Занятие № 9
Моделирование случайных воздействий

В моделировании систем методами имитационного моделирования, существенное внимание уделяется учету случайных факторов и воздействий на систему. Для их формализации используются случайные события, дискретные и непрерывные величины, векторы, процессы. Формирование реализации случайных объектов любой природы сводится к генерации и преобразованию последовательностей случайных чисел.

В практике имитационного моделирования систем на ЭВМ ключевым факторам является оптимизация алгоритмов работы со случайными числами.

Таким образом, наличие эффективных методов, алгоритмов и программ формирования, необходимых для моделирования конкретных систем последовательностей случайных чисел, во многом определяет возможности практического использования машинной имитации для исследования и проектирования систем.

Моделирование случайных событий.

Простейшими случайными объектами при статистическом моделировании систем являются случайные события..

1. Пусть имеются случайные числа x_i т. е. возможные значения случайной величины ξ, равномерно распределенной в интервале (0, 1). Необходимо реализовать случайное событие *A*, наступающее с заданной вероятностью *p*. Определим *A* как событие, как сосотоящее в том, что выбранное значение x_i случайной величины ξ удовлетворяет неравенству

$$x_i \leqslant p. \qquad (1)$$

Тогда вероятность наступления события *A* будет $P(A)=\int_0^p dx = p$

Противоположное событие $\overline{A}$ состоит в том, что $x_i > p$. Тогда $P(\overline{A}) = 1 - p$.

Процедура моделирования состоит в выборе значений x_i и сравнении их с р. Если условие (1) выполняется, то исходом испытания является событие А.

2. Пусть А1, А2, ..., А, — событий, наступающих с вероятностями p_1, p_2, ..., р. Определим A_m как событие, состоящее в том, что выбранное значение x_i, случайной величины удовлетворяет неравенству

$$l_{m-1} < x_i \leqslant l_m,$$

где $l_r = \sum_{i=1}^{r} p_i$. Тогда

$$P(A_m) = \int_{l_{m-1}}^{l_m} dx = p_m.$$

(2)

Процедура моделирования испытаний в последовательном сравнени... случайных чисел x_i со значениями l_τ. Исходом испытания называется событие Am, если выполняется условие (2). Эту процедуру называют определением исхода испытания по жребию в соответствии с вероятностями p_1, p_2, ..., p

Пусть, независимые события *A и B*, поступающие с вероятностями p_A и p_B .Возможными исходами совместных испытаний будут события $AB, \overline{A}B, A\overline{B}, \overline{AB}$ с вероятностями $p_A p_B, (1-p_B)p_A, (1-p_A)p_B, (1-p_B)(1-p_A)$

В моделировании испытаний можно использовать два варианта расчетов:

1) последовательную проверку условия (2);

2) определение одного из исходов $AB, \overline{A}B, A\overline{B}, \overline{AB}$ по жребию с соответствующими вероятностями.

Для первого варианта необходима пара чисел x_i, для выполнения условия (1). Во втором варианте необходимо одно число x_i, но сравнений может потребоваться больше.

Пусть события *A* и *B* являются зависимыми. События наступают с вероятностями p_A и p_B. *P(B/A)* - условная вероятность наступления события *B* при что событие *A* произошло. Считается, что условная вероятность *P(B/A)* задана.

Из последовательности случайных чисел { x_i } извлекается число x_m, удовлетворяющее $x_m<p_л$. Если этой неравенство справедливо, то наступило событие *A*. Дальше из совокупности чисел *{x,}* берется очередное число x_{m+1} и проверяется условие $x_{m+1}\leq P(B/A)$. Возможный исход испытания являются *AB* или $A\overline{B}$.

Если условие $x_m < p_A$ не выполняется, то наступило событие *A*. Для испытания, связанного с событием *B,* необходимо определить вероятность

$$P(B/\overline{A})=[P(B)-P(A)P(B/A)]/(1-P(A)).$$

Выберем из совокупности *{x,}* число x_{m+1}, проверим справедливость неравенства $x_{m+1}\leq P(B/A)$. В зависимости от того, выполняется оно или нет, получим исходы испытания *A B* или *A B.*

<u>Схема моделирующего алгоритма для зависимых событий</u>

Алгоритм включает следующие процедуры:

ВИД [...]-процедура ввода исходных данных;

ГЕН [...] — генератор равномерно распределенных случайных чисел;

XM=x_m*;*

XMI=x_{m+1};

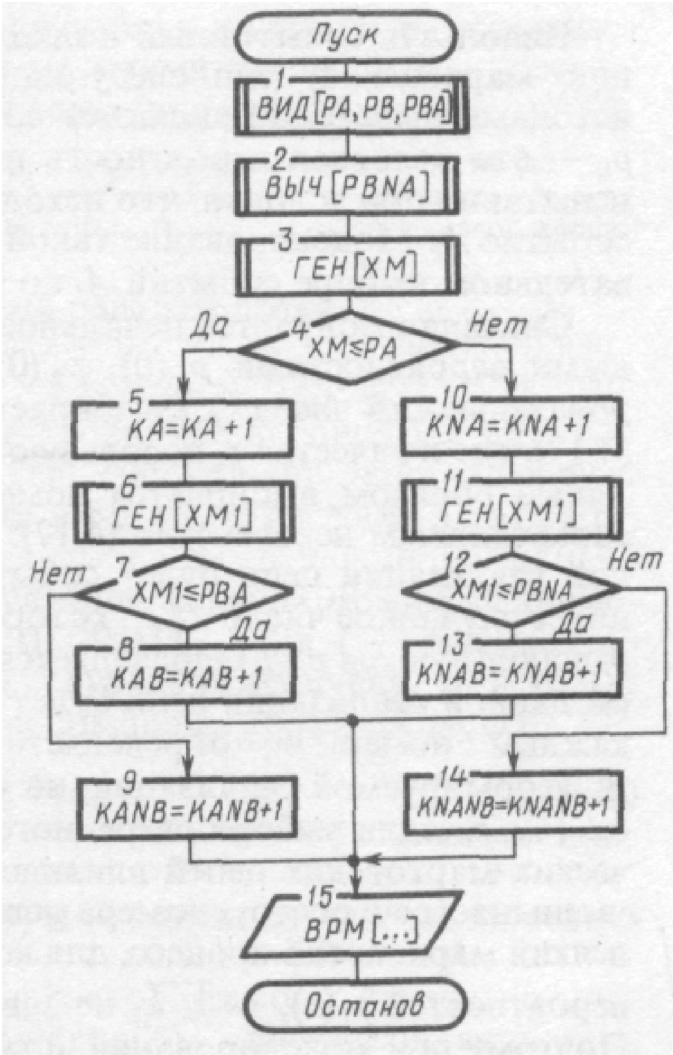
PA=p_A *PB*=p_B*;*

PBA = P(B/A);

PBNA = P(B/A);

KA, KNA, KAB, KANB, KNAB, KNANB — число событий $A, \overline{A}, AB, A\overline{B}, \overline{A}B, \overline{AB}$;

ВРМ [...] — процедура выдачи результатов моделирования.



<u>Моделирование Марковских цепей</u>

Пусть простая однородная марковская цепь определяется матрицей переходов

$$\mathbf{P}=\begin{Vmatrix} p_{11} & p_{12}\cdots p_{1k} \\ p_{21} & p_{22}\cdots p_{2k} \\ \cdots & \cdots \\ p_{k1} & p_{k2}\cdots p_{kk} \end{Vmatrix}, 0\leqslant p_{ij}\leqslant 1,$$

где P_{IJ} — вероятность перехода из состояния z_i, в состояние z_j.

Матрица переходов P полностью описывает марковский процесс. Так как сумма элементов каждой строки равна 1, то данная матрица является стохастической, т. е. $\sum_{j=1}^{k} p_{ij}=1; i=\overline{1,k}$

Пусть $p_i(n)$, $i=\overline{1,k}$ - вероятность, что система будет находиться в состоянии z_i после n переходов. По определению $\sum_{i=1}^{k} p(n)=1$.

Пусть возможными исходами испытаний являются события $A_1, A_2, .., A_k$. P_{IJ} — это условная вероятность наступления события A_J в данном испытании при условии, что исходом предыдущего испытания было событие A_I.

Моделирование такой цепи Маркова состоит в последовательном выборе событий A_J по жребию с вероятностями p_{ij}. Последовательность действий следующая:

1. выбирается начальное состояние z_0, задаваемое начальными вероятностями $p_1(0), p_2(0),...., p_k(0)$. Из последовательности чисел $\{x_i\}$ выбирается число x_m и сравнивается с (2). p_i - это значения $p_1(0), p_2(0),...., p_k(0)$. Выбирается номер m_0, удовлетворяющий неравенству (2). Начальным событием данной реализации цепи будет событие A_{mo}.
2. выбирается следующее случайное число x_{m+1}, которое сравнивается с l_τ. В качестве pi используются p_{moj} . Определяется номер m_1. Следующим событием данной реализации цепи будет событие A_{m1} и т. д.

Каждый номер m_i, определяет не только очередное событие A_{mi} но и распределение вероятностей $p_{mi1}, p_{mi2}, ... p_{mik}$ для определения очередного номера m_{i+1}. Для эргодических марковских цепей влияние начальных вероятностей быстро уменьшается с ростом номера испытаний.

Эргодический марковский процесс - это всякий марковский процесс, для которого предельное распределение вероятностей $p_i(n)$, $i = \overline{1,k}$, не зависит от начальных условий $p_i(0)$. Поэтому можно принимать, что

$$p_1(0) = p_2(0) = ... = p_k(0) = 1/k.$$

<u>Моделирование дискретных случайных величин.</u>

Дискретная случайная величина η принимает значения $y_1 \le y_2 \le .... \le y_j$ с вероятностями $p_1, p_2, ..., p_j$ составляющими дифференциальное распределение вероятностей

$$\begin{array}{cccc} y & y_1 & y_2 \dots y_j \dots, \\ P(\eta = y) & p_1 & p_2 \dots p_j \dots \end{array} \quad (3)$$

Интегральная функция распределения

$$F_\eta(y) = P(\eta \leqslant y) = \sum_{j=1}^{m} p_j;\ y_m \leqslant y \leqslant y_{m+1};\ m = 1, 2, ...;$$

$$F_\eta(y) = 0;\ y < y_1. \quad (4)$$

Для получения дискретных случайных величин используется метод обратной функции. Если ξ случайная величина, распределенная на интервале (0,1), то $\eta = F_\eta^{-1}(\xi)$, случайная величина η получается с помощью преобразования (5)

где F_n^{-1} — функция, обратная F_n.

Алгоритм вычисления (3) и (4) сводится к выполнению следующих действий:

$$\begin{aligned}
&\text{если } x_1 < p, \text{ то } \eta = y_1, \text{ иначе} \\
&\text{если } x_2 < p_1 + p_2, \text{ то } \eta = y_2, \text{ иначе,} \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
&\text{если } x_j < \sum_{j=1}^{m} p_j, \text{ то } \eta = y_m, \text{ иначе,} \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{aligned} \qquad (6)$$

При счете по (6) среднее число циклов сравнения $\overline{\mu} = \sum_{j=1}^{\infty} jp_j$.

<u>Моделирование непрерывных случайных величин</u>

Непрерывная случайная величина η задана функцией распределения

$$F_\eta(y) = P(\eta \leqslant y) = \int_{-\infty}^{y} f_\eta(y)\,dy,$$

где $f_\eta(y)$ — плотность вероятностей.

Для получения непрерывных случайных величин используется метод обратной функции. Взаимно однозначная монотонная функция $\eta = F^{-1\eta}(\xi)$ преобразует случайную величину ξ, равномерно распределена на интервале (0,1) в случайную величину η с требуемой функцией плотности $f_\eta(y)$. Чтобы получить числа из последовательности {y_i}, имеющие функцию плотности $f_\eta(y)$, необходимо разрешить относительно y_i уравнение $\int_{-\infty}^{y_i} f_\eta(y)dy = x_i$ (3)

Пример 1. Получить случайные числа с показательным законом распределения:

$$\begin{cases} f_\eta(y) = \lambda e^{-\lambda y}, y > 0 \\ f_\eta(y) = 0, y, 0 \end{cases}$$

В силу соотношения (3) получим

$$\lambda \int_{0}^{y_j} e^{-\lambda y}\,dy = x_i,$$

где x_i — случайное число, имеющее равномерное распределение в интервале (0, 1). Тогда

$$1 - e^{-\lambda y_j} = x_i,\ y_j = -\frac{1}{\lambda} \ln(1 - x_i).$$

$1-\xi$ - случайная величина, распределенная на интервале (0, 1), поэтому

$$f_\eta(y) = \lambda(1 - \lambda_y/2),\ 0 \leqslant y \leqslant 2/\lambda.$$

можно записать $y_i = -\frac{1}{\lambda} \ln x_i$