Рассмотрим находящийся под током кабель длины l м, имеющий активное сопротивление R ом/м, индуктивность L гн/м, емкостное сопротивление C ф/м и проводимость изоляции G $[\text{ом}\cdot\text{м}]^{-1}$. Пусть мгновенные напряжение и ток в момент времени t в точке P, находящейся на расстоянии x от передающего конца O, равны $v(x,t)$ и $i(x,t)$ соответственно. Рассмотрим малый участок PQ кабеля длины δx.

Поскольку падение напряжения на сегменте δx равно сумме падений напряжения вследствие активного и индуктивного сопротивлений, мы имеем соотношение

$$-\delta v = iR\delta x + L\frac{\partial i}{\partial t}\delta x$$

или

$$-\frac{\partial v}{\partial x} = Ri + L\frac{\partial i}{\partial t} \tag{4.6.1}$$

в пределе при $\delta x \to 0$.

Аналогично, потери тока между точками P и Q складываются из потерь на емкостное сопротивление и на проводимость изоляции, следовательно,

$$-\delta i = \frac{C\partial v}{\partial t}\delta x + Gv\delta x$$

или

$$-\frac{\partial i}{\partial x} = \frac{C\partial v}{\partial t} + Gv. \tag{4.6.2}$$

Исключая i из соотношений (4.6.1) и (4.6.2), имеем уравнение

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = LC\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + (LG + RC)\frac{\partial v}{\partial t} + RGv. \tag{4.6.3}$$

С другой стороны, исключая v из (4.6.1) и (4.6.2), получаем:

$$\frac{\partial^2 i}{\partial x^2} = LC\frac{\partial^2 i}{\partial t^2} + (LG + RC)\frac{\partial i}{\partial t} + RGi. \tag{4.6.4}$$

Уравнения (4.6.3) и (4.6.4) называются *уравнениями телефона*. При $L = G = 0$ уравнения (4.6.3) и (4.6.4) принимают вид

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = RC\frac{\partial v}{\partial t} \tag{4.6.5}$$

и

$$\frac{\partial^2 i}{\partial x^2} = RC\frac{\partial i}{\partial t}. \tag{4.6.6}$$

Эти уравнения известны как *уравнения телеграфа*[1].

Если $R = G = 0$, уравнения (4.6.3) и (4.6.4) принимают вид

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{1}{k^2}\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \quad k^2 = \frac{1}{LC} \tag{4.6.7}$$

и

$$\frac{\partial^2 i}{\partial x^2} = \frac{1}{k^2}\frac{\partial^2 i}{\partial t^2}, \quad k^2 = \frac{1}{LC} \tag{4.6.8}$$

Эти уравнения называются *уравнениями радио*.

[1] В отечественной литературе принят термин «телеграфные уравнения». — *Прим. ред.*

Пример 4.6.1. Линия передачи длиной 1000 км находится изначально в установившемся режиме с потенциалом 1300 вольт на передающем конце ($x = 0$) и 1200 вольт на приемном конце ($x = 1000$). Приемный конец линии внезапно заземляется, но на источнике сохраняется потенциал 1300 вольт. Предполагая индуктивность и проводимость изоляции пренебрежимо малыми, найти потенциал $v(x, t)$.

Решение. Уравнение линии передачи имеет вид

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = RC\frac{\partial v}{\partial t}\,. \tag{4.6.9}$$

Пусть v_s — начальное установившееся напряжение, удовлетворяющее уравнению $\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0$, из которого следует, что

$$v_s = 1300 - \frac{x}{10} = v(x, 0). \tag{4.6.10}$$

Пусть также v'_s — конечное установившееся напряжение (после заземления приемного конца), когда стационарные условия в конце концов достигнуты, следовательно, мы имеем

$$v'_s = 1300 - 1{,}3x,$$

откуда

$$v(x,t) = v'_s + v_t(x,t),$$

где $v_t(x,t)$ — переходная часть. Таким образом,

$$v(x,t) = 1300 - 1{,}3x + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \exp\left(\frac{-n^2\pi^2 t}{l^2 RC}\right)\sin\frac{n\pi x}{l}\,, \tag{4.6.11}$$

где $l = 1000$ км.

Полагая $t = 0$, мы имеем из равенств (4.6.10) и (4.6.11):

$$1300 - 0{,}1x = v(x,0) = 1300 - 1{,}3x + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{l}\,,$$

т. е.

$$1{,}2x = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{l}\,,$$

где коэффициенты легко вычисляются:

$$b_n = \frac{2}{l}\int_0^l 1{,}2x \sin\frac{n\pi x}{l}\,dx = \frac{2400}{n\pi}(-1)^{n+1}.$$

Итак,

$$v(x,t) = 1300 - 1{,}3x + \frac{2400}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\exp\left(\frac{-n^2\pi^2 t}{1000^2 RC}\right)\sin\frac{n\pi x}{1000}.$$