1. Проверить, что уравнению в частных производных

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{2z}{x}$$

удовлетворяет функция $z = \frac{1}{x}\varphi(y-x) + \varphi'(y-x)$, где φ — произвольная функция.

2. Для $z = f(x^2-y)+g(x^2+y)$, где f и g — произвольные функции, доказать, что

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial x} = 4x^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$$

3. Найти решение уравнения $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = x - y.$

4. Решить уравнение $\frac{\partial^4 z}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 z}{\partial y^4} = 2\frac{\partial^4 z}{\partial x^2 \partial y^2}.$

5. Показать, что уравнение $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{1}{k}\frac{\partial z}{\partial t}$ имеет решение вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n \cos(nx+\varepsilon_n)e^{-kn^2 t}.$$

6. Найти частные решения уравнений

(i) $(D^2 - D')z = 2y - x^2,$

(ii) $(D^2 - D')z = e^{2x-y},$

Продолжение на следующей странице

(iii) $(D^2 - D')z = A\cos(lx + my)$, где A, l, m — постоянные.

7. Решить следующие уравнения:

(i) $r + s - 2t = e^{x+y}$,

(ii) $r - s + 2q - z = x^2y^2$,

(iii) $r + s - 2t - p - 2q = 0$.

8. Решить следующие уравнения:

(i) $\dfrac{\partial^3 z}{\partial x^3} - 3\dfrac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} + 4\dfrac{\partial^3 z}{\partial y^3} = e^{x+2y}$,

(ii) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \sin x \cos 2y$,

(iii) $(D^3 - 7DD'^2 - 6D'^3)z = \sin(x + 2y) + e^{2x+y}$,

(iv) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 3\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + 2\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = x + y$,

(v) $r - 4s + 4t = e^{2x+y}$,

(vi) $(2D^2 - 5DD' + 2D'^2)z = 5\sin(2x + y)$,

(vii) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - 6\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = y\cos x$.

9. Решить следующие уравнения в частных производных:

(i) $\dfrac{\partial^3 z}{\partial x^3} - 4\dfrac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} + 4\dfrac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} = 0$,

(ii) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \sin x$,

(iii) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 3\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + 2\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 12xy$,

(iv) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = x^2 + xy + y^2$,

(v) $4r + 12s + 9t = e^{3x-2y}$,

Продолжение на следующей странице

(vi) $$\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} - 5\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} + 6\frac{\partial^3 z}{\partial y^3} = e^x,$$

(vii) $$r + 2s + t = 2(y - x) + \sin(x - y).$$

10. Решить следующие уравнения:

(i) $$z(qs - pt) = pq^2,$$

(ii) $$pq = x(ps - qr),$$

(iii) $$q^2 r - 2pqs + p^2 t = 0,$$

(iv) $$r + 4s + t + rt - s^2 = 2,$$

(v) $$z^2(rt - s^2) + z(1 + q^2)r - 2pqzs + \\ + z(1 + p^2)t + 1 + p^2 + q^2 = 0,$$

где $r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $s = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, $t = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, $p = \frac{\partial z}{\partial x}$, $q = \frac{\partial z}{\partial y}$.

11. Привести уравнение $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$ к канонической форме.

12. Привести следующие уравнения к канонической форме:

(i) $$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2},$$

(ii) $$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$$

и таким образом их решить.

13. Показать, как найти решение уравнения $s = f(x, y)$, содержащее две произвольные функции.

14. Найти решение уравнения в частных производных

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{1}{x + y},$$

определенное при $x, y > 0$, $xy > 1$, и такое, что

$$z = 0, \quad \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2y}{x + y} \quad \text{на ветви гиперболы} \quad xy = 1.$$