Пример 5.11.1. С помощью метода разделения переменных показать, что уравнение $\nabla^2 U = 0$ имеет решения вида $A\exp(\pm nx \pm iny)$, где A и n — постоянные. Отсюда вывести, что функции вида

$$U(x,y) = \sum_r A_r e^{-r\pi x/a} \sin\frac{r\pi y}{a}, \quad x \geqslant 0, \quad 0 \leqslant y \leqslant a,$$

где A_r — постоянные, являются гармоническими функциями на плоскости, удовлетворяющими условиям $U(x,0) = 0$, $U(x,a) = 0$, $U(x,y) \to 0$ при $x \to \infty$.

Решение. Данное уравнение имеет вид:

$$\nabla^2 U = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0. \tag{5.11.1}$$

Пусть

$$U = X(x)Y(y). \tag{5.11.2}$$

Тогда мы имеем:

$$\frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2} = -\frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2} = n^2,$$

откуда

$$\frac{d^2X}{dx^2} - n^2 X = 0 \quad \Rightarrow \quad X = A_1 e^{\pm nx}$$

и

$$\frac{d^2Y}{dy^2} + n^2 Y = 0 \quad \Rightarrow \quad Y = A_2 e^{\pm iny},$$

т.е. $U = Ae^{\pm nx \pm iny}$, где $A = A_1 A_2$ — произвольная постоянная. Точнее,

$$U = \sum_n \left(A_n e^{nx} + B_n e^{-nx}\right)\left[C_n \cos(ny) + D_n \sin(ny)\right],$$

где A_n, B_n, C_n и D_n — константы.

(i) Поскольку $U(x,y) \to 0$ при $x \to \infty$, мы имеем: $A_n = 0$ для всех n, откуда

$$U = \sum_n B_n e^{-nx}\left(C_n \cos(ny) + D_n \sin(ny)\right).$$

(ii) Из условия $U(x,0) = 0$ вытекает, что $C_n = 0$, $\forall n$, следовательно

$$U = \sum_n B_n D_n e^{-nx} \sin(ny).$$

(iii) Наконец, в силу условия $U(x,a) = 0$ имеем:

$$\sum_n B_n D_n e^{-nx} \sin(na) = 0,$$

откуда

$$\sin(na) = 0, \quad \text{поскольку} \quad B_n D_n \neq 0, \ \forall n.$$

Следовательно,

$$na = r\pi, \quad r \in \mathbb{Z} \quad \Rightarrow \quad n = \frac{r\pi}{a}, \quad r \in \mathbb{Z}.$$

Окончательно имеем:

$$U(x,y) = \sum_{r \in \mathbb{Z}} A_r e^{-r\pi x/a} \sin\frac{r\pi y}{a},$$

где A_r — новые произвольные постоянные.