Занятие № 8

ПСЕВДОСЛУЧАЙНЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ И ПРОЦЕДУРЫ ИХ МАШИННОЙ ГЕНЕРАЦИИ

При статистическом моделировании систем одним из основных вопросов является учет стохастических воздействий. Количество случайных чисел, используемых для получения статистически устойчивой оценки характеристики процесса функционирования системы S при реализации моделирующего алгоритма на ЭВМ. Количество случайных чисел колеблется в достаточно широких пределах в зависимости от:

1. класса объекта моделирования;
2. вида оцениваемых характеристик;
3. необходимой точности и достоверности результатов моделирования. Результаты статистического моделирования существенно зависят от качества исходных (базовых) последовательностей случайных чисел.

На практике используются три основных способа генерации случайных чисел:

- аппаратный (физический);
- табличный (файловый);
- алгоритмический (программный).

Аппаратный способ. Генерация случайных чисел вырабатываются специальной электронной приставкой — генератором (датчиком) случайных чисел,— служащей в качестве одного из внешних устройств ЭВМ. Реализация этого способа генерации не требует дополнительных вычислительных операций ЭВМ по выработке случайных чисел, а необходима только операция обращения к внешнему устройству (датчику). В основе лежит физический эффект, лежащего в основе таких генераторов чисел, чаще всего используются шумы в электронных и полупроводниковых приборах, явления распада радиоактивных элементов и т. д.

Достоинства:

Запас чисел не ограничен;

Расходуется мало операций;

Не занимается место в памяти .

Недостатки:

Требуется периодическая проверка;

Нельзя воспроизводить последовательности;

Используется специальное устройство;

Необходимы меры по обеспечению стабильности.

Табличный способ. Случайные числа, представленные в виде таблицы, помещаются в память ЭВМ. Этот способ получения случайных чисел обычно используют при сравнительно небольшом объеме таблицы и файла чисел.

Достоинства:

Требуется однократная проверка;

Можно воспроизводить последовательности.

Недостатки:

Запас чисел ограничен;

Много места в ОЗУ;

Необходимо время для обращения к памяти.

Алгоритмический способ. Способ получения последовательности случайных чисел основанный на формировании случайных чисел в ЭВМ с помощью специальных алгоритмов и реализующих их программ. Каждое случайное число вычисляется с помощью соответствующей программы по мере возникновения потребностей при моделировании системы на ЭВМ.

Достоинства:

Требуется однократная проверка;

Многократная воспроизводимость последовательности чисел;

Мало места в памяти и нет внешних устройств.

Недостатки:

Запас чисел ограничен периодом последовательности;

Затраты машинного времени.

Программная имитация случайных воздействий сводится к генерированию некоторых стандартных процессов и их последующего функционального преобразования. В качестве базового может быть принят любой удобный для моделирования конкретной системы S процесс (например, пуассоновский поток при моделировании Q-схемы). При дискретном моделирований базовым процессом является последовательность чисел $\{x_i\} = x_0, x_1, x_3, ..., x_N$, которые представляют реализации независимых, равномерно распределенных на интервале (0, 1) случайных величин $\{\xi_i\} = \xi_1, \xi_2, \xi_3, ..., \xi_N$. В статистических терминах - повторная выборка из равномерно распределенной на интервале (0, 1) генеральной совокупности значений величины ξ.

Непрерывная случайная величина ξ имеет равномерное распределение в интервале (а, Ь), если ее функции плотности (а) и функция распределения (б) примет вид (Рис. 1):

$$f(x) = \begin{cases} 1/(b-a), & a \leqslant x \leqslant b, \\ 0, & x < a,\ x > b; \end{cases}$$

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < a, \\ (x-a)/(b-a), & a \leqslant x \leqslant b, \\ 1, & x > b. \end{cases}$$

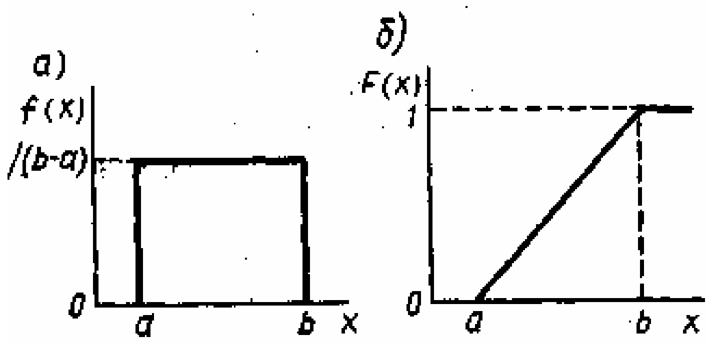

Рис. 4.9. Равномерное распределение случайной величины

Рис.1

Числовые характеристики случайной величины ξ, принимающей значения x— это математическое ожидание, дисперсия и среднее

$$M|\xi|=\int_a^b xf(x)\,dx=\int_a^b x dx/(b-a)=(a+b)/2;$$

$$D|\xi|=\int_a^b (x-M|\xi|)^2 f(x)\,dx=(b-a)^2/12;$$

$$\sigma_\xi=+\sqrt{D|\xi|}=(b-a)/(2\sqrt{3}).$$

квадратическое отклонение соответственно:

При моделировании систем на с случайными числами интервала (0, 1), где границы интервала соответственно a=0 и б = 1. Частным случаем равномерного распределения является функция плотности и функция распределения, соответственно имеющие вид:

$$f(x)=\begin{cases}1, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ 0, & x<0,\ x>1;\end{cases}\qquad F(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ x, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ 1, & x>1.\end{cases}$$

Такое распределение имеет математическое ожидание M [ξ] = 1/2 и дисперсию D[ξ] = 1/12.

Это распределение требуется получить на ЭВМ. Но получить его на цифровой ЭВМ невозможно, так как машина оперирует с п-разрядными числами. Поэтому на ЭВМ вместо непрерывной совокупности равномерных случайных чисел интервала (0, 1) используют дискретную последовательность 2" случайных чисел того же интервала. Закон распределения такой дискретной последовательности называют *квазиравномерным распределением*.

Случайная величина ξ, имеющая квазиравномерное распределение в интервале (0, 1), принимает значения $x_i = i/(2^n - 1)$ с вероятностями $p_i = \frac{1}{2}^n$, $i = \overline{0, 2^n - 1}$.

Математическое ожидание и дисперсия квазиравномерной случайной

$$M[\xi] = \sum_{i=0}^{2^n-1} \frac{i}{2^n-1}\frac{1}{2^n} = \frac{1}{(2^n-1)2^n}\sum_{i=0}^{2^n-1} i = \frac{(2^n-1)2^n}{(2^n-1)2^n 2} = \frac{1}{2};$$

$$D[\xi] = \sum_{i=0}^{2^n-1} \frac{1}{2^n}\left[\frac{i}{2^n-1} - \frac{1}{2}\right]^2 = \frac{1}{2^n}\sum_{i=0}^{2^n-1}\left(\frac{i^2}{(2^n-1)^2} - \frac{i}{2^n-1} + \frac{1}{4}\right) =$$

$$= \frac{1}{2^n}\left(\frac{(2^n-1)\,2^n(2^{n+1}-1)}{6(2^n-1)^2} - \frac{(2^n-1)2^n}{2(2^n-1)} + \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{12}\frac{2^n+1}{2^n-1}.$$

величины соответственно имеют вид

На ЭВМ невозможно получить идеальную последовательность случайных чисел хотя бы потому, что на ней можно оперировать только с конечным множеством чисел. Кроме того, для получения значений *x* случайной величины ξ используются формулы (алгоритмы). Поэтому такие последовательности, являющиеся по своей сути детерминированными, называются псевдослучайными.

Требования к генератору случайных чисел.

Требованиями, к идеальному генератору случайных чисел формулируются следующим образом. Полученные с помощью идеального генератора псевдослучайные последовательности чисел должны:

- состоять из квазиравномерно распределенных чисел;
- содержать статистически независимые числа;
- быть воспроизводимыми;
- иметь неповторяющиеся числа;

– получаться с минимальными затратами машинного времени;

– занимать минимальный объем машинной памяти.

В практике моделирования применяются генерации последовательностей псевдослучайных чисел находят алгоритмы вида (1)

$$x_{i+1} = \Phi(x_i), \quad (1)$$

Данные алгоритмы представляют *рекуррентные соотношения* первого порядка, для которых начальное число x_0 и постоянные параметры уже заданы.

Метод серединных квадратов

Пусть имеется 2n-разрядное число, меньшее 1:

$x_i = a_1, a_2, ..., a_{2n}$

1.Возведем его в квадрат:

$x_i^2 = 0, b_1, b_2, ..., b_{4n}$

2. Отберем средние 2n разрядов $x_{i+1} = 0, b_{n+1}, b_{n+2}, ..., b_{3n}$ которые будут являться очередным числом псевдослучайной последовательности.

Пример, если начальное число x_0=0,2152, то $(x_0)^2$=0,04631104, т. е. Xj=0,6311, затем $(x_1)^2$=0,39828721, т. е. x_2=0,8287, и т. д.

Недостаток метода:

Наличие корреляции между числами последовательности, в некоторых случаях может отсутствовать.

Конгруэнтные процедуры генерации.

Конгруэнтные процедуры представляют собой арифметические операции, в основе которых лежит фундаментальное понятие конгруэнтности.

Два целых числа α и β конгруэнтны или сравнимы по модулю m, m — целое число, тогда и только тогда, когда существует такое целое число k, что $\alpha - \beta = km$ т. е. разность $\alpha - \beta$ делится на m и числа α и β дают одинаковые остатки от деления на абсолютную величину числа m.

Например,

$1984 \equiv 4(\mathrm{mod}\,10)$

$1984 - 4 = 1984 \times 10$

$ост(\frac{1984}{10}) = ост(\frac{4}{10}) = 4$

Конгруэнтные процедуры являются чисто детерминированными, так

$$X_{i+1} = \lambda X_i + \mu \,(\mathrm{mod}\, M), \qquad (2)$$

как описываются в виде рекуррентного соотношения (1), и имеют вид.

где X_i, λ, μ, M — неотрицательные целые числа.

Раскроем рекуррентное соотношение (2):

$$X_1 = \lambda X_0 + \mu (\mathrm{mod}\, M);$$
$$X_2 = \lambda X_1 + \mu = \lambda^2 X_0 + (\lambda + 1)\mu (\mathrm{mod}\, M);$$
$$X_3 = \lambda X_2 + \mu = \lambda^3 X_0 + (\lambda^2 + \lambda + 1)\mu = \lambda^3 X_0 + (\lambda^3 - 1)\mu/(\lambda - 1)(\mathrm{mod}\, M);$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$X_i = \lambda^i X_0 + (\lambda^i - 1)\mu/(\lambda - 1)(\mathrm{mod}\, M).$$

Если заданы начальные числа X_0, λ, μ, M (3) последовательность целых чисел *{X_i},* составленную из остатков от деления на M членов последовательности

$$\left\{\frac{\lambda^i X_0 + \mu(\lambda^i - 1)}{(\lambda - 1)}\right\} \quad (3)$$

Таким образом, для любого i>=1 справедливо неравенство $X_t<M$, получится последовательность рациональных чисел из единичного интервала (0,1) $\{x_i\} = \{x_i / M\}$

Мультипликативный метод.

Задается последовательность неотрицательных целых чисел *{X_t},* не превосходящих M, рассчитанных по формуле

$$X_{i+1} = \lambda X_i (\mathrm{mod}\, M), \quad (4)$$

т. е. это частный случай соотношения (2) при $\mu=0$.

В силу детерминированности метода получаются воспроизводимые последовательности..

В машинной реализации наиболее удобна версия $M=p^g$, где p — число цифр в системе счисления в ЭВМ; g -— число битов в машинном слове. Тогда вычисление остатка от деления на M сводится к выделению g младших разрядов делимого. Преобразование целого числа X_t в рациональную дробь из интервала $x_i \in (0,1)$ осуществляется подстановкой слева от X_i двоичной или десятичной запятой.

Алгоритм построения последовательности для двоичной машины $M=p^g$ сводится к выполнению таких операций:

1. Выбрать в качестве X_0 произвольное нечетное число.

2. Вычислить коэффициент $\lambda = 8t \pm 3$ где t — любое целое положительное число.

3. Найти произведение λX_0, содержащее не более 2g значащих разрядов.

4. Взять g младших разрядов в качестве первого члена последовательности X_1 а остальные отбросить.

5. Определить дробь $x_1 = \frac{X_1}{2^g}$ из интервала (0, 1).

6. Присвоить $X_0 = X_1$.

7. Вернуться к п. 3.

Смешанный метод.

Позволяет вычислить последовательность неотрицательных целых чисел *{Xi},* не превосходящих *M,* по формуле

$$X_{i+1} = \lambda X_i + \mu \pmod{M},$$

Отличием от мультипликативного метода является $\mu \neq 0$.

С вычислительной точки зрения смешанный метод генерации сложнее мультипликативного на одну операцию сложения. При этом возможность выбора дополнительного параметра позволяет уменьшить возможную корреляцию получаемых чисел.