

**Методы определения характеристик моделируемых систем.**

***Измеряемые характеристики моделируемых систем.***

При имитационном моделировании можно измерять значения любых характеристик, интересующих исследователя. Обычно по результатам вычислений определяются характеристики всей системы, каждого потока и устройства.

Для всей системы производится подсчёт поступивших в систему заявок, полностью обслуженных и покинувших систему заявок без обслуживания по тем или иным причинам. Соотношения этих величин характеризует производительность системы при определённой рабочей нагрузке.

По каждому потоку заявок могут вычисляться времена реакций и ожидания, количества обслуженных и потерянных заявок. По каждому устройству определяется время загрузки при обслуживании одной заявки  $m$  число обслуженным устройством заявок, время простоя устройства в результате отказов и количество отказов, возникших в процессе моделирования, длины очередей и занимаемые ёмкости памяти.

При статистическом моделировании большая часть характеристик — это случайные величины. По каждой такой характеристике  $y$  определяется  $N$  значений, по которым строится гистограмма относительных частот, вычисляется математическое ожидание, дисперсия и моменты более высокого порядка, определяются средние по времени и максимальные значения. Коэффициенты загрузки устройств вычисляются по формуле:

$$\rho_k = V_k * N_{ok} / T_m \quad (1)$$

$V_k$ - среднее время обслуживания одной заявки  $k$ -ым устройством;

$N_{ok}$  - количество обслуженных заявок устройством за время моделирования  $T_m$ .

Определение условий удовлетворения стохастических ограничений при имитационном моделировании производится путём простого подсчёта количества измерений, вышедших и не вышедших за допустимые пределы.

***Расчёт математического ожидания и дисперсии выходной характеристики.***

В случае стационарного эргодического процесса функционирования системы вычисление  $M(y)$  и  $D(y)$  выходной характеристики  $y$  производится усреднением не по времени, а по множеству  $N_{\text{знач.}}$ , измеренных по одной реализации достаточной длительности. В целях экономия ОЗУ ЭВМ  $M(y)$  и  $D(y)$  вычисляются по рекуррентным формулам:

$$m_n = m_{n-1} * (n-1) / n + y / n; \quad (2)$$

где  $m_{n-1}$  - математическое ожидание, вычисленное на предыдущем шаге.

$$d_n = d_{n-1} * (n-2) / (n-1) + 1/n * (y_n - m_{n-1})^2 \quad (3)$$

здесь  $d_{n-1}$  - дисперсия, вычисленная на предыдущем шаге.

При большом количестве измерений эти оценки являются состоятельными и несмещёнными.

### **Расчёт среднего по времени значения выходной характеристики.**

Например, средняя длина очереди к каждому устройству вычисляется по формуле:

$$l_N = \sum_{i=1}^N l_i \tau_i / T_m \quad (4)$$

где  $i$  - номер очередного изменения состояния очереди (занесение заявки в очередь или исключение из очереди);  $N$  - количество изменений состояния очереди;  $\tau_i$  - интервал времени между двумя последними изменениями очереди.

$$\text{Ёмкость накопитель:} \quad q_n = \sum_{i=1}^N q_i \tau_i / T_m \quad (5)$$

где  $q_i$  - ёмкость накопителя, занятая в интервале между двумя последними обращениями к накопителю для ввода-вывода заявки.

### **Построение гистограммы для стационарной системы.**

$\Gamma$  - эмпирическая плотность распределения вероятностей. Задаются границы изменения интересующей характеристики.  $y_i \rightarrow [y_n; y_b]$ , числом интервалов  $N_g$ . Определяется ширина интервала  $\Delta = (y_n - y_b) / N_g$ . Затем в процессе моделирования по мере появления значений  $y_i$  определяется число попаданий этой случайной величины в каждый из интервалов  $R_i$  гистограммы. По этим данным вычисляется относительная частота по каждому интервалу:  $G_i = R_i / (N \cdot \Delta)$ , где  $N$  - общее число измерений  $y$ . Площадь гистограммы равна единице, равна сумме площадей:

$$S_i = \sum_1^{N_g} G_i \cdot \Delta = \sum \frac{R_i}{N \cdot \Delta} \cdot \Delta = \sum \frac{R_i}{N} = 1, \quad \text{т.к. } N = \sum_1^{N_g} R_i$$

При необходимости выдвигается гипотеза о том, что эмпирическое распределение согласуется с некоторым теоретическим распределением. Эта гипотеза проверяется по тому или иному критерию. Например, при использовании критерия  $\chi^2$  в качестве меры расхождения используется выражение

$$\chi^2 = \frac{\sum_1^{N_g} (R_i - N \cdot P_i)^2}{N \cdot P_i} \quad (6);$$

где  $P_i$  определяется из выбранного теоретического распределения вероятность попадания случайной величины в  $i$ -ый интервал.

$$P_i = \int_{y_i}^{y_{i+1}} \varphi(x) dx = F(y_{i+1}) - F(y_i) \quad (7).$$

Из теоремы Пирсона следует, что для любой функции распределения  $F(y)$  случайной величины  $y$  при  $N \rightarrow \infty$  распределения величины  $\chi^2$  имеет вид:

$$M_k(z) = P(\chi^2 < z) = \frac{1}{2^{k/2} * \Gamma(k/2)} \int_0^z t^{k/2-1} * e^{-t/2} dt, \text{ где } z - \text{ значение случайной}$$

величины  $\chi^2$ ,

$k=N_g-(r+1)$  - число степеней свободы распределения  $\chi^2$ .  $r$  - количество параметров теоретического распределения,  $\Gamma(k/2)$  - гамма функция.

Функция распределения  $\chi^2$  табулирована. По вычисленному значению  $\chi^2$  и числу степеней свободы с помощью таблиц определяется вероятность  $P(\chi^2 < Z)$ . Если она превышает заданный уровень значимости  $C$ , то выдвинутая гипотеза принимается.

## Моделирование систем с использованием типовых математических схем

### *Блочные иерархические модели процессов функционирования систем*

Рассмотрим машинную модель  $M_m$ , системы  $S$  как совокупность блоков  $\{m_i\}$ ,  $i=1,2,\dots,n$ . Каждый блок модели можно охарактеризовать конечным набором возможных состояний  $\{Z_0\}$ , в которых он может находиться. Пусть в течение рассматриваемого интервала времени  $(0, T)$  блок  $i$  изменяет состояние в моменты времени  $t_i^j \leq T$ , где  $j$  - номер момента времени. Момент времени можно разделить на три группы:

- случайные, связанные с внутренними свойствами блока;
- случайные, связанные с изменением состоянием других блоков, имитирующая воздействие среды  $E$ ;
- детерминированные моменты, связанные с заданным расписанием функционирования блока.

Моментами смены состояний модели  $M_m$  в целом  $t^{(k)} \leq T$  будем считать все моменты изменения блоков  $\{m_i\}$ , рис. 8.1. см. ниже.

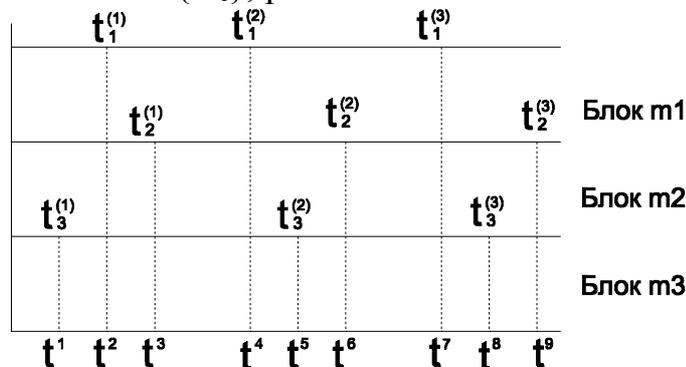


Рис. 8.1. Смена состояний модели для случаев 3-х блоков

При этом моменты  $t_i^{(j)}$  и  $t^k$  являются моментами системного времени, т.е. времени, в котором функционирует система  $S$ . При машинной реализации

модели  $M_m$  её блки представляются соответствующими программными модулями.

### **Особенности реализации процессов с использованием Q-схем**

При моделировании Q-схем следует адекватно учитывать как связи, отражающие движения заявок (сплошные линии) так и управляющие связи (пунктирные линии).

Рассмотрим фрагмент Q-схемы (Рис. 8.2.):

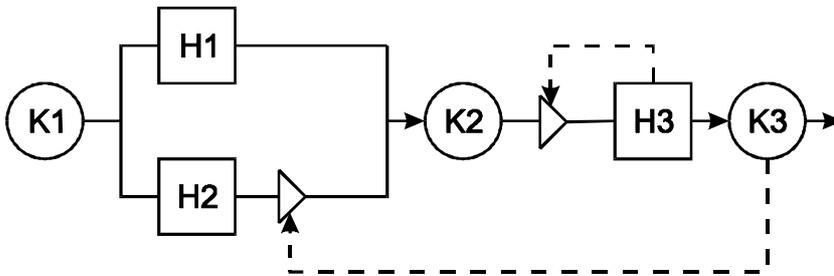


Рис. 8.2. Фрагмент Q-схемы.

Примерами управляющих связей являются различные блокировки обслуживающих каналов (по входу и по выходу): "клапаны" изображены в виде треугольников, а управляющие связи пунктирными линиями. Блокировка канала по входу означает, что этот канал отключается от входящего потока заявок, а блокировка канала по выходу указывает, что заявка обслуженная заблокированным каналом, остаётся в этом канале до момента снятия блокировки. В этом случае, если перед накопителем нет "клапана", то при его переполнении будут иметь место потери заявок.

Моделирующий алгоритм должен отвечать следующим требованиям:

- ◇ обладать универсальностью относительно структуры, алгоритмов функционирования и параметров системы S;
- ◇ обеспечивать одновременную и независимую работу системы S;
- ◇ укладываться в приемлемые затраты ресурсов ЭВМ. (памяти, времени расчёта для реализации машинного эксперимента);
- ◇ проводить разбиение на достаточно автономные логические части (блоки);
- ◇ гарантировать выполнение рекуррентного правила расчётов;

При этом необходимо иметь виду, что появление одной заявки входящего потока в некоторый момент времени  $t_i$  может вызвать изменение состояния не более чем одного из элементов Q-схемы, а окончание обслуживания заявки в момент  $t_i$  в некотором канале K может привести в этот момент времени к последовательному изменению состояний нескольких элементов (H,K), т.е. будет иметь место процесс распространения смены состояний в направлении противоположном движению заявки в системе S. Поэтому просмотр элементов Q-схемы должен быть противоположным движению заявок.

Все виды моделирующих алгоритмов Q-схемы можно классифицировать следующим образом (см. Рис. 8.3.):

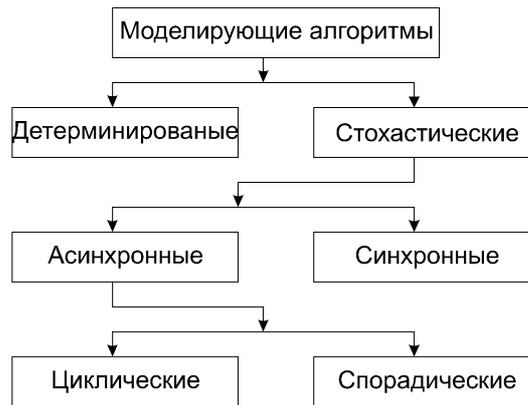


Рис. 8.3. Виды моделирующих алгоритмов Q-схемы.

Алгоритмы моделирующие Q-схему по принципу " $\Delta t$ " являются детерминированными (по шагу), а по принципу особых состояний – стохастические. Последние могут быть реализованы синхронным и асинхронным способами.

При синхронном способе один из элементов Q-схемы (И, Н или К) выбирается в качестве ведущего и по нему "синхронизируется" весь процесс моделирования.

При асинхронном способе — ведущий (синхронизирующий) элемент не используется, а очередному шагу моделирования (просмотру элементов Q-схемы) может соответствовать любое особое состояние всего множества элементов И, Н и К. При этом просмотр элементов Q-схемы организован так, что при каждом особом состоянии либо циклически просматриваются все элементы, спорадически - только те элементы, которые в этом случае могут изменить своё состояние. (просмотр с прогнозированием)

### ***Построение и реализация моделирующих алгоритмов Q-схем***

Прежде чем использовать какой либо язык для моделирования Q-схемы, необходимо глубже вникнуть в суть процесса построения и реализации М.А.

Пример. Рассмотрим Q-схему (Рис. 8.4.):

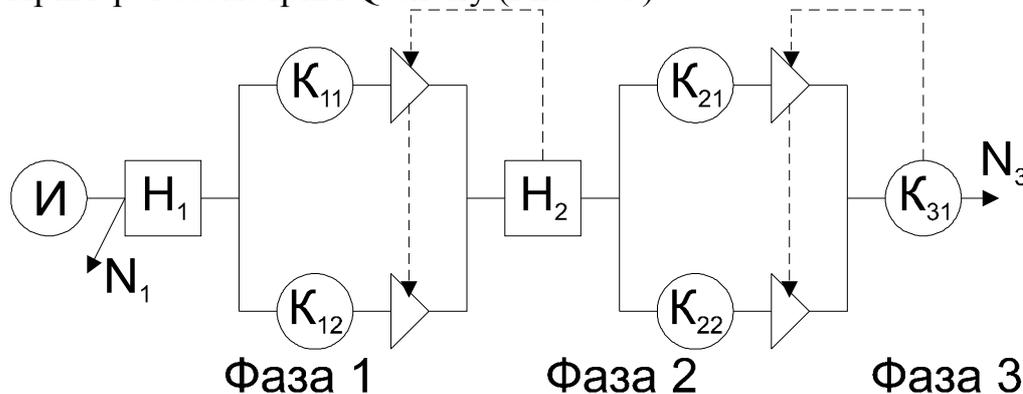


Рис. 8.4. Трехфазная Q-схема.

Примем обозначения:

$P$  - вероятность потери заявки ( $P=N_1/(N_1+N_3)$ );

$t_m$  - время появления очередной заявки из источника;

$t_{k,j}$  - время окончания обслуживания заявки каналом  $K_{k,j}$ ,  $k=1,2,3\dots$ ;  $j=1,2\dots$ ;

$z_i, z_{k,j}$  - состояния накопителей и каналов обслуживания;

$t_n$  - текущее время моделирования;

$L_i$  - ёмкость  $i$ -ого накопителя;

$L_k^m$  - число каналов в  $k$ -ой фазе;

$N_1, N_2$  - число выходных заявок;

$T$  - интервал моделирования;

При имитации Q-схемы на ЭВМ требуется организовать массив состояний:

$z_{k,j}, t_{k,j}, j=1, L_k^m$ ;  $z_i$  - число заявок в накопителе  $H_i$ ;  $i=1,2$ ;  $t_i$  -  $i$ -ая заявка из источника.

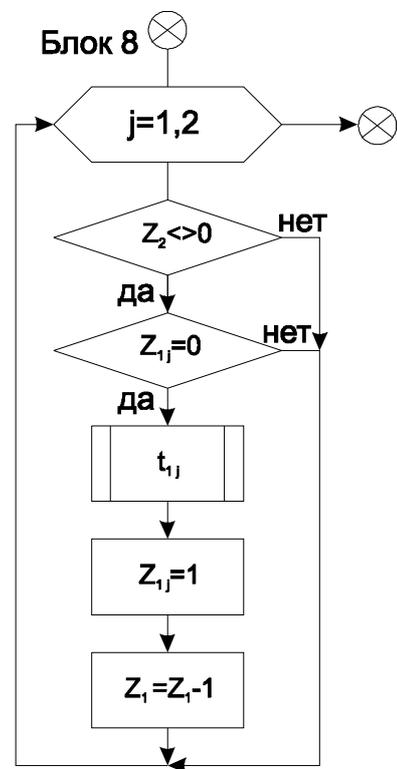
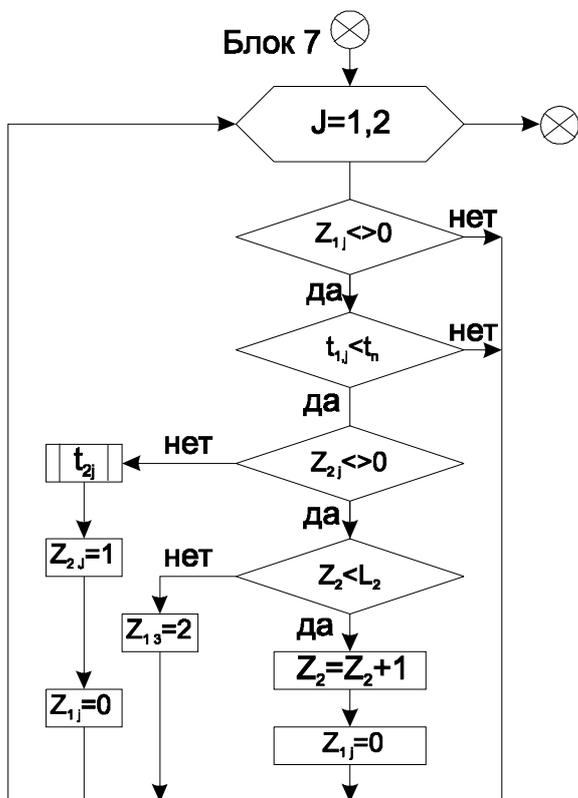
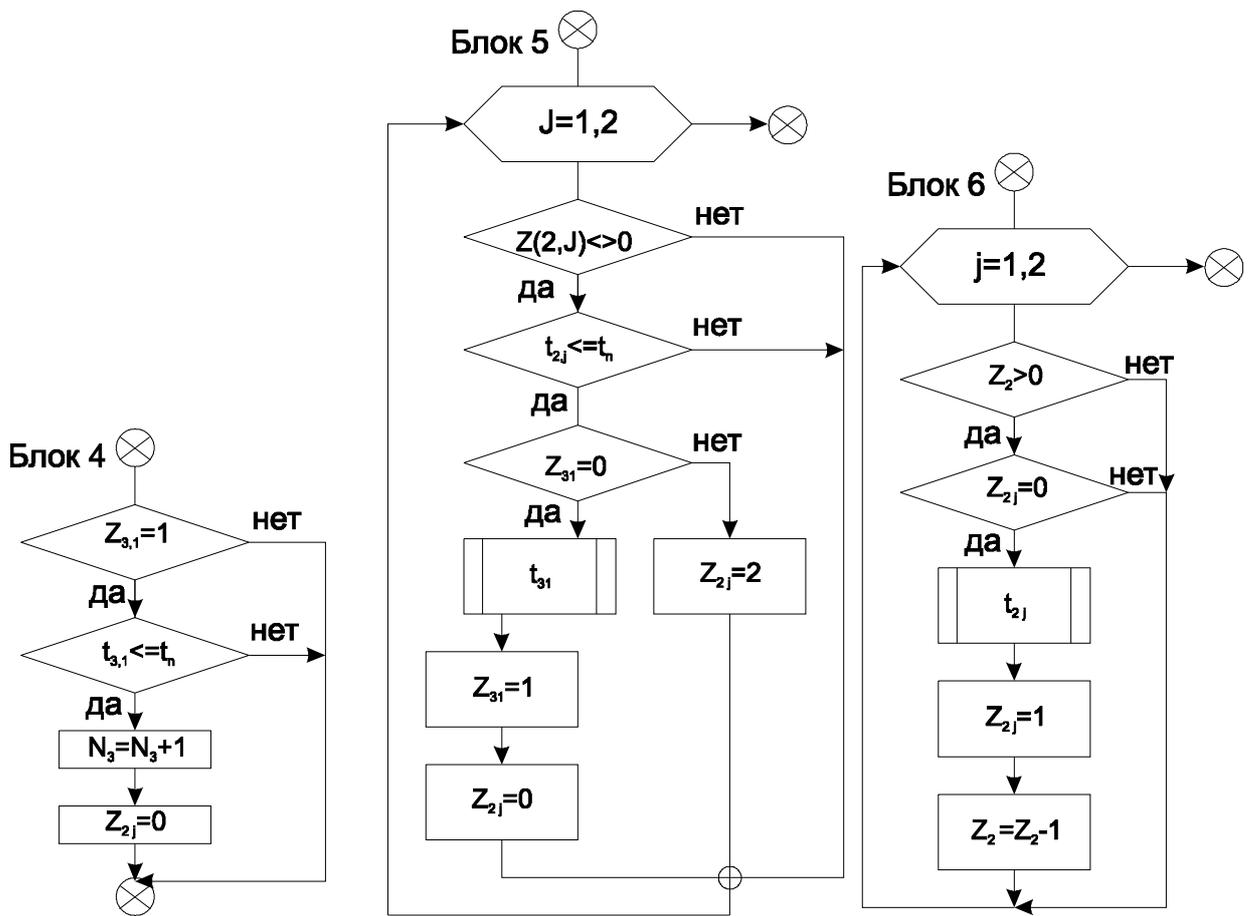
$z_{k,j} = \{1$ - канал занят;  $0$  - канал свободен;  $2$  - заблокирован};

Укрупнённая схема детерминированного МА Q-схемы, построенного по "принципу  $\Delta t$ " представлена на рисунке 8.5.



Рис. 8.5. Блок схема моделирования Q-схемы по принципу "Δt".

А далее более подробно рассмотрены алгоритмы блоков 4-9.



Блок 9 ⊗

