Задача 1. Найти поток векторного поля $F(M) = \{x;\ y + 2yz;\ -z^2\}$ через внешнюю сторону замкнутой поверхности G: $x^2 + y^2 + z^2 = 4$.

Решение. Поверхность G представляет собой сферу радиуса 2 с центром в начале координат. Эта поверхность замкнута, поэтому для вычисления потока можно применить формулу Остроградского-Гаусса. Вычисляем дивергенцию векторного поля:

$$div\, F(M) = P'_x(M) + Q'_y(M) + R'_z(M) = 1 + 1 + 2z - 2z = 2.$$

Тогда поток $\Pi_G = \iiint\limits_T div\, F(M)dxdydz = \iiint\limits_T 2dxdydz$, где T – тело, ограниченное поверхностью G. Переходя в интеграле к сферическим координатам $\{x = r\sin\theta\cos\varphi,\ y = r\sin\theta\sin\varphi,\ z = r\cos\theta\}$, и учитывая область изменения новых координат, а также Якобиан, получаем:

$$\Pi_G = 2\int_0^{\pi}\sin\theta\, d\theta\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^2 r^2\,dr = 2(-\cos\theta)\Big|_0^{\pi}\varphi\Big|_0^{2\pi}\frac{r^3}{3}\Big|_0^2 = 64\pi/3.$$

Ответ: $64\pi/3$.

Задача 2. Найти циркуляцию векторного поля $F = y\,i - x\,j + z\,k$ вдоль окружности $x = r\cos t, y = r\sin t, z = 1$ в направлении против часовой стрелки.

Решение: Циркуляция – это криволинейный интеграл второго рода:

$$Ц = \oint_L ydx - xdy + zdz\,.$$

Если $x = -r\cos t$, то $dx = -r\sin t\,dt$; если $y = r\sin t$, то $dy = r\cos t\,dt$; если $z = 1$, то $dz = 0$, тогда

$$Ц = \int_0^{2\pi}[-r^2\sin^2 t - r^2\cos^2 t]dt = -r^2\int_0^{2\pi}dt = -r^2 t\Big|_0^{2\pi} = -2\pi r^2.$$

Ответ: $-2\pi r^2$.