Лекция 2.

Общий метод расчета емкости и напряженности электрического поля простейших систем. Расчет плоского, цилиндрического и сферического конденсаторов

Расчетам емкости и напряженности электрического поля в ТВН придается важное значение, так как большинство высоковольтных конструкций состоит из проводящих поверхностей, разделенных слоем диэлектрика.

Общий метод расчета емкости и напряженности электрического поля простейших систем

Расчетам емкости и напряженности электрического поля в ТВН придается исключительно важное значение, так как большинство высоковольтных конструкций состоит из проводящих поверхностей, разделенных слоем диэлектрика.

Для измерения емкости используются мостовые схемы различной конструкции. Расчет емкости может быть произведен по результатам измерения тока и напряжения при заданной частоте

$$C = \frac{I \cdot 10^6}{U 2\pi f} \; [мкф].$$

Если расчет емкости производится в процессе конструирования изделия, то сложная форма проводящих поверхностей приводится к геометрически правильной системе: плоскость — плоскость, цилиндр — цилиндр, сфера — сфера, для которых можно установить единую математическую последовательность расчета емкости и напряженности. Исходным соотношением такого расчета является теорема Гаусса*.

Теорема Гаусса: *поток вектора напряженности электрического поля сквозь замкнутую поверхность равен заряду, заключенному в части пространства, ограниченного этой поверхностью, деленному на величину диэлектрической проницаемости исследуемой среды.*

Математически теорема Гаусса выражается зависимостью

$$\oint E\,dS = \frac{Q}{\varepsilon_0 \varepsilon'}, \tag{7}$$

где Q — заряд, *к*;

E — напряженность электрического поля, *в/м*;

$\varepsilon_0 \varepsilon'$ — диэлектрическая проницаемость среды, *ф/м*.

При расчетах целесообразно использовать эквипотенциальные поверхности S_a, которые с одной стороны геометрически правильны, а с другой выбраны так, что напряженность электрического поля во всех точках неизменна. Это позволяет вынести величину напряженности за знак интеграла. Части поверхности, не пересекаемые потоком вектора напряженности электрического поля, например торцевые части цилиндрической поверхности, следует исключить из рассмотрения.

Последовательность расчета емкости и напряженности:

1. Применяя теорему Гаусса, мысленно ограничим один из электродов заданной системы замкнутой эквипотенциальной поверхностью, для которой выразим математическую связь между напряженностью электрического поля, зарядом и диэлектрической проницаемостью среды:

$$E\oint dS = \frac{Q}{\varepsilon}, \tag{8}$$

так как

$$\oint dS = S_a,$$

то

$$E = \frac{Q}{\varepsilon S_a}. \tag{9}$$

2. Используя соотношения (3) и (9), установим, что напряжение между электродами математически выражается через определенный интеграл вектора напряженности электрического поля по пути убывания потенциала (знак минус) вдоль направления силовых линий:

$$U = \varphi_1 - \varphi_2 = -\int_1^2 E\,da = -\frac{Q}{\varepsilon}\int_1^2 \frac{da}{S_a}\ [в]. \tag{10}$$

Здесь положительно заряженному электроду присвоен индекс 1. Пользуясь формулой (6), согласно которой емкость есть отношение заряда к напряжению, и зависимостью (10), получим после перемены пределов интегрирования соотношение, определяющее в общем виде емкость рассматриваемой конструкции:

$$C = \frac{\varepsilon}{\int_2^1 \frac{da}{S_a}}\ [ф]. \tag{11}$$

В соответствии с изложенной последовательностью расчета емкости одним из промежуточных действий было определение напряженности (9), однако полученная зависимость не может быть практически использована, так как величина заряда Q обычно не задается.

Для получения практически пригодной формулы расчета напряженности электрического поля любой точки между электродами, следует, рассчитав емкость конденсатора по формуле (11) и зная напряжение, приложенное к электродам, выразить в зависимости (9) заряд как произведение емкости на напряжение:

$$E_x = \frac{CU}{\varepsilon S_x}\ [в/м], \tag{12}$$

где C — емкость конденсатора;

$S_x = S_a$ — эквипотенциальная поверхность, проведенная через точку с искомой напряженностью электрического поля, $м^2$;

U — напряжение, действующее между электродами, *в*;

ε — диэлектрическая проницаемость среды, *ф/м*.

РАСЧЕТ ПЛОСКОГО, ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО И СФЕРИЧЕСКОГО КОНДЕНСАТОРОВ

Плоский конденсатор

Для расчета емкости и напряженности электрического поля между электродами конденсатора воспользуемся схемой рис. 3 и вышеизложенной последовательностью расчета.

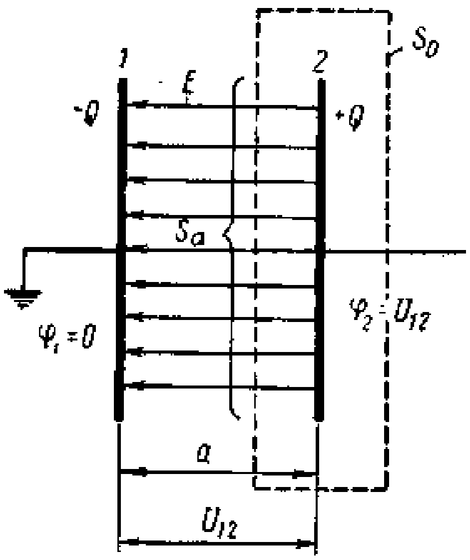

Рис. 3. Расчетная схема плоского конденсатора:
S_0 — условная замкнутая поверхность;
S_a — активная часть замкнутой поверхности

Емкость конденсатора определится из зависимости

$$C = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon' S_a}{a}\ [ф]. \tag{13}$$

В том случае, если напряжение, приложенное к конденсатору, задано, можно получить формулу для расчета напряженности электрического поля в изоляции

$$E = \frac{Q}{\varepsilon S_a} = \frac{UC}{\varepsilon S_a} = \frac{U \varepsilon S_a}{\varepsilon S_a a} = \frac{U}{a}\ [кв/см]. \tag{14}$$

Изменение потенциала и напряженности в слое диэлектрика можно изобразить графически. Для плоского конденсатора эти характеристики изображены на рис. 2.

Расчет плоского конденсатора со слоистой изоляцией

Расчет емкости и напряженности электрического поля в изоляции слоистого конденсатора производится согласно двум основным положениям:

а) напряжение, приложенное к внешним обкладкам конденсатора, равно сумме напряжений, приходящихся на каждый слой:

$$U_0 = U_1 + U_2 + \ldots + U_n; \qquad (15)$$

б) электрическое смещение и заряд в плоскости любого слоя постоянны

$$D = E_1\varepsilon_1 = E_2\varepsilon_2 = E_n\varepsilon_n, \qquad (16)$$

$$Q = CU = C_1U_1 = C_2U_2 = C_nU_n. \qquad (17)$$

Расчетные формулы емкости двух- и трехслойного конденсатора имеют вид

$$C = \frac{C_1C_2}{C_1 + C_2}, \qquad (18)$$

$$C = \frac{C_1C_2C_3}{C_1C_2 + C_1C_3 + C_2C_3}. \qquad (19)$$

Кроме того, из равенства зарядов следует

$$\frac{U_1}{U_2} = \frac{C_2}{C_1}. \qquad (20)$$

Напряжения между смежными слоями плоского и любого другого конденсатора распределяются обратно пропорционально емкостям этих слоев.

Для вывода расчетной формулы напряженности электрического поля в диэлектрике плоского конденсатора используем зависимости (14), (15) и (16), откуда для двухслойного конденсатора получим:

$$U = E_1a_1 + E_2a_2 = E_1a_1 + E_1\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}a_2 = E_1\left(\frac{a_1\varepsilon_2 + a_2\varepsilon_1}{\varepsilon_2}\right),$$

$$E_1 = \frac{U\varepsilon_2}{a_1\varepsilon_2 + a_2\varepsilon_1}. \qquad (21)$$

Зависимость (21) можно видоизменить

$$E_1 = \frac{U}{a_1}\left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_2 + \frac{a_2\varepsilon_1}{a_1}}\right) = \frac{U}{a_1\left(1 + \frac{\varepsilon_1 S a_2}{a_1\varepsilon_2 S}\right)} = \frac{U}{a_1\left(1 + \frac{C_1}{C_2}\right)},$$

Регулирование напряжения на слое конденсатора можно осуществлять подбором его толщины и величины относительной диэлектрической проницаемости материала.

Опыт показывает, что величина средней пробивной напряженности воздушной среды между электродами плоского конденсатора зависит при прочих равных условиях от расстояния между электродами (рис. 4). Это объясняется нарушением однородности поля у краев электродов.

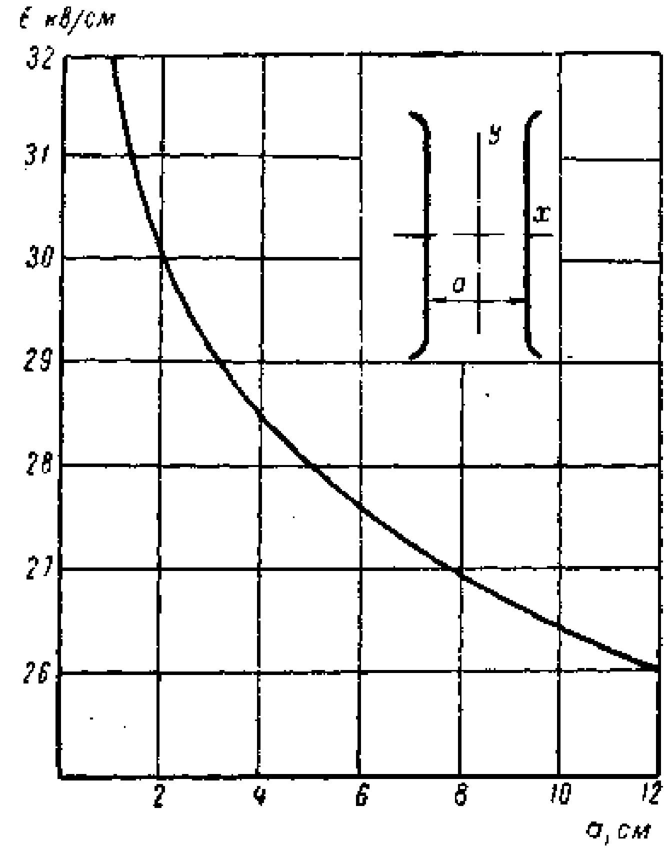

Рис. 4. Опытная характеристика зависимости пробивной прочности воздуха от расстояния между плоскими электродами при нормальных атмосферных условиях

Цилиндрический конденсатор

Поле цилиндрического конденсатора плоскопараллельное и характеризуется осевой симметрией, причем эквипотенциальные поверхности представляют собой коаксиальные цилиндры.

Последовательность расчета:

1. В соответствии с теоремой Гаусса

$$E_x = \frac{Q}{\varepsilon_0 \varepsilon' 2\pi r_x l} [в/см]. \quad (23)$$

Переменная величина r_x в знаменателе зависимости (23) определяет гиперболический закон изменения напряженности электрического поля.

2. Используя зависимость (10), выразим напряжение, приложенное к конденсатору, через напряженность электрического поля E_x:

$$U = -\int_R^r E_x\,dx = -\frac{Q}{\varepsilon_0 \varepsilon' 2\pi l}\int_R^r \frac{dx}{r_x}, \quad (24)$$

откуда

$$U = \frac{Q}{2\pi\varepsilon'\varepsilon_0 l} \ln\frac{R}{r}\ [в]. \quad (25)$$

3. В соответствии с определением емкости как отношения заряда к напряжению имеем

$$C = \frac{2\pi\varepsilon_0\varepsilon' l}{\ln \frac{R}{r}} \ [\phi]. \tag{26}$$

При замене в выражении (23) заряда через произведение емкости и напряжения после соответствующих преобразований получим уравнение для напряженности электрического поля, пригодное для практических расчетов

$$E_x = \frac{U}{2{,}3x \lg \frac{R}{r}} \ [в/см]. \tag{27}$$

В большинстве случаев важны максимальная и минимальная величины напряженности электрического поля, получаемые из общей зависимости (27):

$$E_{max} = \frac{U}{2{,}3r \lg \frac{R}{r}} [в/см], \tag{28}$$

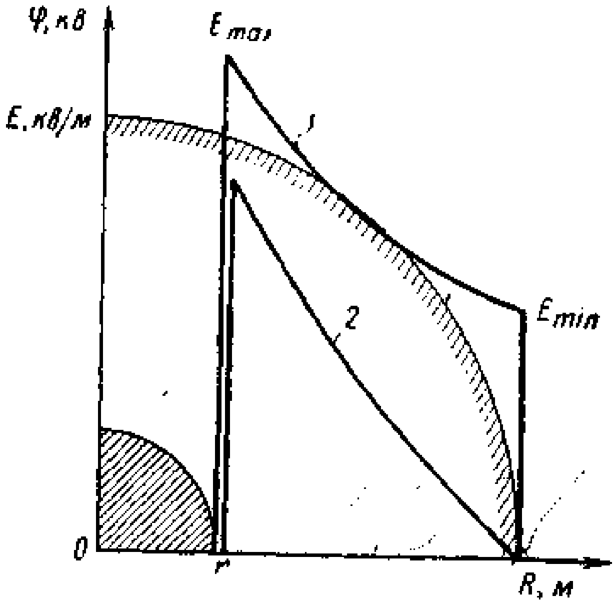

Рис. 5. Изменение напряженности (*1*) и потенциала (*2*) в слое изоляции цилиндрического конденсатора

$$E_{min} = \frac{U}{2{,}3R \lg \frac{R}{r}} \ [в/см]. \tag{29}$$

Для расчета характеристики изменения потенциала в слое изоляции воспользуемся формулами (10) и (27), предположив, что потенциал уменьшается при изменении координаты точки от x до R, получим

$$\varphi_x = -\int_R^x E_x dx = -\frac{U}{2{,}3 \lg \frac{R}{r}} \int_R^x \frac{dx}{x} = \frac{U}{\lg \frac{R}{r}} \lg \frac{R}{x}. \tag{30}$$

Характеристики изменения потенциала и напряженности электрического поля вдоль радиуса цилиндрического конденсатора приведены на рис. 5. Напряженность электрического поля у поверхности с меньшим радиусом имеет максимальное значение.

Таким образом, если вблизи внутреннего электрода материал напряжен до предела, то у внешней поверхности он недогружен.

Математическое исследование зависимости (28) на минимум позволяет выбрать наиболее рациональные радиусы, при которых изоляция загружена более равномерно и имеет минимальную толщину. Для анализа берут первую производную от знаменателя в выражении (28) и приравнивают ее нулю:

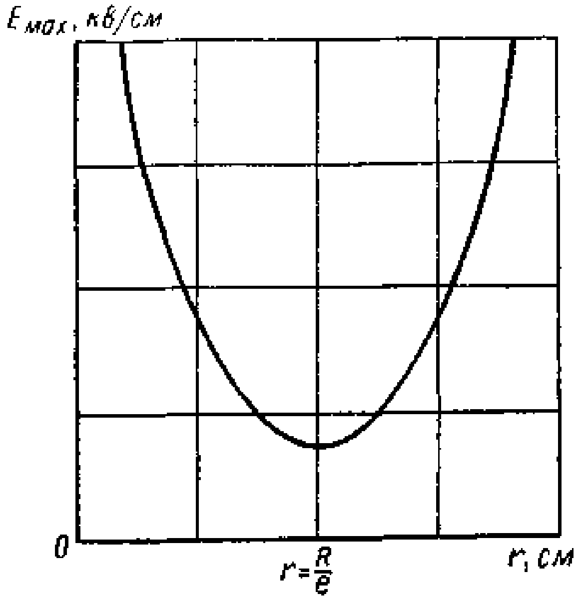

Рис. 6. Зависимость максимальной напряженности электрического поля от радиуса внутреннего электрода цилиндрического конденсатора

$$\frac{d}{dr}\left(r\ln\frac{R}{r}\right)=\frac{d}{dr}(r\ln R-r\ln r)=\ln R-\ln r-1=0, \tag{31}$$

откуда

$$\ln\frac{R}{r}=1, \tag{32}$$

т.е.

$$\frac{R}{r}=e=2{,}718. \tag{33}$$

Максимальная напряженность электрического поля вблизи поверхности внутреннего цилиндра минимальна, если отношение радиусов внешнего и внутреннего цилиндров равно основанию натурального логарифма (e=2,718).

$$E_{max}=\frac{U}{r\ln\frac{R}{r}}=\frac{U}{r\ln e}=\frac{U_0}{r}\ [кв/см]. \tag{34}$$

Характер изменения максимальной напряженности электрического поля при изменении r приведен на рис. 6.