda_3 t}e^{-\lambda_4 t}(\lambda_5 e^{-\lambda_5 t})e^{-\lambda_6 t}e^{-\lambda_7 t}dt +$$
$$+ r_6\int_0^2 e^{-\lambda_1 t}\left((1+\lambda_2 t)e^{-\lambda_2 t}\right)e^{-\lambda_3 t}e^{-\lambda_4 t}e^{-\lambda_5 t}\left(\lambda_6 e^{-\lambda_6 t}\right)e^{-\lambda_7 t})dt +$$

$$+r_7\int_0^2 e^{-\lambda_1 t}\left((1+\lambda_2 t)e^{-\lambda_2 t}\right)e^{-\lambda_3 t}e^{-\lambda_4 t}e^{-\lambda_5 t}e^{-\lambda_6 t}(\lambda_7 e^{-\lambda_7 t})dt.$$

В результате расчетов получим

$R(2)$ = 24,053 + 6,685 + 46,724 + 65,666 + 120,868 + 180,4 + 14,973 = 459,37 у.е.

Результаты определения суммарного риска позволяют сделать вывод, что резервирование замещением значительно минимизируют значение этого показателя по сравнению с исходным ЭП.

4. Определение показателей надежности и риска электропривода с резервированием (m = 1) (постоянно включенный резерв) при наличии восстановления.

Предположим, что количество ремонтных органов достаточно для того, чтобы группы элементов были независимы по восстановлению (неограниченное восстановление). В этом случае можно воспользоваться формулой (5.5). Поскольку восстановление элементов значительно повышает надежность ЭП и снижает риск из-за отказа элементов, то в резервной группе оставляем один резервный элемент. Таким образом, для ремонтируемого ЭП структурная схема имеет вид, показанный на рис. 5.2.

Поскольку все группы ЭП, за исключением второй, нерезервированные, то в соответствии с формулой (3.7) и (3.9.1) для постоянно включенного резерва получаем следующие формулы для вероятностей безотказной работы ЭП и среднего времени безотказной работы ЭП;

– *для второй группы* в соответствии с формулой (4.14)

$$P_2(t) = x_2 e^{\alpha_2 t} + y_2 e^{\beta_2 t},$$

где

$$\alpha_i = \frac{-(\mu_i + 3\lambda_i) + \sqrt{(\mu_i + 3\lambda_i)^2 - 8\lambda_i^2}}{2},$$

$$\beta_i = \frac{-(\mu_i + 3\lambda_i) - \sqrt{(\mu_i + 3\lambda_i)^2 - 8\lambda_i^2}}{2},$$

$$x_i = \frac{\alpha_i + \mu_i + 3\lambda_i}{\alpha_i - \beta_i}, \qquad y_i = \frac{\beta_i + \mu_i + 3\lambda_i}{\beta_i - \alpha_i},$$

где $\mu = \dfrac{1}{T_{\text{В}i}}$ час$^{-1}$ – интенсивность восстановления элементов i-й группы элементов ЭП. Для $\mu_2 = \frac{1}{4}\text{час}^{-1} = \frac{1}{4\cdot 24}\text{сут}^{-1} = \frac{1}{4\cdot 24\cdot 365}\text{год}^{-1} =$ $= 0{,}00003\ \text{год}^{-1}$.

В результате получим:

$$\alpha_2 = \frac{-(0{,}00003 + 3\cdot 0{,}125) + \sqrt{(0{,}00003 + 3\cdot 0{,}125)^2 - 8\cdot 0{,}125^2}}{2} = -0{,}125,$$

$$\beta_2 = \frac{-(0{,}00003 + 3\cdot 0{,}125) - \sqrt{(0{,}00003 + 3\cdot 0{,}125)^2 - 8\cdot 0{,}125^2}}{2} = -0{,}25,$$

$$x_2 = \frac{-0{,}125 + 0.00003 + 3\cdot 0{,}125}{-0{,}125 - (-0{,}25)} = 1{,}999,\ y_2 = \frac{-0{,}25 + 0{,}00003 + 3\cdot 0{,}125}{-0{,}25 - (-0{,}125)} = -0{,}999$$

$$P_2(t) = 1{,}999\cdot e^{-0{,}125\cdot 2} + (-0{,}999)e^{-0{,}25\cdot 2} = 0{,}951;$$

– *для остальных групп элементов*, аналогично предыдущему случаю

$$P_1(t) = e^{-\lambda_1 t} = 0{,}819; \qquad P_3(t) = e^{-\lambda_3 t} = 0{,}801;$$
$$P_4(t) = e^{-\lambda_4 t} = 0{,}834; \qquad P_5(t) = e^{-\lambda_5 t} = 0{,}875;$$
$$P_6(t) = e^{-\lambda_6 t} = 0{,}819; \qquad P_7(t) = e^{-\lambda_7 t} = 0{,}847.$$

Вероятность безотказной работы всего ЭП будет равна

$$P_{ЭП}(t) = \prod_{i=1}^{7} P_i(t) = e^{-\lambda_1 t}\left(x_2 e^{\alpha_2 t} + y_2 e^{\beta_2 t}\right)e^{-\lambda_3 t}e^{-\lambda_4 t}e^{-\lambda_5 t}e^{-\lambda_6 t}e^{-\lambda_7 t} = 0{,}3153.$$

В соответствии с формулой (2.10) средняя наработка на отказ будет равна

$$T_1 = \int_0^\infty P(t)dt = \int_0^\infty e^{-\lambda_1 t}\left(x_2 e^{\alpha_2 t} + y_2 e^{\beta_2 t}\right)e^{-\lambda_3 t}e^{-\lambda_4 t}e^{-\lambda_5 t}e^{-\lambda_6 t}e^{-\lambda_7 t}dt = 1{,}707\ \text{год}.$$

Аналогично, используя (5.5) , найдем риск системы в момент времени $t = 2$ года, определив сначала вероятность отказа и производную для второй группы элементов

$$Q_2(t) = 1 - x_2 e^{\alpha_2 t} - y_2 e^{\beta_2 t}, \qquad Q_2^{/}(t) = \alpha_2 x_2 e^{-\alpha_2 t} + \beta_2 y_2 e^{-\beta_2 t},$$

$$R(2) = r_1\int_0^2 \left(\lambda_1 e^{-\lambda_1 t}\right)\left(x_2 e^{\alpha_2 t} + y_2 e^{\beta_2 t}\right)e^{-\lambda_3 t}e^{-\lambda_4 t}e^{-\lambda_5 t}e^{-\lambda_6 t}e^{-\lambda_7 t}dt +$$

$$+r_2\int_0^2 e^{-\lambda_1 t}\left(-\alpha_2 x_2 e^{\alpha_2 t}-\beta_2 y_2 e^{\beta_2 t}\right)e^{-\lambda_3 t}e^{-\lambda_4 t}e^{-\lambda_5 t}e^{-\lambda_6 t}e^{-\lambda_7 t}dt+$$

$$+r_3\int_0^2 e^{-\lambda_1 t}\left(x_2 e^{\alpha_2 t}+y_2 e^{\beta_2 t}\right)(\lambda_3 e^{-\lambda_3 t})e^{-\lambda_4 t}e^{-\lambda_5 t}e^{-\lambda_6 t}e^{-\lambda_7 t}dt+$$

$$+r_4\int_0^2 e^{-\lambda_1 t}\left(x_2 e^{\alpha_2 t}+y_2 e^{\beta_2 t}\right)e^{-\lambda_3 t}(\lambda_4 e^{-\lambda_4 t})e^{-\lambda_5 t}e^{-\lambda_6 t}e^{-\lambda_7 t}dt+$$

$$+r_6\int_0^2 e^{-\lambda_1 t}\left(x_2 e^{\alpha_2 t}+y_2 e^{\beta_2 t}\right)e^{-\lambda_3 t}e^{-\lambda_4 t}(\lambda_6 e^{-\lambda_6 t})e^{-\lambda_5 t}e^{-\lambda_7 t}dt+$$

$$+r_7\int_0^2 e^{-\lambda_1 t}\left(x_2 e^{\alpha_2 t}+y_2 e^{\beta_2 t}\right)e^{-\lambda_3 t}e^{-\lambda_4 t}e^{-\lambda_5 t}e^{-\lambda_6 t}(\lambda_7 e^{-\lambda_7 t})dt.$$

В результате расчетов получим

$R(2)$ = 23,905 + 12,445 + 46,436 + 65,262 + 120,125 + 179,291 + 14,881 = = 462,345 у.е.

5. Определение показателей надежности и риска электропривода с резервированием ($m = 1$) (резерв замещением) при наличии восстановления.

В соответствии с формулой (4.16) для резерва замещением получим следующие формулы для вероятности безотказной работы:

$$P_1(t)=e^{-\lambda_1 t};\qquad P_2(t)=x_2 e^{\alpha_2 t}+y_2 e^{\beta_2 t};\qquad P_3(t)=e^{-\lambda_3 t};$$

$$P_4(t)=e^{-\lambda_4 t};\qquad P_5(t)=e^{-\lambda_5 t};\qquad P_6(t)=e^{-\lambda_6 t};\qquad P_7(t)=e^{-\lambda_7 t},$$

где

$$\alpha_2=\frac{-(\mu_2+2\lambda_2)+\sqrt{(\mu_2+2\lambda_2)^2-4\lambda_2^2}}{2},$$

$$\beta_2=\frac{-(\mu_2+2\lambda_2)-\sqrt{(\mu_2+2\lambda_2)^2-4\lambda_2^2}}{2},$$

$$x_2=\frac{\alpha_2+\mu_2+2\lambda_2}{\alpha_2-\beta_2},\ y_2=\frac{\beta_2+\mu_2+2\lambda_2}{\beta_2-\alpha_2}.$$

Таким образом, подставив исходные данные, получаем:

$\alpha_2=-123{,}08$, $\beta_2=-126{,}95$, $x_2=32{,}78$, $y_2=-31{,}78$, $P_2(t)=0{,}9735$.

Значения вероятностей безотказной работы остальных элементов ЭП аналогичны предыдущим результатам вычислений. Вероятность безотказной работы всего ЭП будет равна

$$P_{ЭП}(t)=\prod_{i=1}^{7}P_i(t)=e^{-\lambda_1 t}\left(x_2 e^{\alpha_2 t}+y_2 e^{\beta_2 t}\right)e^{-\lambda_3 t}e^{-\lambda_4 t}e^{-\lambda_5 t}e^{-\lambda_6 t}e^{-\lambda_7 t}=0{,}323.$$

В соответствии с формулой (2.10) средняя наработка на отказ будет равна

$$T_1=\int_0^{\infty}P(t)dt=\int_0^{\infty}e^{-\lambda_1 t}\left(x_2 e^{\alpha_2 t}+y_2 e^{\beta_2 t}\right)e^{-\lambda_3 t}e^{-\lambda_4 t}e^{-\lambda_5 t}e^{-\lambda_6 t}e^{-\lambda_7 t}dt=1{,}75 \text{ года.}$$

Для нахождения суммарного риска ЭП определим вероятность отказа и ее производную для второй группы элементов:

$$Q_2(t)=1-x_2 e^{\alpha_2 t}-y_2 e^{\beta_2 t}, \qquad Q_2^{/}(t)=\alpha_2 x_2 e^{-\alpha_2 t}+\beta_2 y_2 e^{-\beta_2 t}.$$

Подставив в выражение (5.5) значение вероятностей безотказной работы и производные вероятностей отказов получим:

$$\begin{aligned}
R(2)&=r_1\int_0^2\left(\lambda_1 e^{-\lambda_1 t}\right)\left(x_2 e^{\alpha_2 t}+y_2 e^{\beta_2 t}\right)e^{-\lambda_3 t}e^{-\lambda_4 t}e^{-\lambda_5 t}e^{-\lambda_6 t}e^{-\lambda_7 t}dt+\\
&+r_2\int_0^2 e^{-\lambda_1 t}\left(-\alpha_2 x_2 e^{\alpha_2 t}-\beta_2 y_2 e^{\beta_2 t}\right)e^{-\lambda_3 t}e^{-\lambda_4 t}e^{-\lambda_5 t}e^{-\lambda_6 t}e^{-\lambda_7 t}dt+\\
&+r_3\int_0^2 e^{-\lambda_1 t}\left(x_2 e^{\alpha_2 t}+y_2 e^{\beta_2 t}\right)(\lambda_3 e^{-\lambda_3 t})e^{-\lambda_4 t}e^{-\lambda_5 t}e^{-\lambda_6 t}e^{-\lambda_7 t}dt+\\
&+r_4\int_0^2 e^{-\lambda_1 t}\left(x_2 e^{\alpha_2 t}+y_2 e^{\beta_2 t}\right)e^{-\lambda_3 t}(\lambda_4 e^{-\lambda_4 t})e^{-\lambda_5 t}e^{-\lambda_6 t}e^{-\lambda_7 t}dt+\\
&+r_6\int_0^2 e^{-\lambda_1 t}\left(x_2 e^{\alpha_2 t}+y_2 e^{\beta_2 t}\right)e^{-\lambda_3 t}e^{-\lambda_4 t}(\lambda_6 e^{-\lambda_6 t})e^{-\lambda_5 t}e^{-\lambda_7 t}dt+\\
&+r_7\int_0^2 e^{-\lambda_1 t}\left(x_2 e^{\alpha_2 t}+y_2 e^{\beta_2 t}\right)e^{-\lambda_3 t}e^{-\lambda_4 t}e^{-\lambda_5 t}e^{-\lambda_6 t}(\lambda_7 e^{-\lambda_7 t})dt.
\end{aligned}$$

В результате расчетов получим:

$R(2)$ = 24,053 + 6,685 + 46,724 + 65,666 + 120,868 + 180,4 + 14,973= 459,37 у.е.

По результатам проведенных исследований составлена табл. 5.2, в которой содержатся значения показателей надежности и риска ЭП для различных структурных схем и дисциплин обслуживания. На основании данной таблицы необходимо сделать вывод о целесообразности повышения надежности ЭП путем различных видов резервирования, при этом резерв замещением дает более ощутимые результаты по сравнению с постоянно включенным резервом.

В таблице результаты приведены с точностью до шести знаков после запятой, с целью продемонстрировать повышение надежности ЭП при наличии восстановления наименее надежного элемента в случае отказа. Такое повышение является незначительным, так как мероприятия по повышению надежности необходимо проводить комплексно, с использованием различных способов.

Таблица 5.2

Показатели надежности и технического риска ЭП
в течение времени t =2 года

Структура ЭП	Показатели надежности		Технический риск $R(t)$, у.е.
	$P(t)$	T_1, лет	
Отсутствие восстановления			
Исходный ЭП	0,258	1,477	3366,4
ЭП с постоянно включенным резервом стабилизирующего устройства *F,* (m = 1)	0,315320197	1,707327	462,345
ЭП с резервом замещением стабилизирующего устройства *F,* (m=1)	0,3227567	1,749835	459,3696
Наличие восстановления			
ЭП с постоянно включенным резервом стабилизирующего устройства *F,* (m = 1)	0,3153205	1,70733	462,34493
ЭП с резервом замещением стабилизирующего устройства *F*, (m = 1)	0,322757	1,749837	459,3695

В табл. 5.3 представлены данные аналогичного расчета показателей надежности ЭП при условии дополнительного резервирования следующего наименее надежного элемента – полупроводникового усилителя *А* (элемент № 2).

Таблица 5.3

Показатели надежности и технического риска ЭП в течение времени t=2 года

Структура ЭП	Показатели надежности		Технический риск $R(t)$, у.е.
	$P(t)$	T_1, лет	
Отсутствие восстановления			
ЭП с постоянно включенным резервом стабилизирующего устройства *F* и полупроводникового усилителя *A*, (m=1)	0,378096	1,97187	459,3141
ЭП с резервом замещением стабилизирующего устройства *F* и полупроводникового усилителя *A*, (m = 1)	0,3944087	2,08145	454,5004
Наличие восстановления			
ЭП с постоянно включенным резервом стабилизирующего устройства *F* и полупроводникового усилителя *A*, (m = 1)	0,3780961	1,97188	459,31339
ЭП с резервом замещением стабилизирующего устройства *F* и полупроводникового усилителя *A*, (m = 1)	0,397709	2,08146	454,5002

Следует иметь в виду, что рассмотренная методика расчета технического риска справедлива при установившемся потоке отказов, т.е. для долго работающих сложных систем, и только в тех случаях, когда наработка на отказ элементов распределена по экспоненциальному закону.

Контрольные вопросы

1. Какие виды риска вы знаете?
2. Что понимается под техническим риском и единицы его измерения?
3. По какой формуле определяется технический риск невосстанавливаемого объекта?
4. Как влияет надежность технической системы на ее технический риск?

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. ГОСТ 27.002-2009. Надежность в технике. Основные понятия. Термины и определения. – Введ. 2009 – 12 –9. – М.: Стандартинформ, 2011. – 32 с.

2. Половко А.М. Основы теории надежности: Практикум / А.М. Половко, С.В. Гуров. – СПб.: БХВ–Петербург, 2006. – 560 с.

3. Половко А.М. Основы теории надежности: Учебное пособие / А.М. Половко, С.В. Гуров. – 2-е изд. перераб. и доп. – СПб.: БХВ–Петербург, 2006. – 704 с.

4. Черкесов Г.Н. Надежность аппаратно-программных комплексов : Учебное пособие / Черкесов Г.Н. – СПб.: Питер, 2005. – 479 с.

5. Вентцель Е.С. Теория вероятностей и ее инженерные приложения. Уч.пособие для втузов / Вентцель Е.С., Овчаров Л.А. – 2–е изд., – М.: Высш. школа, 2000. – 480 с.

6. Вентцель Е.С. Теория случайных процессов и ее инженерные приложения. Учеб. пособие для втузов / Вентцель Е.С., Овчаров Л.А. – 2-е изд., – М.: Высш. школа, 2000. – 383 с.

7. Айвазян С.А. Прикладная статистика и основы эконометрики. Учебник для вузов / Айвазян С.А., Мхитарян В.С. – М.: ЮНИТИ, 1998. – 1022 с.

8. Макаров Е.Г. Инженерные расчеты в Mathcad. Учебный курс / Макаров Е.Г. – СПб.: Питер, 2003. – 448 с.

9. Кузнецов Н.Л. Сборник задач по надежности электрических машин: учебное пособие / Кузнецов Н.Л. – М.: Издательский дом МЭИ, 2008. – 408 с.

10. Электрический привод. Учебник / Под ред. Погодицкого О.В. – М.: Министерство обороны РФ. 2010. – 820 с.

11. ГОСТ Р 51897-2002. Менеджмент риска. Термины и определения. – Введ. 2003 – 01 –01. – М.: Изд-во стандартов, 2003. – 12 с.

12. Малкин В.С. Надежность технических систем и техногенный риск / Малкин В.С. – Ростов н/Д: Феникс, 2010. – 432с.

13. ГОСТ Р 51901-2002. Управление надежностью. Анализ риска технологических систем. – Введ. 2002 – 06–07. – М.: Изд-во стандартов, 2002. – 28 с.

14. ГОСТ Р 51901. 6-2005. Менеджмент риска. Программа повышения надежности. – Введ. 2005 – 09 –30. – М.: Стандартинформ, 2006. – 31 с.

СОДЕРЖАНИЕ

Учебное пособие

ОСНОВЫ ТЕОРИИ НАДЕЖНОСТИ
ЭЛЕКТРОМЕХАНИЧЕСКИХ КОМПЛЕКСОВ

Учебное пособие

Составили: **Литвиненко Руслан Сергеевич,**
Павлов Павел Павлович

Кафедра «Электротехнические комплексы и системы» КГЭУ

Редактор издательского отдела *К.В. Аршинова*
Компьютерная верстка *Т.И. Лунченкова*

Подписано в печать
Формат 60×84/16. Бумага ВХИ. Гарнитура «Times». Вид печати РОМ.
Усл. печ. л. 5,34. Уч.-изд. л. 5,93. Тираж 500 экз. Заказ №

Редакционно-издательский отдел КГЭУ
420066, Казань, Красносельская, 51