**Лекция 3.**

**Поверхности и их проекции.**

Поверхность представляет собой множество положений линии, перемещающейся в пространстве.

Эта линия называется образующей поверхности. Закон перемещения образующей задается линией, которая называется направляющей.Совокупность нескольких последовательных положений образующей и направляющей создает каркас поверхности. На рис. 3.1 поверхность образована движением образующей *l*  по направляющей *m*.

Поверхности изображаются на чертеже в виде проекций:

- образующей линии, направляющей линии и очерка поверхности;

- каркаса;

- геометрической части определителя.

****

Рис. 3.1.

**Краткая классификация поверхностей.**

Условно поверхности можно классифицировать по следующим признакам:

- по закону движения образующей различают поверхности с поступательным движением образующей (поверхности параллельного переноса), вращения и винтовые;

- по виду образующей поверхности бывают линейчатые (с прямолинейной образующей) и нелинейчатые (поверхности с криволинейной образующей);

- по закону изменения формы образующей - поверхности с образующей постоянного или переменного вида;

- по признаку развертывания поверхности различают развертываемые и неразвертываемые.

**Поверхность параллельного переноса.**

При поступательном перемещении прямой *m* по направляющей *n*

(рис. 3.2) образуется поверхность, называемая поверхность параллельного переноса.



Рис. 3.2.

**Поверхность вращения.**

При вращении некоторой образующей *l* вокруг оси *ί* создается поверхность вращения (рис. 5.3).



Рис. 3.3.

Проекции каркаса поверхности вращения выполняются на комплексном чертеже проекциями направляющей, образующей и очерка поверхности.

Очерком поверхности называется проекция линии контура поверхности на плоскость проекций.

Каркас поверхности представляет собой множество окружностей, плоскости которых расположены перпендикулярно оси вращения (*ί).* Эти окружности называются параллелями; наименьшая параллель- горло, наибольшая - экватор.

Из закона образования поверхности вращения вытекают два основных свойства:

- плоскость, перпендикулярная оси вращения, пересекает поверхность по окружности- по параллелям;

- плоскость, проходящая через ось вращения, пересекает поверхность по двум симметричным относительно оси линиям - по меридианам.

Плоскость, проходящая через ось параллельно фронтальной плоскости проекций, называется плоскостью главного меридиана, а линия, полученная в сечении, - главным меридианом.

**Геометрические тела и их изображения.**

*Многогранником* называется геометрическое тело, ограниченное плоскими многоугольниками.

*Пирамида-* это многогранник, в основании которого лежит произвольный многоугольник, а боковые грани – треугольники с общей вершиной *S*.

На чертеже пирамида задается проекциями ее вершин и ребер с учетом их видимости. Видимость ребер определяется с помощью конкурирующих точек (рис.3.4).

*Призма* – это многогранник, у которого основания- два одинаковых и взаимно параллельных многоугольника, а боковые грани- параллелограммы (рис. 3.5).

Любую точку на гранной поверхности можно построить с помощью прямой, проходящей через эту точку. На рис. 3.4 на грани *SAB* построена точка *М* с помощью прямой *В*-1.



Рис. 3.4.



Рис. 3.5.

*Цилиндр-* это геометрическое тело, ограниченное цилиндрической поверхностью и двумя плоскостями, называемыми основаниями. В зависимости от угла наклона образующих цилиндрической поверхности и основанию различают прямой цилиндр (угол наклона 90°) и наклонный (рис. 3.6).



Рис. 3.6.

*Конус -* геометрическое тело, ограниченное конической поверхностью и плоскостью, называемой основанием. Конус может быть прямым (рис. 3.7) или наклонным.



Рис. 3.7.

*Сфера-* геометрическое тело, образованное вращением окружности вокруг диаметра (рис. 3.8).



Рис. 3.8.

*Тор -* геометрическое тело, образованное при вращении окружности вокруг оси, не проходящей через ее центр (рис. 3.9).



Рис. 3.9.

**Позиционные задачи.**

*Позиционными* называют задачи, решения которых позволяют определить взаимное расположение геометрических объектов.

Все позиционные задачи условно можно разделить на 3 группы:

- задачи на принадлежность точки линии или поверхности;

- задачи на определение точек пересечения линии с поверхностью;

- задачи на построение линии пересечения поверхностей.

**Пересечение поверхности плоскостью.**

При пересечении поверхности плоскостью получается плоская фигура, которую строят по отдельным точкам. Сначала строят опорные точки, лежащие на контурных линиях поверхности, а также точки на ребрах и линиях основания поверхности. Если этими точками линия пересечения не определяется, то строят дополнительные, промежуточные точки.

При пересечении гранной поверхности с плоскостью получается плоская ломаная линия. Для ее получения достаточно определить точки пересечения ребер плоскостью *α* и соединить построенные точки с учетом их видимости (рис. 31).



Рис. 3.1.

## Виды цилиндрических сечений

В зависимости от положения секущей плоскости различают следующие сечения:

* плоскость, параллельная оси цилиндра, пересекает его поверхность по образующим;
* плоскость, перпендикулярная оси цилиндра, пересекает его поверхность по окружности;
* плоскость, наклонная к оси цилиндра, пересекает поверхность по эллипсу (рис. 3.2).

Фронтальная проекция фигуры сечения изобразится отрезком 1′′-5′′, совпадающим со следом – проекцией секущей плоскости.

Горизонтальная проекция фигуры сечения совпадает с очерком горизонтальной проекции цилиндра.

Для построения профильной проекции сечения наметим на поверхности цилиндра восемь равномерно расположенных образующих, и по фронтальным проекциям точек их пересечения с плоскостью α находим профильные проекции этих точек. Соединив последние плавной кривой, получаем очерк профильной проекции сечения.



Рис. 3.2

Эта проекция представляет собой эллипс, одна из осей которого (3′′′-7′′′) равна диаметру цилиндра, а другая (1′′′-5′′′) может быть и больше диаметра, когда угол наклона секущей плоскости к оси цилиндра меньше 45°, и меньше диаметра, когда этот угол больше 45°, и, наконец, равна диаметру, когда этот угол равен 45° – в этом случае профильная проекция сечения представляет собою окружность.

## Виды конических сечений

В зависимости от положения секущей плоскости различают следующие сечения:

1. Плоскость, проходящая через вершину конуса, пересекает его поверхность по образующим.
2. Плоскость, перпендикулярная оси конуса, пересекает его поверхность по окружности.
3. Плоскость, пересекающая все образующие конуса, пересекает его поверхность по эллипсу (рис. 3.3).

В этом случае угол наклона секущей плоскости к оси конуса больше угла между образующей конуса и его осью.



Рис. 3.3

Фронтальная проекция фигуры сечения изобразится отрезком 1′′-5′′, совпадающим со следом – проекцией секущей плоскости.

Горизонтальная и профильная проекции сечения будут эллипсы, которые строятся по точкам.

Для этого наметим на поверхности конуса восемь равномерно расположенных образующих и по фронтальным проекциям точек их пересечения с плоскостью α находим горизонтальные и профильные проекции этих точек. Горизонтальные проекции точек 3 и 7, в которых плоскость α пересекает переднюю и заднюю образующие конуса, получаем через их профильные проекции.

Отрезки 1′-5′ на плоскости проекций π1 и 1′′′-5′′′ на плоскости проекций π3  являются для эллипсов, представляющих горизонтальную и профильную проекции фигуры сечения, соответственно одной из осей.

Обычно для каждого из этих эллипсов определяют вторую ось, так как наличие обеих осей облегчает построение эллипсов. Для эллипса на плоскости проекций π1 эта вторая ось будет малой, а для эллипса на плоскости проекций π3  может оказаться как большой, так и малой в зависимости от положения секущей плоскости по отношению к конической поверхности.

Для построения вторых осей названных эллипсов разделим отрезок 1′′-5′′ точкой (*А*′′≡*В*′′) пополам. Точка (*А*′′≡*В*′′) – это фронтальная проекция малой оси *АВ* эллипса, по которому плоскость α пересекает коническую поверхность.

Вторые оси эллипсов можно построить при помощи вспомогательной горизонтальной плоскости уровня ω, проведя ее фронтальный след через точку (*А*′′≡*В"*).

Эта плоскость пересечет коническую поверхность по окружности некоторого радиуса. Построив горизонтальную проекцию этой окружности, найдем на ней горизонтальные проекции точек *А* и *В* и вместе с тем малую ось эллипса на плоскости проекций π1. Наконец, по горизонтальным проекциям точек *А* и *В* находим на ω′′′ их профильные проекции и получаем вторую ось эллипса на плоскости проекций π3. Именно таким приемом и построены отрезки *А*′*В*′ и *А*′′′*В*′′′ на рис. 33.

При некотором наклоне секущей плоскости отрезки 1′′′-5′′′ и *А*′′′*В*′′′ могут оказаться равными, и в этом случае профильная проекция фигуры сечения будет окружностью. Проекция фигуры сечения на плоскости, перпендикулярной оси конуса (в данном случае на плоскости проекций π1), окружностью быть не может.

1. Плоскость, параллельная одной из образующих конуса, пересекает его поверхность по параболе (рис. 34).

В этом случае угол наклона секущей плоскости к оси конуса равен углу между образующей конуса и его осью.

На рис. 3.4 секущая плоскость α проведена параллельно левой образующей конуса.

На фронтальную плоскость проекций фигура сечения проецируется в виде отрезка (1′′≡2′′) – 5′′, совпадающего со следом-проекцией секущей плос­кости.

Горизонтальная и профильная проекции сечения будут параболы, которые строятся по точкам.

Из рис. 3.4 следует, что плоскость α пересекает основание конуса по прямой 1-2, по горизонтальной проекции которой 1′-2′ находим ее профильную проекцию 1′′′-2′′′.

Далее, без каких-либо дополнительных построений по фронтальной проекции вершины фигуры сечения – точке 5′′ получаем ее горизонтальную и профильную проекции – точки 5′ и 5′′′.



Рис. 3.4

Точно так же фронтальные проекции точек 3 и 4, в которых плоскость α пересекает переднюю и заднюю образующие конуса, дают возможность получить их профильные проекции 3′′′ и 4′′′, а по ним и горизонтальные проекции 3′ и 4′.

Поскольку этих точек для определения очерков проекций сечения недостаточно, находятся несколько дополнительных точек 6, 7, 8, 9. Эти точки определяются по принадлежности поверхности конуса с помощью параллелей, проведенных через отмеченные точки.

1. Плоскость, параллельная двум образующим конуса, пересекает его поверхность по гиперболе (рис. 3.5).

Секущая плоскость α параллельна образующим конуса *SK* и *SL*, фронтальные проекции которых параллельны следу-проекции плоскости α.



Рис. 3.5

В этом случае, как это видно из того же чертежа, плоскость α пересекает обе полы конической поверхности, а, следовательно, сечение будет представлять фигуру, ограниченную двумя ветвями гиперболы с вершинами в точках 51 и 52, расположенными в плоскости α симметрично точки *О* – сере­дины отрезка 5152. Одна из ветвей этой гиперболы показана на рис. 3.5 построена приемом, примененным при рассмотрении построения предыдущего конического сечения.

В частном случае кривую того же названия, гиперболу, получим, если пересечем конус плоскостью, параллельной его оси. При таком положении секущей плоскости, последняя будет параллельна двум прямо противоположным образующим конуса.

На рис. 3.6 показано пересечение конической поверхности фронтальной плоскостью α (она параллельна левой и правой образующим конуса).



Рис. 3.6

## Пересечение сферической поверхности

## проецирующей плоскостью

Сферическая поверхность всякой плоскостью пересекается по окружности.

В рассматриваемом случае рис. 3.7 на фронтальную плоскость проекций фигура сечения проецируется в виде отрезка *А"В"*, совпадающего со следом-проекцией секущей плоскости α.

Горизонтальная проекция фигуры сечения будет эллипс, который строится по точкам.

Главный меридиан поверхности плоскостью α пересекается в точках *А* и *В*. По фронтальным проекциям этих точек – *А"* и *В"* находим их горизонтальные проекции – *А*′ и *В*′. Отрезок *А*′*В*′ для эллипса, представляю­щего горизонтальную проекцию фигуры сечения, будет малой осью.

Для построения большой оси этого эллипса надо отрезок *А"В"* разделить пополам, опустив на него из точки *О*′′перпендикуляр *О"* – (*С"*≡*D"*). Проведя параллель через точку (*С"*≡*D"*) строим горизонтальные проекции. Горизонтальная проекция *С*′*D*′ и является искомой большой осью эллипса. Величина большой оси будет равна длине отрезка *А*"*В*".



Рис. 3.7

Дополнительными точками для построения эллипса являются горизонтальные проекции точек 1 и 2, в которых плоскость α пересекает экватор поверхности. По фронтальным проекциям этих точек – 1′′ и 2′′ находим их горизонтальные проекции – 1′ и 2′.

Дополнительные точки 3, 4, находятся при помощи параллелей, прове­денных через отмеченные точки.