**МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ К ПРОВЕДЕНИЮ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ**

*Основные этапы принятия оптимального решения*

**1-й шаг – формализация проблемы.** Прежде чем приступать к построению математических моделей, команда экспертов должна рассмотреть возможность разрешения проблемы путём применения какого-либо “человеческого”, а не технического решения. В связи с этим команды экспертов обычно в качестве первого этапа исследования реальной проблемы проводят экспертизу ситуации путём привлечения специалистов, не связанных с математикой. В случае если проблема сформулирована корректно, появляется возможность выбора готовой модели, разработка которой поможет в разрешении рассматриваемой проблемы, либо, если готовой модели нет, возникает необходимость создания такой модели, которая в достаточной степени точно отражала бы существенные стороны данной проблемы. В результате должны быть получены три принципиальных элемента решаемой задачи: 1) описание возможных альтернативных решений, 2) определение целевой функции, 3) построение системы ограничений, налагаемых на возможные решения.

**2-й шаг – построение математической модели.** Построение математической модели означает перевод формализован- ной задачи, описание которой получено на предыдущем этапе, на чёткий язык математических отношений. Если получена одна из стандартных математических моделей, например, модель линейного программирования, то решение обычно достигается путём использования существующих алгоритмов. Если же результирующая модель очень сложная и не приводится к какому-либо стандартному типу моделей, то команда может либо упростить её, либо применить эвристический подход, либо использовать имитационное моделирование. В некоторых случаях комбинация этих моделей может привести к решению исходной задачи.

**3-й шаг – решение модели.** Решение модели реализуется на основе известных алгоритмов оптимизации. Важным аспектом этого этапа является анализ устойчивости полученного решения. Это подразумевает получение дополнительной информации о поведении “оптимального” решения при изменении некоторых параметров модели. Анализ устойчивости особенно необходим, когда невозможно точно оценить параметры модели. В этом случае важно изучить поведение оптимального решения в окрестности первоначальных оценок параметров модели.

**4-й шаг – проверка адекватности модели.** Этот этап предполагает проверку правильности модели, т. е. определения того, соответствует ли поведение модели в конкретных ситуациях поведению исходной реальной системы. Формальным методом проверки адекватности модели является сравнение полученного решения (поведение модели) с известными ранее решениями или поведением реальной системы. Модель считается адекватной, если при определённых начальных условиях её поведение совпадает с поведением исходной системы при тех же начальных условиях.

**5-й шаг – реализация решения.** Реализация решения подразумевает перевод результатов решения модели в рекомендации, представленные в форме, понятной для лиц, принимающих решения, т. е. заказчиков. Замечание. Из всех пяти приведённых этапов только третий, решение модели, достаточно точно определён и наиболее прост для реализации, поскольку действия на этом этапе основываются на точной математической теории.

**Примеры решения задач**

**Задача 1.**

Фабрика производит два вида красок: первый – для наружных, а второй – для внутренних работ. Для производства красок используются два ингредиента: А и В. Известны расходы ингредиентов А и В на 1 т соответствующих красок и максимально возможные суточные запасы этих ингредиентов на складе. Данные по расходам ингредиентов на краски первого и второго вида представлены в таблице.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Ингредиенты | Расход ингредиентов, т ингр./т краски | Запас, т ингр./сутки |
| Краска 1-го вида | Краска 2-го вида |
| А | 1 | 2 | 6 |
| В | 2 | 1 | 8 |

Изучение рынка сбыта показало, что суточный спрос на краску 2-го вида никогда не превышает спроса на краску 1-го вида более, чем на 1 т. Кроме того, установлено, что спрос на краску 2-го вида никогда не превышает 2 т в сутки. Оптовые цены одной тонны красок равны: 3 тыс. руб. для краски 1-го вида; 2 тыс. руб. для краски 2-го вида.

Необходимо построить математическую модель, позволяющую установить, какое количество краски каждого вида надо производить, чтобы доход от реализации продукции был максимальным. Найти оптимальное решение задачи.

**Решение**

В задаче требуется установить, сколько краски каждого вида надо производить. Поэтому искомыми величинами, а значит, и переменными задачи являются *суточные* *объемы производства* каждого вида красок:

 – суточный объем производства краски 1-го вида, [т краски/сутки];

 – суточный объем производства краски 2-го вида, [т краски/сутки].

***Математическая модель*** этой задачи имеет вид





Построим прямые ограничений (рис. 1).





Рис. 1. Графическое решение задачи

Определим ОДР. Например, подставим точку (0;0) в исходное ограничение (3), получим 0 ≤ 1 , что является истинным неравенством, поэтому стрелкой (или штрихованием) обозначим полуплоскость, ***содержащую*** точку (0;0), т.е. расположенную правее и ниже прямой (3). Аналогично определим допустимые полуплоскости для остальных ограничений и укажем их стрелками у соответствующих прямых ограничений (см. рис. 1). Общей областью, разрешенной всеми ограничениями, т.е. ОДР является многоугольник ABCDEF.

Найдем координаты точек пересечения прямых ограничений, т.е. координаты угловых точек. В некоторых случаях хороший рисунок позволяет сразу определять координаты угловых точек.

;

;

;

;

Для определения координаты точки Е решим систему уравнений с ограничениями (5) и (6).



Решая данную систему получаем: 



.

Найдем значение целевой функции в угловых точках, т.е. подставим их координаты в уравнение .













Е – это точка максимума ЦФ.

Таким образом, наилучшим режимом работы фирмы является ежесуточное производство краски 1-го вида в объеме 3 1/3 т и краски 2-го вида в объеме 1 1/3 т. Доход от продажи красок составит 12 2/3 тыс. руб. в сутки.

Решим ту же задачу симплекс методом:

Введем свободные переменные *x*3, *x*4, *x*5, *x*6, для того, чтобы систему неравенств превратить в систему уравнений.



Выбираем переменную, входящую в целевую функцию с максимальным коэффициентом, это *x*1. Сравниваем частные от деления свободных членов на коэффициенты при *x*1 6; 4; -1; +∞. Выбираем строку с min > 0 частным от деления и нормируем ее, из остальных строк исключаем x1 методом Гаусса.



Выбираем переменную, входящую в целевую функцию с max коэффициентом, это *x*2. Сравниваем частные от деления свободных членов на коэффициенты при x2 4/3; 8; 10/3; 2. Выбираем строку с min > 0 частным от деления и нормируем ее, из остальных строк исключаем *x*2 методом Гаусса.



Так как все коэффициенты перед переменными в уравнении с целевой функцией < 0, то решение законченно.

В силу не отрицательности переменных из уравнения, содержащего целевую функцию следует, что она достигает максимального значения, в случае, когда *x*3 = 0 и *x*4 = 0, в этом случае 

**Задача 2.**

Найти тремя методами опорный план транспортной задачи, в которой запасы на трех складах равны 210, 170, 65 ед. продукции, потребности четырех магазинов равны 110, 90, 130, 100 ед. продукции, тарифы перевозки в рублях за единицу продукции следующие:



**Решение**

Проверка сбалансированности задачи показывает, что суммарный объем запасов  больше суммарного объема потребностей, т.е. введение необходимо введение фиктивного столбца , после чего задача становится сбалансированной .

Результаты нахождения опорного плана различными методами представлены в следующих таблицах.

Транспортная таблица с опорным планом, найденным методом северо-западного угла.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Пункты отправления, A*i* | Пункты назначения Bj | Запасы продукции в пунктах отправления |
| B1 | B2 | B3 | B4 | Bф |
| A1 | 110 |  | 90 |  | 10 |  |  |  |  |  | 210/100/10/0 |
| 5 | 8 | 1 | 2 | 0 |
| A2 |  |  |  |  | 120 |  | 50 |  |  |  | 170/50 |
| 2 | 5 | 4 | 9 | 0 |
| A3 |  |  |  |  |  |  | 50 |  | 15 |  | 65/15/0 |
| 9 | 2 | 3 | 2 | 0 |
| Потребности в продукции, в пунктах назначения | 110/0 | 90/0 | 130/120/0 | 100/50/0 | 15/0 | 445 = 445 |

Затраты на транспортировку при перемещении товара согласно полученному опорному плану равны:

.

Транспортная таблица с опорным планом, найденным методом минимального элемента.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Пункты отправления, Ai | Пункты назначения B*j* | Запасы продукции в пунктах отправления |
| B1 | B2 | B3 | B4 | Bф |
| A1 |  |  |  |  | 130 |  | 80 |  |  |  | 210/80/0 |
| 5 | 8 | 1 | 2 | 0 |
| A2 | 110 |  | 25 |  |  |  | 20 |  | 15 |  | 170/60/35/15/0 |
| 2 | 5 | 4 | 9 | 0 |
| A3 |  |  | 65 |  |  |  |  |  |  |  | 65/0 |
| 9 | 2 | 3 | 2 | 0 |
| Потребности в продукции, в пунктах назначения | 110/0 | 90/25/0 | 130/0 | 100/20/0 | 15/0 | 445 = 445 |

Затраты на транспортировку при перемещении товара согласно полученному опорному плану равны:

.

Транспортная таблица с опорным планом, найденным методом Фогеля.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Пункты отправления, A*i* | Пункты назначения Bj | Запасы продукции в пунктах отправления | Штрафы строк |
| B1 | B2 | B3 | B4 | Bф |
| A1 |  |  |  |  | 110 |  | 100 |  |  |  | 210/110/0 | 1 | 1 | 1 | **7** |  |  |  |
| 5 | 8 | 1 | 2 | 0 |
| A2 | 110 |  | 25 |  | 20 |  |  |  | 15 |  | 170/60/35/15/0 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 4 | 0 |
| 2 | 5 | 4 | 9 | 0 |
| A3 |  |  | 65 |  |  |  |  |  |  |  | 65/0 | 0 | 0 |  |  |  |  |  |
| 9 | 2 | 3 | 2 | 0 |
| Потребности в продукции, в пунктах назначения | 110/0 | 90/25/0 | 130/20/0 | 100/0 | 15/0 | 445 = 445 |  |  |  |  |  |  |  |
| Штрафы столбцов | **3** | 3 | 2 | 0 | 0 |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  | **3** | 2 | 0 | 0 |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  | 3 | 3 | **7** | 0 |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  | 3 | 3 |  | 0 |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  | 5 | 4 |  | 0 |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  | 4 |  | 0 |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  | 0 |  |  |  |  |  |  |  |  |

Затраты на транспортировку при перемещении товара согласно полученному опорному плану равны:

.

Отметим, что хотя введенные фиктивные строки или столбцы и считаются равноправными, но в случае задания в них нулевых тарифов эти тарифы не считаются как минимальные при построении опорных планов.

Отметим, что опорный план, найденный методом северо-западного угла дает в общем случае наихудшее приближение, т.к. является «слепым», т.е. совершенно не зависит от тарифов.

Метод минимального элемента предполагает перевозки в первую очередь в те пункты назначения, доставка в которые обойдется дешевле. В силу этого в общем случае суммарные затраты на транспортировку при применении этого метода несколько меньше.

Метод Фогеля путем введения понятия штрафов выбирает для перевозок те маршруты, не выбрав которые мы могли бы увеличить расходы на транспорт в дальнейшем, из-за отсутствия выбора места назначения или места отправления.

**Задача 3.**

Найти оптимальное решение транспортной задачи опорный план которой представлен следующей транспортной матрицей:

|  |  |
| --- | --- |
| Пункты отправления, A*i* | Пункты назначения *Bj* |
| B1 | B2 | B3 | B4 | Bф |
| A1 | 110 |  | 90 |  | 10 |  |  |  |  |  |
| 5 | 8 | 1 | 2 | 0 |
| A2 |  |  |  |  | 120 |  | 50 |  |  |  |
| 2 | 5 | 4 | 9 | 0 |
| A3 |  |  |  |  |  |  | 50 |  | 15 |  |
| 9 | 2 | 3 | 2 | 0 |

**Решение**

Проверяем условие Данцига: 7 = 5 + 3 – 1*.*

Строим систему потенциалов. *Задаем первой строке потенциал равный* 100*.*

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Пункты отправления, A*i* | Пункты назначения *Bj* | Потенциалы |
| B1 | B2 | B3 | B4 | Bф |
| A1 | 110 |  | 90 |  | 10 |  |  |  |  |  | 100 |
| 5 | 8 | 1 | 2 | 0 |
| A2 |  |  |  |  | 120 |  | 50 |  |  |  | 97 |
| 2 | 5 | 4 | 9 | 0 |
| A3 |  |  |  |  |  |  | 50 |  | 15 |  | 104 |
| 9 | 2 | 3 | 2 | 0 |
| Потенциалы | 105 | 108 | 101 | 106 | 104 |  |

*Через заполненные клетки определяем потенциалы первого, второго, и третьего столбцов. Далее через клетку* (A2,B3) *определяем потенциал второй строки, через клетку* (A2,B4) *определяем потенциал четвертого столбца. После чего через клетку* (A3,B4) *определяем потенциал третей строки и через клетку* (A3,Bф) *потенциал последнего столбца.*

Проверяем условие оптимальности. *Оно не выполнено в клетках* (A1,B4), *где нарушение составляет* 4, (A1,Bф), *где нарушение составляет* 4, (A2,B1), *где нарушение составляет* 6, (A2,B2), *где нарушение составляет* 6, (A2,Bф), *где нарушение составляет* 7 *и* (A3,B2), *в которой нарушение составляет* 2.

Применим формальное правило улучшение плана для клетки (A2,Bф), *т.к. в ней выявлено наибольшее нарушение*.



Получили следующий вид транспортной матрицы:

|  |  |
| --- | --- |
| Пункты отправления, A*i* | Пункты назначения Bj |
| B1 | B2 | B3 | B4 | Bф |
| A1 | 110 |  | 90 |  | 10 |  |  |  |  |  |
| 5 | 8 | 1 | 2 | 0 |
| A2 |  |  |  |  | 120 |  | 35 |  | 15 |  |
| 2 | 5 | 4 | 9 | 0 |
| A3 |  |  |  |  |  |  | 65 |  |  |  |
| 9 | 2 | 3 | 2 | 0 |

Проверяем условие Данцига и строим систему потенциалов. *Задаем первой строке потенциал, равный* 100*.*

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Пункты отправления, A*i* | Пункты назначения Bj | Потенциалы |
| B1 | B2 | B3 | B4 | Bф |
| A1 | 110 |  | 90 |  | 10 |  |  |  |  |  | 100 |
| 5 | 8 | 1 | 2 | 0 |
| A2 |  |  |  |  | 120 |  | 35 |  | 15 |  | 97 |
| 2 | 5 | 4 | 9 | 0 |
| A3 |  |  |  |  |  |  | 65 |  |  |  | 104 |
| 9 | 2 | 3 | 2 | 0 |
| Потенциалы | 105 | 108 | 101 | 106 | 97 |  |

Проверяем условие оптимальности. *Оно не выполнено в клетках* (A1,B4), *где нарушение составляет* 4, (A2,B1), *где нарушение составляет* 6, (A2,B2), *где нарушение составляет* 6 *и* (A3,B2), *в которой нарушение составляет* 2.

Применим формальное правило улучшения плана для клетки (A2,B1), *т.к. в ней выявлено наибольшее нарушение*.



Получили следующий вид транспортной матрицы:

|  |  |
| --- | --- |
| Пункты отправления, A*i* | Пункты назначения B*j* |
| B1 | B2 | B3 | B4 | Bф |
| A1 |  |  | 90 |  | 120 |  |  |  |  |  |
| 5 | 8 | 1 | 2 | 0 |
| A2 | 110 |  |  |  | 10 |  | 35 |  | 15 |  |
| 2 | 5 | 4 | 9 | 0 |
| A3 |  |  |  |  |  |  | 65 |  |  |  |
| 9 | 2 | 3 | 2 | 0 |

Проверяем условие Данцига и строим систему потенциалов. *Задаем второй строке потенциал равный* 100*.*

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Пункты отправления, A*i* | Пункты назначения B*j* | Потенциалы |
| B1 | B2 | B3 | B4 | Bф |
| A1 |  |  | 90 |  | 120 |  |  |  |  |  | 103 |
| 5 | 8 | 1 | 2 | 0 |
| A2 | 110 |  |  |  | 10 |  | 35 |  | 15 |  | 100 |
| 2 | 5 | 4 | 9 | 0 |
| A3 |  |  |  |  |  |  | 65 |  |  |  | 107 |
| 9 | 2 | 3 | 2 | 0 |
| Потенциалы | 102 | 111 | 104 | 109 | 100 |  |

Проверяем условие оптимальности. *Оно не выполнено в клетках* (A1,B4), *где нарушение составляет* 4, (A2,B2), *где нарушение составляет* 6 *и* (A3,B2), *в которой нарушение составляет* 2.

Применим формальное правило улучшение плана для клетки (A2,B2), *т.к. в ней выявлено наибольшее нарушение*.



Получили следующий вид транспортной матрицы:

|  |  |
| --- | --- |
| Пункты отправления, Ai | Пункты назначения Bj |
| B1 | B2 | B3 | B4 | Bф |
| A1 |  |  | 80 |  | 130 |  |  |  |  |  |
| 5 | 8 | 1 | 2 | 0 |
| A2 | 110 |  | 10 |  |  |  | 35 |  | 15 |  |
| 2 | 5 | 4 | 9 | 0 |
| A3 |  |  |  |  |  |  | 65 |  |  |  |
| 9 | 2 | 3 | 2 | 0 |

Проверяем условие Данцига и строим систему потенциалов. *Задаем второй строке потенциал равный* 100*.*

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Пункты отправления, A*i* | Пункты назначения B*j* | Потенциалы |
| B1 | B2 | B3 | B4 | Bф |
| A1 |  |  | 80 |  | 130 |  |  |  |  |  | 97 |
| 5 | 8 | 1 | 2 | 0 |
| A2 | 110 |  | 10 |  |  |  | 35 |  | 15 |  | 100 |
| 2 | 5 | 4 | 9 | 0 |
| A3 |  |  |  |  |  |  | 65 |  |  |  | 107 |
| 9 | 2 | 3 | 2 | 0 |
| Потенциалы | 102 | 105 | 98 | 109 | 100 |  |

Проверяем условие оптимальности. *Оно не выполнено в клетке* (A1,B4), *где нарушение составляет* 4.

Применим формальное правило улучшения плана для клетки (A1,B4).



Получили следующий вид транспортной матрицы:

|  |  |
| --- | --- |
| Пункты отправления, A*i* | Пункты назначения B*j* |
| B1 | B2 | B3 | B4 | Bф |
| A1 |  |  | 45 |  | 130 |  | 35 |  |  |  |
| 5 | 8 | 1 | 2 | 0 |
| A2 | 110 |  | 45 |  |  |  |  |  | 15 |  |
| 2 | 5 | 4 | 9 | 0 |
| A3 |  |  |  |  |  |  | 65 |  |  |  |
| 9 | 2 | 3 | 2 | 0 |

Проверяем условие Данцига и строим систему потенциалов. *Задаем второй строке потенциал равный* 100*.*

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Пункты отправления, A*i* | Пункты назначения B*j* | Потенциалы |
| B1 | B2 | B3 | B4 | Bф |
| A1 |  |  | 45 |  | 130 |  | 35 |  |  |  | 98 |
| 5 | 8 | 1 | 2 | 0 |
| A2 | 110 |  | 45 |  |  |  |  |  | 15 |  | 100 |
| 2 | 5 | 4 | 9 | 0 |
| A3 |  |  |  |  |  |  | 65 |  |  |  | 98 |
| 9 | 2 | 3 | 2 | 0 |
| Потенциалы | 102 | 105 | 99 | 100 | 100 |  |

Проверяем условие оптимальности. *Оно не выполнено в клетках* (A1,Bф), *где нарушение составляет* 2, (A3,B2), *где нарушение составляет* 5 *и* (A3,Bф), *в которой нарушение составляет* 2.

Применим формальное правило улучшение плана для клетки (A3,B2), *т.к. в ней выявлено наибольшее нарушение*.



Получили следующий вид транспортной матрицы:

|  |  |
| --- | --- |
| Пункты отправления, A*i* | Пункты назначения B*j* |
| B1 | B2 | B3 | B4 | Bф |
| A1 |  |  |  |  | 130 |  | 80 |  |  |  |
| 5 | 8 | 1 | 2 | 0 |
| A2 | 110 |  | 45 |  |  |  |  |  | 15 |  |
| 2 | 5 | 4 | 9 | 0 |
| A3 |  |  | 45 |  |  |  | 20 |  |  |  |
| 9 | 2 | 3 | 2 | 0 |

Проверяем условие Данцига и строим систему потенциалов. *Задаем второй строке потенциал равный* 100*.*

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Пункты отправления, A*i* | Пункты назначения B*j* | Потенциалы |
| B1 | B2 | B3 | B4 | Bф |
| A1 |  |  |  |  | 130 |  | 80 |  |  |  | 103 |
| 5 | 8 | 1 | 2 | 0 |
| A2 | 110 |  | 45 |  |  |  |  |  | 15 |  | 100 |
| 2 | 5 | 4 | 9 | 0 |
| A3 |  |  | 45 |  |  |  | 20 |  |  |  | 103 |
| 9 | 2 | 3 | 2 | 0 |
| Потенциалы | 102 | 105 | 104 | 105 | 100 |  |

Проверяем условие оптимальности. *Оно выполнено во всех клетках, следовательно получен оптимальный план перевозок. Суммарные затраты за транспортировку составит:*



Это более ожидаемый плановый результат.