

Лекция 8.

Общие сведения о схемах замещения. Формы записи параметров электрических систем. Общие сведения о формах математического описания установившихся режимов энергосистем. Уравнения узловых напряжений в форме баланса токов (линейная и нелинейная формы с комплексными переменными).

Моделирование является одним из самых мощных методов познания окружающего нас мира. С давних времен этот метод применялся при постройке зданий и сооружений, для предсказания явлений природы, установления законов и т.п. Трудно сейчас назвать область деятельности человека, где бы не применялось моделирование.

Под математическим моделированием понимается описание некоторых свойств и соотношений реального объекта, процесса или явления с помощью математической символики. Наиболее известными математическими моделями являются системы целых и действительных чисел. Эти модели используются для описания таких процессов, как счет, сравнение, измерение и т.п. Модели, которые применимы к объектам произвольной формы, называются абстрактными, абстрактную модель можно определить двумя способами: аксиоматически и конструктивно.

Аксиоматическое определение основано на непротиворечивом наборе правил (определяющих аксиом), вводящих операции, которыми можно пользоваться, и устанавливающих соотношения между их результатами. Например, правила сложения и умножения действительных чисел. Конструктивное определение вводит математическую модель на основе уже известных математических понятий, например сложение и умножение матриц в терминах сложения и умножения чисел.

Моделирование как научный метод стал предметом обобщения и анализа начиная с 40-х годов XX века. Вначале появилось не совсем четкое представление о некоем объекте-заместителе, материальном или идеальном, который при определенных условиях может заменять исходный объект-

оригинал, воспроизводя некоторые характеристики, свойства и отношения, присущие последнему.

Преимущества объекта-заместителя заключаются в его доступности, обозримости в пространстве и времени, наглядности и неограниченных возможностях для экспериментирования.

Математическое моделирование предполагает описание свойств определенного объекта на языке математики с целью его дальнейшего исследования при решении различных задач также только методами математики. Объект, описанный на языке математики, представляется некоторой математической структурой (различными уравнениями, передаточной функцией, графиком и т. п.) с определенными параметрами; а процесс исследования математической модели заключается в применении к этой структуре совокупности математических преобразований и операций в соответствии с некоторым алгоритмом. Результатом такого исследования является новая информация об объекте, но в той части его свойств, которые нашли отражение в математическом описании.

ЭВМ позволяют исследовать эти свойства при возможных вариациях параметров, входящих в модель, определить ее вероятностные характеристики, находить оптимальные параметры и решать другие задачи.

Недостатком метода математического моделирования является то, что исследователь находится в плену существующей математики. Он пытается описать явления в новых областях с помощью известных математических структур. Но может ли математика описать изучаемые явления? Не во всех случаях. К таким случаям относятся, например, некоторые экологические, экономические и социальные задачи. Развитие этих научных направлений требует от математиков разработки новых структур, дающих исследователю возможность использовать методы математического моделирования.

В настоящем учебном пособии рассматриваются вопросы математического моделирования технических объектов и физических процессов при решении инженерных задач в области электроэнергетики.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРИ РЕШЕНИИ ИНЖЕНЕРНЫХ ЗАДАЧ

Решение задач и моделирование

Любой материальный объект характеризуется бесчисленным множеством свойств, признаков и характеристик, но наши знания о материальном объекте конечны и относительно на любом этапе развития.

В процессе познания у человека (субъекта) в сознании формируется мысленный образ объекта, который обладает присущими этому объекту свойствами (цвет, запах, размеры, вес, изменчивость во времени и др.). Такой мысленный образ есть мысленная (идеальная) модель объекта (рис. 1.1).

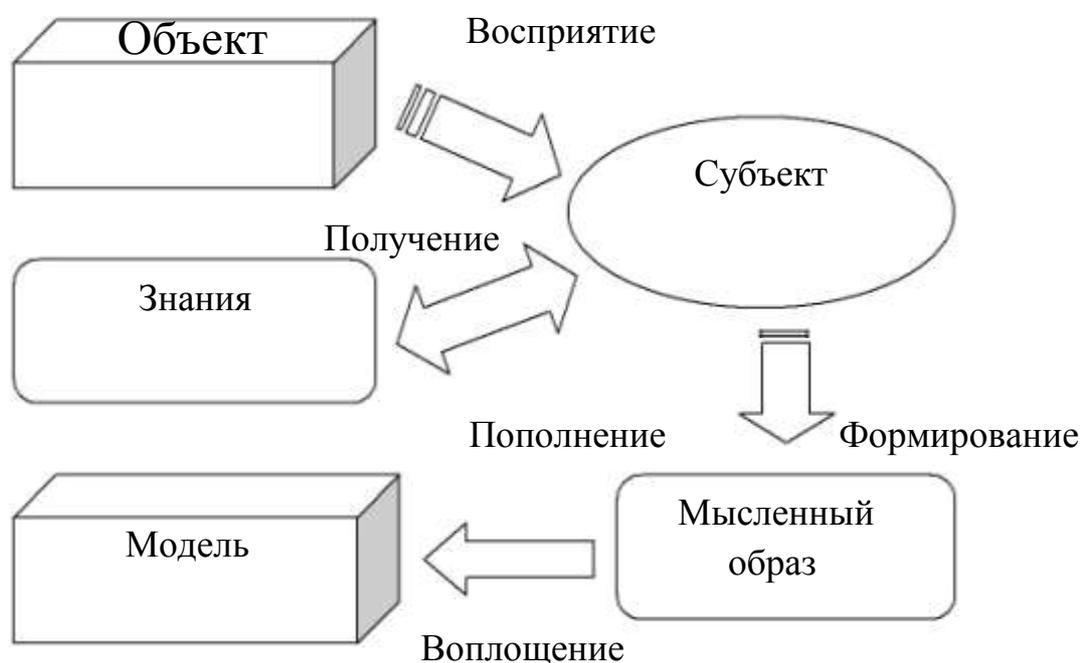


Рис. 1.1. Схема формирования модели

Познавательный процесс человека носит целенаправленный характер, а именно, во всех случаях субъект решает некоторую задачу для достижения своих целей. Задача выделяет из бесконечного множества свойств объекта конечную совокупность и позволяет перейти к обозримому по своим масштабам «заместителю» объекта – модели. Задача – это фильтр, позволяющий отсеять из всей информации об объекте несущественную.

Таким образом, задача определяет характер формируемой модели.

Рассмотрим несколько примеров.

Пример 1. Сконструируем трансформатор заданной мощности и возможным диапазоном изменения напряжений на первичной и вторичной обмотках. В качестве ограничений учтем требования по допустимым потерям холостого хода и работе на линейной части характеристики намагничивания сердечника и габаритам трансформатора.

В этом случае необходимо учитывать электрические, магнитные, конструктивные, геометрические, тепловые свойства трансформатора.

Вводить понятие модели без четкого указания задачи или задач неправомерно. Вне контекста задачи или класса задач понятие модели не имеет смысла.

Фундаментальным свойством модели является простота по отношению к объекту. Модель всегда «беднее» объекта в информационном отношении. «Точная модель» недоступна, как и сам оригинал.

Задача своими условиями и требованиями позволяет определить ограничения и допущения в построении любой модели.

Пример 2. Рассмотрим маятник – груз, подвешенный на нити. Модель (геометрическая) дана на рис. 1.2. Модель (математическая) движения маятника в общем является довольно сложным нелинейным дифференциальным уравнением, но при принятых допущениях, «дозволенных» задачей, это уравнение становится довольно простым и легко решается. Перечислим допущения, которые принимаются при этом:

- размерами маятника пренебрегаем, и его масса сосредоточена в одной точке (пренебрегаем сопротивлением воздуха);
- растяжением нити пренебрегаем;
- массой нити пренебрегаем.

Вводится также ограничение – амплитуда колебаний пренебрежимо мала по сравнению с длиной нити.

При таких допущениях и ограничении получается модель – математический маятник. Период малых колебаний математического маятника не зависит от массы маятника и амплитуды его колебаний. Уравнение движения маятника записывается в виде

$$d^2 s / dt^2 = -g s / l, \quad (1.1)$$



Рис. 1.2. Геометрическая модель маятника

где s – длина дуги, по которой маятник совершает движение; g – ускорение свободного падения; l – длина нити.

Как известно, наблюдения над колебаниями маятников используются для определения ускорения g силы тяжести в разных широтах Земного шара.

Человечество за свою жизнь накопило огромное количество теорий и законов. Это практически достоверное обобщенное описание объектов реального мира.

Иногда для решения частных задач вводятся еще большие ограничения и допущения, которые упрощают известные теории и законы. В этом случае появляются модели моделей, в которые переходят все допущения и ограничения исходных моделей.

Классификация моделей

Существуют разные способы классификации моделей:

- по классам задач;
- по области использования;
- по способу представления и др.

Из классов задач, по которым разделяют модели, можно назвать: анализ, синтез, конструирование, проектирование, управление, утилизация и т. п.

По области использования модели разделяют:

- учебные – наглядные пособия, различные тренажеры, обучающие программы;
- опытные – копии объектов, которые используются для исследования объекта и прогнозирования его характеристик в будущем;
- научно-технические, используемые для исследования процессов и явлений (различные стенды, моделирующие физические и природные явления);
- игровые – военные, экономические, спортивные и деловые игры;
- имитационные, которые моделируют с той или иной точностью работу объекта в различных условиях и, как правило, с учетом случайных факторов. Алгоритм (компьютерная программа), реализующий имитационную модель, воспроизводит процесс функционирования системы во времени, причем имитируются элементарные события, составляющие процесс, с сохранением их логической структуры и последовательностью протекания во времени. Это позволяет по исходным данным получить сведения о состоянии процесса в определенные моменты времени, дающие возможность оценить характеристики системы. Примером имитационной модели может служить программа расчета аварийного переходного процесса в электроэнергетической системе, когда во время протекания процесса имитируются события срабатывания различной автоматики и коммутации оборудования системы.

Способ представления модели – наиболее важный признак классификации моделей.

Все модели можно разделить на две группы: материальные и идеальные (информационные). В свою очередь физические модели разделяют на физические, аналоговые и геометрически подобные (макеты), рис. 1.3.



Рис. 1.3. Классификация моделей по способу представления

Физические модели имеют ту же природу, что и моделируемые объекты. Это, как правило, уменьшенные копии объектов, сохраняющие его основные физические свойства. Так, например, работу гидравлической турбины можно исследовать на лабораторной установке, воспроизводящей в масштабе настоящую турбину. Исследование работы генератора электростанции также можно выполнить на малой электрической машине переменного тока. Модели автомобилей, судов, самолетов, луноходов и других машин, которые являются физическими моделями, помогают инженерам исследовать механические, тепловые, электрические, магнитные, химические и другие свойства различных машин.

Иногда исследования проводятся на моделях, которые имеют отличную от исходного объекта физическую природу. Так механические свойства движения вращающегося объекта (вала) можно исследовать на электрической модели, и, наоборот, токи и напряжения электрической цепи можно моделировать с помощью сил и скоростей элементов механической системы. Такие модели называют аналоговыми. Получило развитие направление моделирования с помощью специальных аналоговых вычислительных машин (АВМ), в отличие от цифровых вычислительных машин (ЦВМ).

Многие физические и аналоговые модели исследуются в динамике, т.е. изменении их параметров и свойств во времени. Моделирование предусматривает масштабирование не только по переменным модели, но и по времени, таким образом, процессы, протекающие в моделях, воспроизводятся в замедленном или ускоренном движении.

Геометрически подобные модели – это макеты зданий, сооружений и природных объектов. Они изготавливаются для решения учебных, архитектурных, экологических и инженерных задач.

Идеальные модели носят информационный характер. Они возникают и строятся в сознании людей и используются как любая информация. Можно

сказать, что информация – это модель окружающего нас мира. Идеальные модели в зависимости от средств их изображения, передачи, хранения и использования подразделяются на знаковые и вербальные.

Знаковые модели используют какой-либо формализованный язык – литературный, математический, алгоритмический и др. Вербальными можно считать образные модели в сознании людей и передаваемые ими посредством разговорной речи.

Знаковые и вербальные модели взаимосвязаны. Мысленный образ, родившийся в мозгу человека, может быть облечен в знаковую форму, и, наоборот, знаковая модель позволяет сформировать в сознании верный мысленный образ.

Знаковые модели, записанные на каком-либо носителе (бумажном, магнитном, электрическом, оптическом и др.), передаются между людьми, обрабатываются на компьютерах и сохраняются для следующих поколений. В зависимости от этого можно выделить несколько видов знаковых моделей: дескриптивные, имитационные, алгоритмические, математические, базы данных и знаний.

Математическое представление об объекте должно согласовываться с возможностью дальнейшего анализа и исследования объекта по его математической модели. Каждый объект и система могут моделироваться на разных иерархических уровнях восприятия человеком окружающего мира. Принято разделять моделирование технических объектов по трем уровням: микро-, макро- и метауровень. На каждом из этих уровней применимы свои классы моделей, различающиеся, главным образом представлением пространства и времени. Описание моделей разных иерархических уровней дано в разд. 1.6-1.8.

Переменные в математических моделях

Переменные величины, входящие в математическую модель, различают по нескольким признакам.

По роли, которую переменные играют по отношению к объекту моделирования. На рис. 1.4 $\mathbf{X} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ – вектор входных переменных, $\mathbf{Y} = (y_1, y_2, \dots, y_m)$ – вектор выходных переменных. В связи с разделением переменных на входные и выходные рассматриваются прямые и обратные задачи исследования объекта по его математической модели. В прямых задачах по данным о выходах объекта исследуется его поведение в различных условиях (режимах работы), т.е. входные переменные, структура и параметры модели относятся к исходным данным, а выходные переменные представля-

ют результат исследования: $Y = f(X)$ или $F(X, Y) = 0$, где известны характеристики X и f или F .

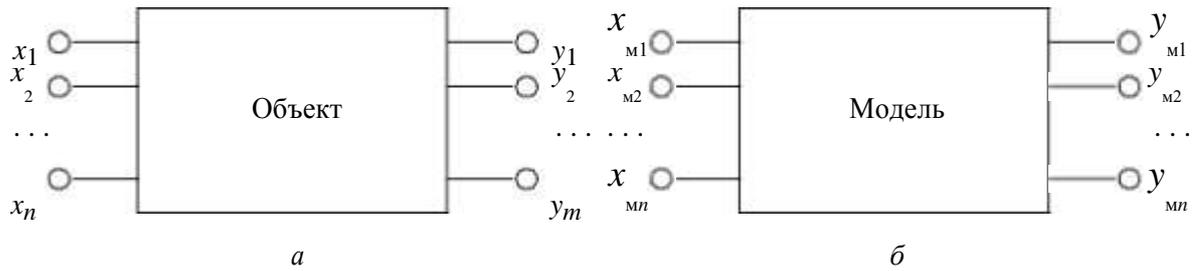


Рис. 1.4. Переменные в объекте и его модели

В обратных задачах считаются известными X и Y (доступны для измерения и исследования), а определению подлежат неизвестные структура и параметры модели (f или F). Такие задачи называют задачами идентификации.

Входные переменные разделяют на управляемые (управляющие воздействия) и неуправляемые (возмущения). Первые позволяют выполнять регулирование режима работы объекта, а вторые меняются самопроизвольно, например погодные условия.

По подверженности воздействию случайным факторам. Детерминированная (определенная) переменная означает, что для нее исключено влияние случайных факторов – она задается вполне определенным значением или меняется во времени по определенному закону. Некоторые переменные по своей природе или по влиянию на них случайных факторов являются случайными величинами. Процесс изменения такой величины во времени называется случайным или стохастическим процессом. К этим переменным можно отнести мощность нагрузки тяговой подстанции, которая зависит от загрузки контактной транспортной сети, или величину активного сопротивления провода ЛЭП, в большой степени подверженного влиянию температуры окружающей среды.

В основе описания случайных переменных лежат методы теории вероятностей, случайных процессов и математической статистики.

По свойствам непрерывности и дискретности. Изменения непрерывных переменных во времени описываются непрерывными функциями, которые могут принимать континуальное множество значений в некоторых практически всегда имеющихся пределах (рис. 1.5, а). Непрерывность, порожденная инерционностью материальных систем, является их неотъемлемым свойством. Однако на практике возможности разрешения близких значений функций и ее аргументов всегда ограничены; для каждого конкретного случая можно указать определенную область, в пределах которой эти значения становятся неразличимыми для наблюдателей или инструментальных

средств. Очевидно, что такую область достаточно характеризовать единственным значением, что приводит к понятию дискретных переменных (рис.1.5, б, в, г).

Дискретные переменные подразделяются на три типа:

- 1) дискретные относительно значений переменной (рис. 1.5, б);
- 2) дискретные относительно времени (рис. 1.5, в);
- 3) дискретные относительно значений переменной и относительно времени (рис. 1.5, г).

Множество дискретных значений, которые принимает переменная, как правило, является конечным: положение выключателя (включено, выключено), количество включенных генераторов на электростанции (0, 1, 2, ...), значения целых чисел, представленных в цифровой вычислительной машине (например, от -32768 до 32767). С помощью дискретных относительно значений переменных удобно представлять некоторые процессы (графики нагрузок или напряжений по часам суток или месяцам года), распределение вероятностей (гистограмма) и т.п.

Дискретность во времени связана с отсчетом или замером или замером переменных в отдельные дискретные моменты времени. Так в автоматизированных системах управления измерения переменных выполняются с заданной периодичностью, например через каждые 5 минут.

Дискретность по времени и по значению дополнительно к измерениям в отдельные моменты времени предполагает использование дискретных значений переменных.

По способу получения переменные делятся на наблюдаемые и ненаблюдаемые.

Главное свойство наблюдаемых переменных – доступность для наблюдения. Однако наблюдаемость сама по себе еще не обеспечивает возможности полного исследования и описания переменной. Необходимо, чтобы последняя обладала еще свойством измеримости, т.е. возможностью построения для исследуемой величины метрики. Этому требованию удовлетворяют непосредственно измеряемые переменные. Они представляют собой количественные характеристики свойств и параметров всевозможных материальных объектов и процессов (напряжение, ток, скорость, линейные размеры и пр.), которые определяются на основе прямого измерения, т.е. сравнения с мерой, обеспечены средствами измерения и охвачены существующей системой метрологического обеспечения.

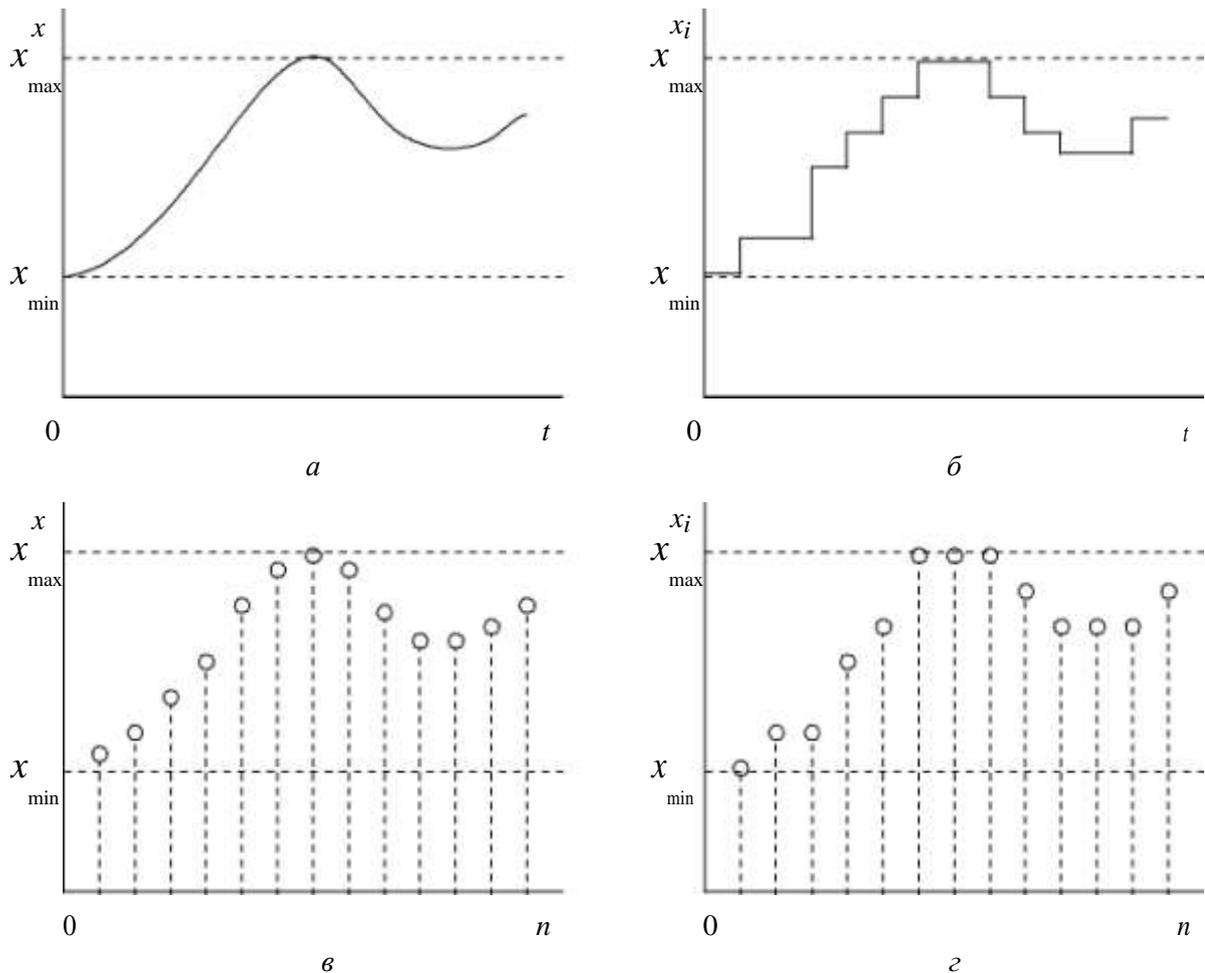


Рис. 1.5. Виды переменных по свойствам непрерывности и дискретности

Тесно связан с непосредственно измеряемыми и следующий класс переменных – косвенно измеряемые.

Косвенно измеряемая переменная x сама по себе не является объектом измерения, а часто и в принципе не может быть непосредственно измерена. Вместо нее непосредственному измерению подвергаются другие, вспомогательные переменные ($\alpha, \beta, \gamma, \dots$), которые связаны с исследуемой переменной функциональной зависимостью $x = f(\alpha, \beta, \gamma, \dots)$. Это позволяет вычислить значение искомой переменной по результатам прямых наблюдений вспомогательных величин, например, вычислить объем тела по результатам измерения его линейных размеров. При испытаниях силовых трансформаторов в электрических сетях температуру его обмоток определяют методом измерения их сопротивлений постоянному току, т.е. температура – косвенно измеряемая переменная.

К косвенно измеряемым переменным относят такие искусственно сконструированные идеальные образования, которые вообще не наблюдаемы: математическое ожидание, дисперсия, энтропия и др.

Существует класс переменных, которые при их количественном оценивании не имеют материальной эталонной базы и находятся вне сферы метрологии. К ним относятся все виды непосредственно или косвенно измеряемых переменных, приведенных к безразмерной форме и выраженных в относительных единицах. Например, некоторые величины материальной природы (интенсивность сейсмических явлений, интенсивность облачности в метеорологии, твердость материалов по Бринеллю и некоторые другие), а также искусственные идеальные конструкции, характеризующие в количественном отношении сложные и массовые объекты и явления (рентабельность, прибыль, эффективность и др.). Такие переменные называют условно измеряемыми, так как меры или единицы измерения, используемые при их количественном оценивании, носят конвенционный характер.

Существует еще один класс наблюдаемых переменных – условно количественно оцениваемые. Они представляют сложные многофакторные явления, интенсивность которой может быть различной, но для количественного оценивания этой интенсивности не удастся ввести ни объективной единицы измерения, ни способа измерения. Однако в целом ряде случаев между интенсивностями рассматриваемого явления удастся установить отношение порядка (равны – не равны, больше – меньше и т.д.), а затем отобразить эти отношения, вообще говоря, произвольным образом на некоторое множество (систему) чисел. Результатом такой процедуры являются, например, численные оценки качества усвоения учащимися и студентами учебного материала, степень удовлетворения работой членов некоторого производственного коллектива, степень качества исполнения музыкального произведения или выполнения спортивного упражнения. Условное количественное оценивание основано на опыте и интуиции и по сути своей субъективно.

Ненаблюдаемые переменные подразделяют на принципиально ненаблюдаемые и технически ненаблюдаемые.

Принципиально ненаблюдаемые переменные не существуют как компоненты реального мира и поэтому поддаются определению только косвенными методами, в частности на основе косвенных измерений (статистические характеристики).

Технически ненаблюдаемые переменные характеризуют такие материальные явления, которые либо не обеспечены техническими средствами, необходимыми для измерения и оценивания, либо протекают в условиях, когда инструментальный доступ к ним невозможен. Характерным примером переменной, не наблюдаемой из-за практической недоступности, является количество угля для помола в шаровой мельнице на электростанции.

Каждая переменная, связанная с материальным объектом, может изменять свои значения лишь в некоторых конечных пределах, которые обусловлены физическими свойствами объекта и характером решаемой задачи. Данные об этих пределах – ограничения на переменные – существенны при построении и использовании всех видов моделей, а в оптимизационных задачах, где необходимо найти оптимальное значение так называемой целевой функции, ограничения являются главной частью самой модели.

С математической точки зрения различают ограничения типа простых неравенств: $X_{\min} \leq X \leq X_{\max}$, $Y_{\min} \leq Y \leq Y_{\max}$ – параллелепипедные ограничения и функциональные ограничения, фиксирующие предельные значения некоторой величины в функции от других переменных: $f_{\min}(X) \leq Z \leq f_{\max}(X)$ и т.п.

В практике моделирования выделяют так называемые жесткие ограничения, которые являются абсолютными (например, угол поворота лопатки турбины – «до упора»), и ограничения мягкие, допускающие кратковременные нарушения установленной границы значений переменной (например, верхнего предела рабочего напряжения на электродвигателе).

В общем случае данные об ограничениях на переменные входят в состав модели как обязательная составная часть.

Адекватность и эффективность математических моделей

Математическое описание объекта может иметь различную степень соответствия (адекватность) объекту-оригиналу. Как правило, исследователь стремится к более полному и точному отражению в модели свойств объекта. Это естественное стремление объясняется неопределенностью, которая неизбежно присутствует при построении моделей. Нельзя заранее точно знать, какие свойства объекта важны для решаемой задачи, а какие – несущественны. Такая неопределенность тем больше, чем меньше исследователь знает исследуемый объект и меньше его опыт в решении подобных задач.

Таким образом, требование полноты соответствия модели объекту-оригиналу является мерой совершенства модели и одним из ее качеств. Мало того, излишняя полнота модели в большинстве случаев даже вредна, так как приводит к такому усложнению модели, что ее использование становится невозможным. Поэтому другое качество модели – это ее простота.

Нетрудно понять, что качества адекватности и простоты противоречат друг другу, т.е. с улучшением одного из них происходит ухудшение другого. Отыскание оптимального сочетания (как говорят, «золотой середины») этих двух качеств при построении модели есть отдельная задача, решение которой лежит на исследователе. Здесь необходим опыт, интуиция и соответствующая

щий уровень подготовки исследователя. Идеальная квалификационная подготовка последнего не только весьма обширна, но и в значительной мере противоречива.

С одной стороны, исследователь должен досконально представлять себе задачу и глубоко изучить объект моделирования. Но, с другой стороны, исследователю, строящему модель, необходимо хорошо владеть аппаратом современной математики, представлять себе весь арсенал модельных конструкций, иметь опыт формализации знаний и использования современных вычислительных средств. Кроме того, во многих случаях от исследователя требуются знания в области планирования и проведения эксперимента на объекте-оригинале или на более сложной модели (вычислительный эксперимент).

Модель с оптимальным сочетанием качеств адекватности и простоты можно назвать эффективной (практически полезной) моделью. Математически такое сочетание соответствует максимуму так называемой «функции полезности», и, если такая функция может быть записана, отыскание ее максимума возможно известными оптимизационными методами.

Употребляя термин «точность математического моделирования», можно иметь в виду адекватность модели, например, говорят: точная или приближенная формула, линеаризованная (т.е. приближенно замененная линейной) зависимость и т.д. Но реализация математической модели, т.е. проведение «вычислителем» одного или нескольких расчетов, результатом которых будут численные значения переменной, вектора, таблицы содержит погрешности вычислений вследствие ошибок округления, прерывания итерационного процесса вычислений и ошибок в данных, которые переходят (распространяются) на результаты. Последующая обработка реализаций математической модели предполагает и подсчет погрешности исследований. В связи с этим, рассматривая вопрос об эффективности математических моделей, следует иметь в виду погрешности реализаций, которые иногда являются причиной дополнительных упрощений модели, так как учет некоторых факторов может, например, сказаться на результатах в меньшей степени, чем погрешности в исходных данных.

Рассмотрим математическую модель линии электропередачи (ЛЭП) высокого напряжения. В нее входят такие параметры, как активное сопротивление, индуктивность самоиндукции и взаимной индукции проводов, а также емкости между проводами и проводами и землей. Высота подвеса проводов и заземленных грозозащитных тросов на линии влияет на величину емкостей между проводами и землей. Следует ли в расчетах режимов ЛЭП учитывать

близость земли? В некоторых случаях при достаточно длинных ЛЭП определение емкостных параметров требует уточнения в части влияния земли, а при небольших длинах линий это необязательно.

При анализе адекватности, эффективности и точности отдельных математических моделей используются некоторые численные оценки. Получение этих оценок почти всегда связано с большими трудностями, так как требует проведения натурных (на объекте-оригинале) или вычислительных (по реализациям по более точной модели) экспериментов. Иногда такие эксперименты требуют больших материальных и временных затрат, но проводить их необходимо, так как это единственный способ оценить качество математических моделей.

Истинные значения параметров обычно отождествляются с экспериментально полученными. Однако погрешности натурального эксперимента во многих случаях оказываются соизмеримыми с погрешностями математических моделей, а иногда заметно их превышают.

Пусть на выходе объекта измеряются m переменных Y (рис. 1.4, *a*). При исследовании на математической модели получились m модельных переменных Y_M . Вектор погрешностей есть разница полученных векторов $= Y - Y_M$. В целом погрешность математической модели можно оценить по норме вектора погрешностей :

$$\| \|_1 = \max_{i \in [1..m]} | \epsilon_i | . \quad (1.2)$$

Часто используют евклидову норму и среднеквадратическую погрешность:

$$\| \|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^m \epsilon_i^2} \text{ и } \epsilon = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^m \epsilon_i^2}{m}} . \quad (1.3)$$

В качестве других характеристик математических моделей иногда называют экономичность (по затратам) и универсальность (применимость к группе объектов).

1.5. Свойства объектов моделирования

Технические объекты имеют самые разнообразные внутренние свойства и взаимодействия с окружающим миром. Рассмотрим внутренние свойства объектов моделирования, которые необходимо учитывать при построении моделей.

Под структурой объекта обычно понимают совокупность элементов, входящих в состав объекта, и связей между ними. Структура математической

модели – это совокупность переменных и параметров, записанных в математическом выражении, например

$$z = ax^2 + bx + cy^2 + dy + exy \quad (1.4)$$

Здесь переменными являются величины x , y и z , а параметрами коэффициенты a , b , c , d , e .

Параметры – это количественные характеристики внутренних свойств объекта, которые отражаются его структурой, а в математической модели они являются коэффициентами, входящими в математическое выражение.

Рассмотрим свойства объектов с точки зрения моделирования.

1) Непрерывность и дискретность

Подавляющее большинство различных технических объектов имеют свойство непрерывности переменных, т.е. свойство принимать несчетное множество сколь угодно близких значений. Состояния этих объектов описываются макроскопическими физическими величинами: температурой, скоростью, давлением, пространственными координатами, электрическим током и т.п. Математические структуры, адекватно описывающие такие объекты, очевидно, тоже должны быть непрерывными. Поэтому при модельном описании объектов с непрерывными переменными используют главным образом аппараты дифференциальных и интегральных уравнений, передаточные функции, частотные характеристики и др.

Дискретные переменные могут принимать некоторое, практически всегда конечное, число наперед заданных значений. Характерными примерами объектов с дискретными переменными являются релейные переключательные схемы, коммутационные системы АТС, цифровые вычислительные машины. Основой формализованного описания объектов с дискретными переменными является аппарат математической логики. Дискретные методы анализа в настоящее время получили широкое распространение для описания и исследования объектов с непрерывными переменными. При этом вследствие конечности разрядной сетки ЦВМ значения непрерывных величин округляются до дискретных значений, а исходные дифференциальные уравнения в частных производных заменяются эквивалентными конечно-разностными. В отличие от моделей с дискретными переменными по своей сути модели с непрерывными переменными, представленные дискретно, называют дискретизированными.

2) Стационарность и нестационарность

Строго говоря, какие-то изменения имеют место в любом реальном объекте, однако в тех случаях, когда они настолько малы, что могут не учитываться при моделировании, объект рассматривается как стационарный.

Стационарность предполагает неизменность и структуры и параметров объекта. Поэтому стационарный объект описывается математическим выражением, которое включает в себя только постоянные коэффициенты.

Нестационарные объекты имеют в общем случае изменяющиеся во времени структуру и параметры.

В технических объектах приходится сталкиваться с нестационарностью как структуры, так и параметров объекта. Так, например, в электроэнергетической системе в течение времени отключаются и включаются отдельные элементы (линии, трансформаторы, генераторы) и изменяются их параметры в зависимости от различных внешних факторов (температура, влажность, старение изоляции и др.).

Принципиальных затруднений учет нестационарности относительно параметров в математическом описании объекта не вызывает, хотя усложняет модель и ее исследование. В тех случаях, когда появляется необходимость исследовать объекты переменной структуры, общую нестационарную задачу, как правило, расчленяют на ряд стационарных относительно структуры подзадач, решения которых отыскивают отдельно, а затем объединяют в одно.

3) Распределенность и сосредоточенность параметров

В пространственно протяженных объектах, в частности включающих в себя непрерывные среды (газы, жидкости, твердые среды), когда время распространения физических, например колебательных явлений, оказывается соизмеримым с инерционными эффектами, адекватное описание процессов требует учета как временных, так и пространственных координат. Объекты такого рода, средством описания которых служат дифференциальные уравнения в частных производных, относятся к классу объектов с распределенными параметрами. С математической точки зрения объекты с распределенными параметрами представляют собой поле, существующее в пространственно-временном континууме, а переменные соответствующих моделей в общем случае суть функции времени и пространственных координат. Типичными примерами одномерных объектов с распределенными параметрами служат всевозможные «длинные линии»: проводные линии связи, длинные трубопроводы, линии электропередачи на большие расстояния. Примерами моделей двумерного объекта с распределенными параметрами являются сечения различных трубопроводов, кабелей, проводов, где рассматриваются в плоскостях поля температур, плотностей и напряженностей. И, наконец, пространственное электромагнитное поле с его математической моделью – уравнениями Максвелла – представляет собой классический пример трехмерного объекта с распределенными параметрами.

Если пространственной протяженностью можно пренебречь и считать, что независимой переменной протекающих в нем процессов является только время, принято говорить об объекте с сосредоточенными параметрами. К числу таких объектов, которые описываются обыкновенными дифференциальными уравнениями, относится подавляющее большинство механизмов, машин, устройств, а также все системы, у которых расстояния между отдельными элементами практически не влияют на исследуемые свойства.

Математический аппарат строго описывающий объекты с распределенными параметрами, существенно сложнее, чем объекта с сосредоточенными параметрами. Поэтому на практике всегда, где это возможно прибегают к аппроксимации, т.е. заменяют распределенные параметры на сосредоточенные, например разбивая пространство на небольшие элементы (подпространства) или делая корректировку сосредоточенных параметров.

4) Одномерные и многомерные объекты

Обычно под количеством измерений понимают число выходов (выходных переменных). Для моделирования многомерных объектов используют векторно-матричное представление.

5) Статические и динамические объекты

Статические объекты находятся как бы в «застывшем» состоянии или рассматриваются в какой-либо момент времени безотносительно того, каким было его состояние в прошлом или будет в будущем. Динамика рассматривает причинно-следственные цепочки и возможность прогнозирования будущих состояний объектов. Каждый динамический объект имеет свойство последствия (инерции) – состояние движущегося тела в некоторый момент времени определяется не только силами, действующими в тот момент, но и предшествующими воздействиями: состояние объекта имеет предысторию его движения. В дифференциальных уравнениях предыстория объекта задается начальными условиями.

Развитие механики пространственных протяженных сред, а также теории колебаний и волн выявило еще один источник последствия, не связанный непосредственно с инерционными эффектами. Речь идет о конечной скорости распространения механических возмущений, например колебательных в сплошной среде, результатом чего является зависимость текущего состояния некоторой точки от прошлых состояний других точек и, следовательно, объекта в целом.

Нельзя связывать последствия только с традиционными представлениями об инерционных эффектах. Явление последствия имеет более общий характер. Существуют и другие физические явления, например резонанс и

запаздывание в каналах связи, которые дают последствия в материальных объектах. Существуют также информационные запаздывания в управляемых системах.

Н. Винер ввел обобщенное представление о зависимости между входной и выходной переменной произвольного объекта в форме

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{A} \mathbf{u}(t_i | t), \quad t_0 \leq t \leq t_i \quad (1.5)$$

где $\mathbf{u}(t)$, $\mathbf{x}(t)$ – вектор-функции входов и соответственно

выходов; \mathbf{A} – обобщенный оператор объекта;

$t_i - t_0 = \theta$ – интерпретируемый как внутренняя память объекта интервал времени, в пределах которого прошлые состояния объекта оказывают влияние на текущее значение $\mathbf{x}(t_i)$. При этом очевидно, что условием физической реализуемости объекта является неравенство $t \leq t_i$, ибо следствие (выход) в реальной системе не может предшествовать причине (входу). θ варьируется в пределах от 10^{-9} до десятков и сотен лет – табл. 1.1.

Таблица 1.1

Время внутренней памяти объекта

Тип системы (объекта)	Память	
	Единица измерения	Порядок
Радиоэлектронные системы	с	$10^{-5} \dots 10^{-9}$
Механические и электромеханические системы (машины, агрегаты, генераторы и др.)	с	$10^{-2} \dots 10$
Крупные транспортные системы (суда, ж/д транспорт, нефте- и газопроводы)	мин	1 ... 10
Крупные термические агрегаты (металлургические печи, котлы)	ч	1 ... 10^2
Производственно-экономические системы	месяцы	$10^{-1} \dots 10$
Крупные производственно-экономические системы	месяцы, год	-
Крупные экосистемы, биосферные процессы	годы, десятилетия	-
Массовые социально-психологические явления (ценностные установки, убеждения, мировоззрения)	столетия	-

б) Виды физических объектов

Рассматривая объекты моделирования, часто ограничиваются исследованием физических свойств одного рода: тепловых, электрических, магнитных, механических и т.д. Но в тех случаях, когда в объекте происходит передача или преобразование энергии, требуется учет свойств различного рода, например электромагнитных, теплоэлектрических, тепломеханических, электромеханических и др. Математический аппарат, используемый для модели-

рования различных физических систем, может оказаться одинаковым. Так, например, вращательная механическая система и электрическая цепь с источником ЭДС и конденсатором описываются одинаковыми с точки зрения математики уравнениями.

Математические модели на микроуровне

Рассмотрим модели технических систем на микроуровне. В большинстве случаев это распределенные модели (с распределенными моделями) и они представляют собой системы дифференциальных уравнений в частных производных. При создании математических моделей целесообразно исходить из основных физических законов в их наиболее «чистом», фундаментальном виде. Такой подход обеспечивает наиболее адекватное описание объектов, протекания процессов и явлений окружающего нас мира.

Фундаментальными физическими законами в первую очередь являются законы сохранения массы, количества движения, энергии. Эти законы можно сформулировать в одном общем виде: изменение во времени некоторой субстанции в элементарном объеме равно сумме притока-стока этой субстанции через поверхность элементарного объема. Субстанцией служат масса, количество движения, энергия. Эта формулировка остается справедливой и для некоторых других субстанций, например количества теплоты, количества зарядов, количества элементарных частиц и др. Если внутри элементарного объема происходит генерация или уничтожение рассматриваемой субстанции, то к сумме притока-стока нужно добавить соответствующий член, отражающий данное явление. В этом случае общий вид уравнений, составляющих основу большинства распределенных моделей, будет следующим:

$$\frac{d\phi}{dt} = \text{div}J + G, \quad (1.6)$$

где ϕ – некоторая фазовая переменная, выражающая субстанцию (плотность, энергию и т.п.);

J – поток фазовой переменной;

G – скорость генерации субстанции;

t – время.

Поток фазовой переменной ϕ есть вектор $J = (J_x, J_y, J_z)$. Дивергенция (расходимость) этого вектора определяется общим соотношением

$$\text{div}J = \frac{\partial J_x}{\partial x} + \frac{\partial J_y}{\partial y} + \frac{\partial J_z}{\partial z} \quad (1.7)$$

является скалярной величиной и характеризует сумму притока-стока через поверхность элементарного объема.

Рассмотрим основные уравнения некоторых физических процессов.

1) Уравнение непрерывности гидродинамики

В течении жидкости или газа имеем в любой точке M определенное значение скорости движущейся частицы, т.е. векторное поле скорости. Обозначим через ρ плотность жидкости в данной точке. Понятие дивергенции позволяет описать поведение этой плотности в отдельной точке:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = -\rho \operatorname{div} v. \quad (1.8)$$

Это уравнение описывает закон сохранения массы и называется уравнением непрерывности.

При одномерном исполнении

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = -\rho \frac{\partial v}{\partial x}. \quad (1.9)$$

2) Уравнение теплопроводности

Связь изменения температуры во времени и пространстве со свойствами среды описывается с помощью уравнения теплопроводности. Это уравнение вытекает из закона сохранения энергии: изменение во времени количества теплоты в элементарном объеме равно сумме притока-стока теплоты и изменения теплоты за счет ее превращения в другие виды энергии в том же объеме:

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = -\operatorname{div} J_Q + G_Q, \quad (1.10)$$

где Q – количество теплоты;

J_Q – вектор плотности теплового потока;

G_Q – количество теплоты, выделяемой в единицу времени в рассматриваемом элементарном объеме.

2) Уравнение непрерывности электрического тока

Движение электрических зарядов через поверхность элементарного объема записывается в виде

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\operatorname{div} \delta \quad (1.11)$$

где ρ – объемная плотность электрических зарядов; δ –

вектор плотности тока проводимости и смещения.

Приведенные примеры показывают однотипность математических моделей на микроуровне, но в то же время использование математических моделей объектов в виде системы дифференциальных уравнений в частных

производных возможно для простых технических систем, так как решение их наталкивается на значительные трудности. Методы дискретизации пространства (конечных разностей и конечных элементов), которые используются для приближенного решения этих уравнений, приводят к решению систем с числом уравнений 10^6 и более.

Моделирование на макроуровне

Модели макроуровня получаются, когда происходит переход от распределенных параметров к сосредоточенным – выделяются крупные элементы объектов и их параметры сосредоточиваются в одной точке: масса балки оказывается сосредоточенной в центре тяжести, поле потенциалов характеризуется величиной одного напряжения, поток электронов моделируется электрическим током и т.п. Происходит дискретизация пространства, однако время – по-прежнему непрерывная величина. Математическими моделями на макроуровне являются обыкновенные дифференциальные или интегродифференциальные уравнения.

Поведение (состояние) моделируемых объектов, состоящих из физически однородных элементов, в которых описываются процессы определенной физической природы (механические, электрические, гидравлические, тепловые), можно характеризовать с помощью фазовых переменных двух типов – типа потенциала и типа потока.

В табл. 1.2 приведены типы фазовых переменных для объектов разной физической природы

Таблица 1.2

Фазовые переменные для различных физических систем

Система	Фазовые переменные	
	типа потенциала	типа потока
Электрическая	Электрическое напряжение	Электрический ток
Механическая	Скорость	Сила
Механическая вращательная	Угловая скорость	Вращательный момент
Тепловая	Температура	Тепловой поток
Гидравлическая и пневматическая	Давление	Расход

В большинстве технических объектов можно выделить три типа пассивных простейших элементов:

- типа R – элемент рассеивания (диссипации) энергии (как правило, преобразования энергии в тепловую и ее рассеивания);

- типа C и типа L – элементы накопления потенциальной и кинетической энергии.

Кроме пассивных элементов существуют два активных элемента – источник напряжения и источник тока.

Уравнения, описывающие свойства элементов объекта, называют *компонентными*. В них входят переменные типа потенциала и типа потока. Способ связи элементов отражается с помощью других уравнений, которые называют *топологическими*. В них входят переменные одного типа: либо потенциала, либо потока. Топологические уравнения могут выражать законы сохранения, условия непрерывности, равновесия, баланса и т.п.

Математические модели объектов есть совокупность компонентных и топологических уравнений.

Рассмотрим примеры компонентных и топологических уравнений для некоторых разных по своей физической природе объектов.

1) Электрические системы. Основными фазовыми переменными электрических систем являются напряжения и токи в различных элементах систем. Компонентные уравнения элементов имеют вид

$$U = RI, \quad I = C \frac{dI}{dt}, \quad U = L \frac{dI}{dt}, \quad (1.12)$$

где U – напряжение; I – ток; R – сопротивление; C – емкость; L – индуктивность.

При соединении элементов (резисторов, емкостей, индуктивностей) между собой образуется схема, соединение элементов в которой отражается топологическими уравнениями: ими являются законы Кирхгофа:

$$\sum_j I_j = 0, \quad \sum_i U_i = 0, \quad (1.13)$$

где уравнения токов записываются для узлов, а уравнения напряжений для контуров. В ЭЭС имеются достаточно сложные элементы, и при их моделировании применяют схемы замещения, состоящие из сопротивлений, емкостей и индуктивностей.

2) Механическая система. Элементами механических поступательных систем являются:

- элементы механического сопротивления, отражающие потери механической энергии на разные виды трения;
- элементы масс, отражающие свойства инерционности
- элементы гибкости, отражающие свойства упругости.

Роль фазовых переменных в механических системах выполняют либо силы и скорости, либо силы и перемещения.

Компонентные уравнения имеют вид:

$$V = R F, \quad F = m \frac{dV}{dt}, \quad V = L \frac{dF}{dt} \quad (1.14)$$

где V – скорость; F – сила; R – коэффициент, учитывающий зависимость силы трения от скорости; m – масса – аналог электрической емкости; L_m – гибкость – параметр, являющийся аналогом электрической индуктивности.

Первое выражение в (1.14) указывает на связь скорости и силы через коэффициент вязкого трения $k_{\tau} = \frac{1}{R}$. Второе выражение является вторым законом Ньютона. Третье выражение в (1.14) получено из уравнения перемещения пружины x под действием силы $F = kx$, где k – коэффициент жесткости пружины. После дифференцирования последнего выражения получаем

$$\frac{dF}{dt} = k \frac{dx}{dt} = kV. \quad (1.15)$$

Если обозначить $L_m = \frac{1}{k}$ (механическая гибкость), то получим третье выражение в (1.14).

Топологические уравнения механической системы выражают уравнение равновесия сил, являющееся аналогом первого закона Кирхгофа, и уравнение сложения скоростей, в соответствии с которым сумма абсолютной, относительной и переносной скоростей равна нулю (аналог второго закона Кирхгофа).

$$\sum_j F_j = 0, \quad \sum_i V_i = 0. \quad (1.16)$$

3) Механические вращательные системы. Для механических вращательных систем наиболее просто выглядит аналогия с механическими поступательными системами. Поступательной скорости V соответствует угловая скорость ω , силе F – вращательный момент M . Аналогиями параметрами m , L_m и R будут соответственно: J – момент инерции относительно оси вращения со скоростью ω ; $L_{вр}$ – вращательная гибкость; $R_{вр}$ – сопротивление вращению.

Компонентные уравнения механической вращательной системы имеют вид:

$$\Omega = R M, \quad M = J \frac{d\Omega}{dt}, \quad \Omega = L \frac{dM}{dt}. \quad (1.17)$$

Топологические уравнения механической вращательной системы выражают закон равенства суммы моментов сил и закон сложения скоростей вокруг оси вращения:

$$\sum_j M_j = 0, \sum_i \Omega_i = 0 \quad (1.18)$$

4) Гидравлические и пневматические системы. Фазовыми переменными гидравлических систем являются поток жидкости (расход) q и давление p – аналоги электрического тока и напряжения соответственно. Компонентные уравнения участков трубопровода и резервуаров гидросистемы связывают фазовые переменные посредством ее параметров при ламинарном и турбулентном движении жидкости.

Топологические уравнения гидравлической системы близки по своему смыслу и идентичны по форме топологическим уравнениям электрических систем, а именно сумма потоков в любом узле системы и сумма давлений вдоль любого контура системы равна нулю.

Фазовые переменные пневматических систем – потоки газа и давления аналогичны по смыслу фазовым переменным гидравлических систем. Также одинаковы в гидравлических и пневматических системах компонентные и топологические уравнения.

5) Тепловые системы. Для этих систем основные фазовые переменные – температура T и тепловой поток g_T .

Одно компонентное уравнение тепловой системы связывает разность температур на участке элемента и тепловой поток через тепловое сопротивление R_T , которое определяется теплоотдачей посредством теплопроводности, конвекции и лучеиспускания, другое уравнение через теплоемкость C_T связывает тепловой поток и температуру элемента системы. Уравнения с понятием «тепловой гибкости» в тепловых системах нет.

Топологические уравнения для сумм тепловых потоков и разностей температур тепловых систем также аналогичны законам Кирхгофа в электрических системах.

Топологические уравнения для любых из рассмотренных выше систем строго определены только для установившихся режимов. В тех случаях, когда время распределения возбуждений (изменений фазовых переменных) по ветвям системы соизмеримо с длительностью интервалов времени, на которых ведется исследование, или превышает их, применять такие уравнения в приведенной выше форме нельзя.

Границы применимости топологических уравнений определяются скоростями распространения возбуждений, размерами компонентов системы и частотами изменения фазовых переменных. Например, для электрических систем скорость распространения возбуждений есть скорость света или электромагнитных волн в соответствующей среде, а для механических, гидравли-

ческих и пневматических – это скорость распространения звука в соответствующей среде.

Моделирование на метауровне

Математические модели на микроуровне учитывали распределенностью параметров объекта в пространстве. Переход на макроуровень характеризуется дискретизацией пространства – параметры объекта считаются сосредоточенными в отдельных точках пространства. Метауровень имеет математические модели, где вводятся еще большие допущения и упрощения, что позволяет получать доступные для исследования математические модели больших объектов и систем.

Существует несколько способов построения математических моделей на метауровне, к ним относятся:

- 1) дискретизация времени, т.е. наряду с введением сосредоточенных параметров переменные и параметры модели считаются независимыми не-прерывно от времени;
- 2) потери энергии в объекте не учитываются;
- 3) переход к факторным моделям;
- 4) переход к функциональным моделям, в которых используется только один вид фазовой переменной – сигнал;
- 5) эквивалентирование – замена больших систем их упрощенными моделями – эквивалентами, созданными на основе специальных критериев и др.

Так, например, решать задачи регулирования частоты и обменной мощности в Единой энергосистеме (ЕЭС) России можно с помощью модели, которая может обозримо представить все составные части этого большого и сложного объекта с учетом пропускной способности между объединениями энергосистем (ОЭС). На рис. 1.6 показаны связи между отдельными ОЭС, входящими в ЕЭС России. Параметрами такой модели могут служить значения пропускной способности связей, мощности отдельных ОЭС и «коэффициенты жесткости» (отношения предела статической устойчивости связи к меньшей мощности из соединяемых частей ОЭС). В такой модели параметры и переменные могут считаться неизменными на длительных интервалах времени и потери электрической энергии не учитываются.

Переход к факторным моделям может быть выполнен методами идентификации объектов или с использованием методов планирования эксперимента. Идентификация технических объектов рассматривается в разделе 4.

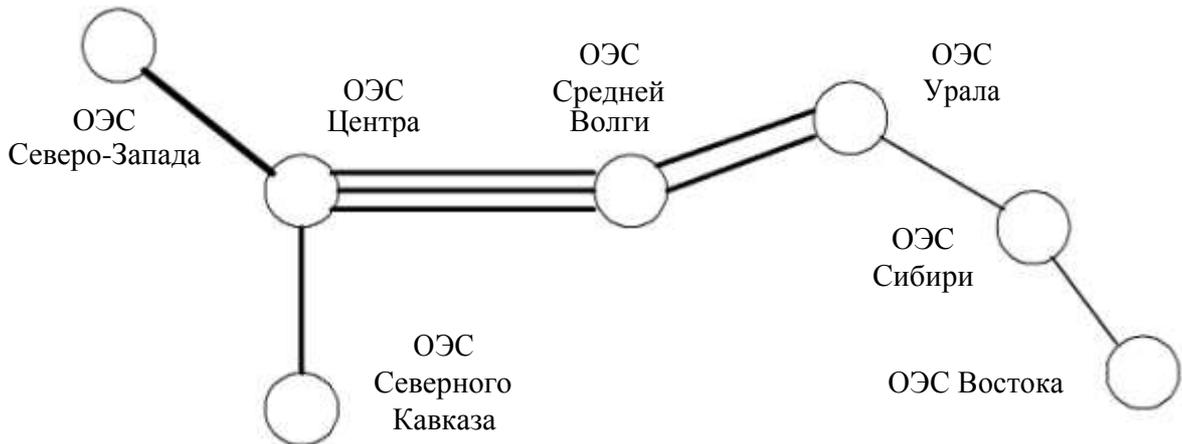


Рис 1.6. Схема связей между ОЭС ЕЭС России

Функциональное моделирование является предметом изучения отдельной дисциплины – теории автоматического регулирования.

Эквивалентирование – это преобразование электрической схемы на основе специальных критериев с целью ее упрощения. Обычно в сложной ЭЭС выделяется часть схемы сети, для которой выполняется анализ режимов работы, все остальные преобразуются в эквивалентные схемы. Так, рассматривая режимы работы отдельной ЭЭС, все соседние энергосистемы представляются их эквивалентами или в большом энергообъединении сохраняются только мощные высоковольтные линии и подстанции, а сети более низкого напряжения представляются эквивалентами.

Вопросы для самопроверки

1. Какое свойство модели является фундаментальным?
2. Как классифицируются модели?
3. По каким признакам различают переменные в математических моделях?
4. Чем различаются прямые и обратные задачи исследования объекта при его моделировании?
5. Как подразделяются дискретные переменные в математических моделях?
6. Поясните свойство адекватности математической модели.
7. Назовите попарно противоположные свойства объектов с точки зрения моделирования.
8. Что представляют собой математические модели на микроуровне?
9. Что представляют собой математические модели на макроуровне?
10. Что представляют собой математические модели на метауровне?

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ЭЛЕМЕНТОВ ЭЭС

2.1. Линия электропередачи

2.1.1. Конструктивное выполнение и свойства линии электропередачи

В простейшем представлении линия электропередачи – это проводники, протянутые на большое расстояние, по которым передается электрическая энергия. Возможность передачи электроэнергии обусловлена, главным образом, большим напряжением, при котором потери при передаче снижаются до приемлемого уровня.

Конструктивно воздушные ЛЭП представляет собой провода, подвешенные на безопасном расстоянии от земли, или кабели, в которых проводящие жилы изолированы друг от друга и от внешней среды и защищены различными покровами и броней. В зависимости от конструкции ЛЭП называют воздушными (ВЛ) или кабельными линиями (КЛ).

Практически во всем мире для передачи электрической энергии принята система трехфазного переменного тока 50 или 60 Гц. Однако в некоторых случаях применяются другие системы переменного тока и передачи постоянного тока. Будем рассматривать только трехфазные воздушные линии переменного тока высокого напряжения (до 1150 кВ), передающие электроэнергию на большие расстояния (до нескольких тысяч километров).

Передача электроэнергии по ЛЭП переменного тока обусловлена распространением электромагнитного поля в проводах и окружающем пространстве. Возникновение переменного электростатического поля приводит к появлению токов смещения (зарядных токов), рис. 2.1. Зарядные токи, накладываясь на нагрузочный ток, определяют постепенное изменение тока вдоль линии. Магнитное поле, обусловленное током линии, характеризуется напряженностью, также изменяющейся вдоль линии. Это приводит к наведению ЭДС самоиндукции и взаимной индукции, неравных для различных участков линии. Неравенство этих ЭДС определяет сложный закон изменения напряжения вдоль линии, в свою очередь, определяющий изменение токов смещения вдоль линии.

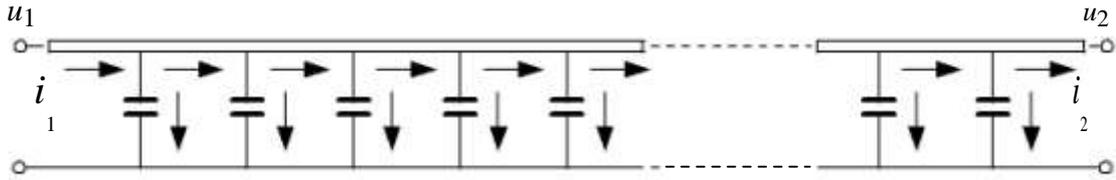


Рис. 2.1. Условное изображение распределения токов вдоль провода ЛЭП

В общем случае ЛЭП следует рассматривать как объект с распределенными вдоль одной пространственной координаты параметрами (вдоль линии). Параметры линии электропередачи, к которым относятся активное сопротивление, индуктивность, активная проводимость и емкость на единицу длины, считают равномерно распределенными вдоль ее длины. Такое свойство линий называют однородностью.

Провода ВЛ имеют в качестве проводящего материала алюминий или его сплав. Практически всегда используются сталеалюминиевые провода марки АС. Их удельное сопротивление постоянному току в среднем равно $\rho = 29,1 \text{ Ом мм}^2 / \text{км}$. Активное сопротивление переменному току больше сопротивления постоянному току вследствие поверхностного эффекта, однако, для частоты 50 Гц это различие несущественно. Активное сопротивление в электрических схемах ЛЭП является параметром, определяющим процесс диссипации (рассеивания) энергии в виде отдачи тепла в окружающее пространство.

Индуктивность ЛЭП вызвана явлениями самоиндукции и взаимной индукции фаз линии и определяется в зависимости от диаметра проводов фазы и расстояния между фазами. В практике расчетов электрических сетей используют индуктивное сопротивление фаз ЛЭП. Погонное индуктивное сопротивление ВЛ 330-1150 кВ x_0 в среднем равно 0,31 Ом / км.

Вследствие несовершенства изоляции ВЛ и явления короны в местах присоединения проводов к гирляндам изоляторов ВЛ имеют место потери электроэнергии от токов утечки по изоляторам ВЛ и короны. Большое влияние на эти потери оказывает влажность и загрязнение окружающего воздуха. В зависимости от погоды потери от токов утечки и на корону могут изменяться в десятки раз.

Моделирование потерь в изоляции ВЛ можно выполнить с помощью введения активной проводимости g_0 , величина которой определяется по экспериментальным данным, полученных в результате наблюдений и расчетов существующих ВЛ. Для большинства ВЛ 330-1150 кВ погонная активная проводимость задается в пределах 0,01...0,1 мкСм / км.

Емкостные проводимости между фазами и между проводами и землей, грозозащитными тросами и заземленными частями опоры моделируются од-

ним параметром – емкостной проводимостью фазы b_0 . Величина погонной емкостной проводимости ВЛ 330-1150 кВ в среднем составляет 3,5 мкСм / км.

В цепи с распределенными параметрами интервал времени распространения электромагнитных волн вдоль линии сопоставим с интервалом времени, в течение которого токи и напряжения изменяются на заметную величину от полного их изменения.

Другими свойствами линии электропередачи можно считать:

- непрерывность переменных,
- стационарность,
- одномерность в отношении пространства и многомерность в отношении переменных, характеризующих работы линии в разных точках линии,
- статизм или динамичность (в зависимости от исследуемых процессов),
- линейность или нелинейность (в зависимости от уравнений, описывающих режим работы линии) – при этом параметры линии считаются постоянными величинами.

В отношении свойств детерминированности и стохастичности рассматриваются разные подходы к моделированию линии – параметры и переменные могут быть представлены также и случайными величинами.

2.1.2. Математическая модель линии с распределенными параметрами

Элементы ЭЭС являются, как правило, трехфазными устройствами переменного тока, и ЛЭП имеет три фазы, которые присоединяются к другим трехфазным элементам сети, например повышающим и понижающим трансформаторам (рис. 2.2, *а*).

Здесь и далее будем рассматривать только симметричные трехфазные системы, которые вследствие симметрии можно графически изображать в однолинейном виде (рис. 2.2, *б*), имея в виду, что протекающий по фазе переменный ток замыкается через две другие фазы. Кроме того, трехфазная система имеет нейтраль N , которая технически может отсутствовать, но токи утечки и емкостные токи в линии могут моделироваться посредством введения нейтральной точки (линии, плоскости). На рис. 2.2 соединение обмоток трансформаторов в звезду дает нейтральные точки трехфазной системы, которые могут иметь соединение с землей (заземление).

Выделим в линии на расстоянии x от начала линии (рис.2.2, *a*, точка 1) участок бесконечно малой длины dx . На этом участке линии электрические параметры можно считать сосредоточенными (рис. 2.3).

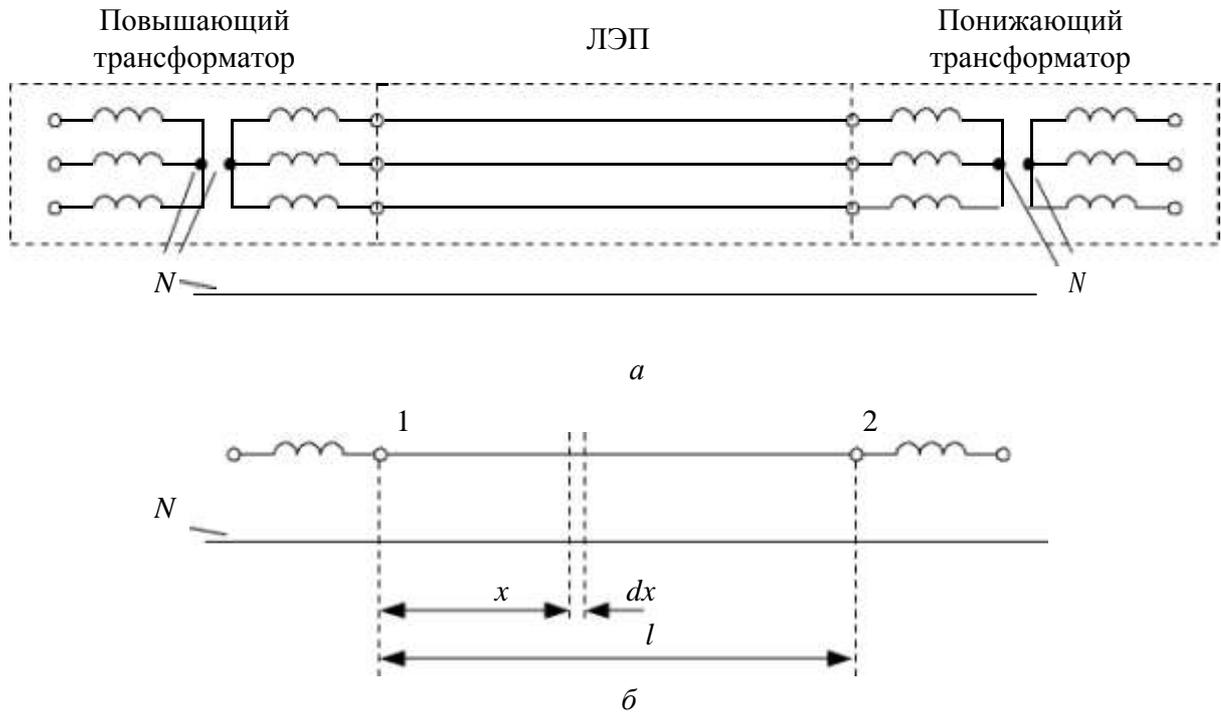


Рис. 2.2. Трехфазная линия электропередачи – (а) и ее однолинейное изображение – (б)

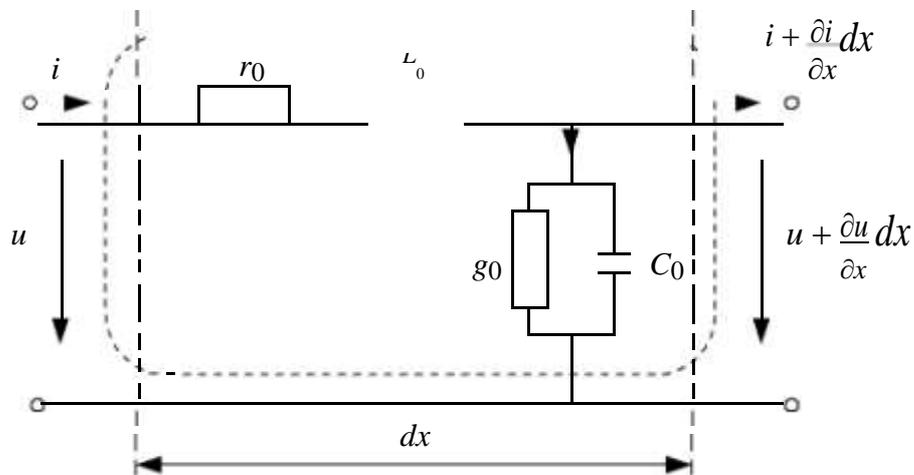


Рис. 2.3. Элементарный отрезок линии

Составим уравнения Кирхгофа для электрической цепи на выделенном участке линии:

$$\begin{aligned} (-i) + i + \frac{\partial u}{\partial x} dx + r_0 dx i + L_0 dx \frac{\partial i}{\partial t} &= 0, \\ (-i) + i + \frac{\partial i}{\partial x} dx + g_0 dx u + C_0 dx \frac{\partial u}{\partial t} &= 0 \end{aligned} \quad (2.1)$$

или

$$\begin{aligned}
 -\frac{\partial u}{\partial x} &= r i + L \frac{\partial i}{\partial t}, \\
 -\frac{\partial i}{\partial x} &= g u + C \frac{\partial u}{\partial t}.
 \end{aligned}
 \tag{2.2}$$

Здесь в C_0 и L_0 учтены влияния соседних фаз линии.

Полученные уравнения являются дифференциальными уравнениями в частных производных – моделью участка линии на микроуровне. Независимыми переменными в них являются время t и одна пространственная координата x .

Используя символический метод представления синусоидальных функций времени комплексными величинами, для действующих значений токов и напряжений можно записать

$$\begin{aligned}
 -\frac{d\underline{U}}{dx} &= r_0 \underline{I} + j \omega L_0 \underline{I} = (r_0 + j \omega L_0) \underline{I} = \underline{z}_0 \underline{I}, \\
 -\frac{d\underline{I}}{dx} &= g_0 \underline{U} + j \omega C_0 \underline{U} = (g_0 + j \omega C_0) \underline{U} = \underline{y}_0 \underline{U}.
 \end{aligned}
 \tag{2.3}$$

Полученная система уравнений уже имеет одну независимую переменную x . Обозначим напряжения и токи по концам линии: \underline{U}_1 и \underline{I}_1 при $x = 0$ и \underline{U}_2 и \underline{I}_2 при $x = l$. Тогда из решения системы дифференциальных уравнений (2.3) получим связь между напряжениями и токами по концам линии:

$$\begin{aligned}
 \underline{U}_1 &= \text{ch}(\underline{Y}_0 l) \underline{U}_2 + \underline{Z}_c \text{sh}(\underline{Y}_0 l) \underline{I}_2, \\
 \underline{I}_1 &= \frac{1}{\underline{Z}_c} \text{sh}(\underline{Y}_0 l) \underline{U}_2 + \text{ch}(\underline{Y}_0 l) \underline{I}_2.
 \end{aligned}
 \tag{2.4}$$

где $\underline{Z}_c = \sqrt{\frac{r_0 + jx_0}{g_0 + jb_0}}$ – волновое сопротивление линии;

$\underline{Y}_0 = \sqrt{r_0 + jx_0} \sqrt{g_0 + jb_0} = \alpha_0 + j\beta_0$ – коэффициент распространения

волны; α_0 – коэффициент затухания волны;

β_0 – коэффициент фазы.

Полученные уравнения называются уравнениями длинной линии или телеграфными уравнениями.

В (2.4) напряжения записаны в фазных значениях. Однако в трехфазных системах принято указывать линейные значения напряжений, что приводит к пересчету на $\sqrt{3}$ некоторых слагаемых в (2.4):

$$\begin{aligned} \underline{U}_1 &= \operatorname{ch}(\underline{Y}_0 l) \underline{U}_2 + \sqrt{3} \underline{Z} \operatorname{csh}(\underline{Y}_0 l) \underline{I}_2, \\ \underline{I}_1 &= \frac{1}{\sqrt{3} \underline{Z}} \operatorname{sh}(\underline{Y}_0 l) \underline{U}_2 + \operatorname{ch}(\underline{Y}_0 l) \underline{I}_2. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Чтобы не вводить в запись уравнений константу $\sqrt{3}$ и в то же время использовать линейные значения напряжений, используют увеличенное в $\sqrt{3}$ значение тока линии. Таким образом, математическая модель длинной линии имеет вид:

$$\begin{aligned} \underline{U}_1 &= \operatorname{ch}(\underline{Y}_0 l) \underline{U}_2 + \underline{Z} \operatorname{csh}(\underline{Y}_0 l) \underline{I}_2, \\ \underline{I}_1 &= \frac{1}{\underline{Z}} \operatorname{sh}(\underline{Y}_0 l) \underline{U}_2 + \operatorname{ch}(\underline{Y}_0 l) \underline{I}_2. \end{aligned}$$

Здесь \underline{I}_1 и \underline{I}_2 – фазные токи линии, увеличенные в $\sqrt{3}$.

Когда необходимо вычислить напряжение и ток в какой-либо другой точке линии, находящейся на расстоянии x от начала линии (рис. 2.4), по напряжению и току в конце, используют модель:

$$\begin{aligned} \underline{U}_x &= \operatorname{ch}(\underline{Y}_0(l-x)) \underline{U}_2 + \underline{Z} \operatorname{csh}(\underline{Y}_0(l-x)) \underline{I}_2, \\ \underline{I}_x &= \frac{1}{\underline{Z}} \operatorname{sh}(\underline{Y}_0(l-x)) \underline{U}_2 + \operatorname{ch}(\underline{Y}_0(l-x)) \underline{I}_2. \end{aligned} \quad (2.7)$$

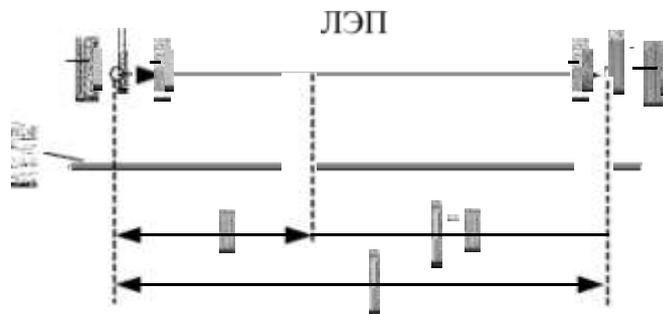


Рис. 2.4. Определение напряжения и тока в точке на линии

Формально напряжение и ток в любой точке линии можно рассматривать как результат наложения двух волн, движущихся в противоположные стороны. С течением времени волна напряжения перемещается от начала линии к ее концу; она носит название прямой или падающей волны. Волна напряжения, которая перемещается от конца линии к ее началу, носит название обратной или отраженной волны.

Расчеты показывают, что для воздушных линий электропередачи при частоте $f = 50$ Гц коэффициент фазы $\beta_0 \approx 0,001$ рад/км (0,06 град/км). С помощью этого значения можно найти длину прямой и обратной волн.

Введем понятие длины волны напряжения и тока λ , равной расстоянию между двумя точками линии, в которых фазы напряжения (тока) падающей или отраженной волны напряжения (тока) различаются на 2π .

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta_0}, \quad (2.8)$$

где $\beta_0 = \text{Im}(Y_0)$ – коэффициент фазы.

Скорость перемещения падающей волны вдоль линии называется фазовой скоростью волны. Это скорость перемещения точки, фаза колебания в которой остается постоянной

$$\frac{dx}{dt} = v_\phi = \frac{\omega}{\beta_0}. \quad (2.9)$$

Из этого соотношения с учетом $\omega = 2\pi f$, получим более точное значение коэффициента фазы

$$\beta_0 = \frac{\omega}{v_\phi} = \frac{314}{300000} = 1,0466 \cdot 10^{-3} \text{ рад/км} \quad (2.10)$$

и длина волны

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta_0} = \frac{v_\phi}{f} = \frac{300000}{50} = 6000 \text{ км}. \quad (2.11)$$

Линии с длиной $l = \lambda = 6000$ км называют волновыми, а с $l = \lambda / 2 = 3000$ км – полуволновыми линиями.

Для упрощения исследований режимов работы ЛЭП сверхвысокого напряжения иногда пользуются уравнениями идеальной линии, в которой активные параметры считаются равными нулю: $r_0 = 0$, $g_0 = 0$. Очевидно, что при этом $\alpha_0 = 0$.

С учетом

$$\begin{aligned} \text{sh}(j\beta_0 l) &= j \sin(\beta_0 l), \\ \text{ch}(j\beta_0 l) &= \cos(\beta_0 l) \end{aligned} \quad (2.12)$$

получим математическую модель идеальной линии:

$$\begin{aligned} \underline{U}_1 &= \cos(\beta_0 l) \underline{U}_2 + jZ_C \sin(\beta_0 l) \underline{I}_2, \\ \underline{I}_1 &= j \frac{1}{Z_C} \sin(\beta_0 l) \underline{U}_2 + \cos(\beta_0 l) \underline{I}_2. \end{aligned} \quad (2.13)$$

2.1.3. Математические модели линии в виде схем замещения

Систему уравнений (2.6) можно представить как уравнения четырехполюсника (рис. 2.5).

$$\begin{aligned} \underline{U}_1 &= \underline{A} \underline{U}_2 + \underline{B} \underline{I}_2, \\ \underline{I}_1 &= \underline{C} \underline{U}_2 + \underline{D} \underline{I}_2. \end{aligned} \quad (2.14)$$



Рис. 2.5. Четырехполюсник

Здесь $\underline{A} = \underline{D} = \text{ch}(\underline{Y}l)$; $\underline{B} = \underline{Z}_C \text{sh}(\underline{Y}l)$; $\underline{C} = \frac{1}{\underline{Z}_C} \text{sh}(\underline{Y}l)$, что позволяет

считать данный четырехполюсник симметричным.

В практике расчетов удобно пользоваться П-образной схемой замещения линии (рис. 2.6).

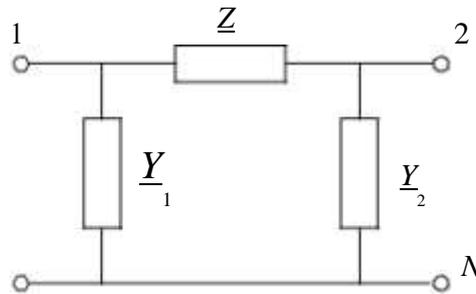


Рис. 2.6. П-образная схема замещения ЛЭП

Найдем соотношения, связывающие параметры П-образной схемы замещения \underline{Z} , \underline{Y}_1 и \underline{Y}_2 с параметрами модели длинной линии (2.6).

Запишем выражение, связывающее напряжения в начале \underline{U}_1 и конце \underline{U}_2 П-образной схемы замещения

$$\underline{U}_1 = \underline{U}_2 + \underline{U} = \underline{U}_2 + \underline{Z} \underline{I}_Z, \quad (2.15)$$

где \underline{U} – падение напряжения в продольной ветви на параметре \underline{Z} схемы замещения;

\underline{I}_Z – ток в ветви с параметром \underline{Z} .

Соотношения между токами в ветвях схемы замещения получаются из первого закона Кирхгофа:

$$\begin{aligned} \underline{I}_Z &= \underline{I}_2 + \underline{I}_{Y_2}, \\ \underline{I}_1 &= \underline{I}_Z + \underline{I}_{Y_1}. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Токи в поперечных ветвях с \underline{Y}_1 и \underline{Y}_2 вычисляются по формулам:

$$\begin{aligned} \underline{I}_{Y_1} &= \underline{Y}_1 \underline{U}_1, \\ \underline{I}_{Y_2} &= \underline{Y}_2 \underline{U}_2. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Подставим ток \underline{I}_Z из (2.16) в (2.15) и с учетом (2.17) будем иметь

$$\begin{aligned} \underline{U}_1 &= \underline{U}_2 + \underline{Z} \underline{I}_2 = \underline{U}_2 + \underline{Z} \left(\underline{I}_2 + \underline{I}_{Y_2} \right) = \\ &= \underline{U}_2 + \underline{Z} \underline{I}_2 + \underline{Z} \underline{Y}_2 \underline{U}_2 = (1 + \underline{Z} \underline{Y}_2) \underline{U}_2 + \underline{Z} \underline{I}_2. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Теперь запишем соотношение для тока в начале схемы замещения \underline{I}_1 , выразив его также через напряжение и ток конца схемы замещения. Подставив в выражение для тока \underline{I}_1 из (2.16) выражения для тока \underline{I}_Z и тока \underline{I}_{Y_1} , получим

$$\begin{aligned} \underline{I}_1 &= \underline{I}_Z + \underline{I}_{Y_1} = \underline{I}_2 + \underline{I}_{Y_1} + \underline{I}_{Y_2} = \\ &= \underline{I}_2 + \underline{Y}_1 \underline{U}_1 + \underline{Y}_2 \underline{U}_2. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Подставим в это выражение \underline{U}_1 из (2.18), будем иметь

$$\begin{aligned} \underline{I}_1 &= \underline{I}_2 + \underline{Y}_1 (1 + \underline{Z} \underline{Y}_2) \underline{U}_2 + \underline{Z} \underline{I}_2 + \underline{Y}_2 \underline{U}_2 = \\ &= (\underline{Y}_1 + \underline{Y}_1 \underline{Z} \underline{Y}_2 + \underline{Y}_2) \underline{U}_2 + (1 + \underline{Z} \underline{Y}_1) \underline{I}_2. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Окончательно получаем систему уравнений для П-образной схемы замещения:

$$\begin{aligned} \underline{U}_1 &= (1 + \underline{Z} \underline{Y}_2) \underline{U}_2 + \underline{Z} \underline{I}_2, \\ \underline{I}_1 &= (\underline{Y}_1 + \underline{Y}_1 \underline{Z} \underline{Y}_2 + \underline{Y}_2) \underline{U}_2 + (1 + \underline{Z} \underline{Y}_1) \underline{I}_2. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Модель (2.21) по своей структуре совпадает с уравнениями четырехполюсника (2.14). Из этого, с учетом вида модели длинной линии (2.6), следует, что

$$\begin{aligned} \underline{A} &= (1 + \underline{Z} \underline{Y}_2) = \text{ch}(\underline{Y} l), \\ \underline{B} &= \underline{Z} = \underline{Z}_C \text{sh}(\underline{Y} l), \\ \underline{C} &= (\underline{Y}_1 + \underline{Y}_1 \underline{Z} \underline{Y}_2 + \underline{Y}_2) = \frac{1}{\underline{Z}_C} \text{sh}(\underline{Y} l), \\ \underline{D} &= (1 + \underline{Z} \underline{Y}_1) = \text{ch}(\underline{Y} l). \end{aligned} \quad (2.22)$$

Решение (2.22) относительно параметров П-образной схемы замещения дает:

$$\begin{aligned} \underline{Z} &= \underline{Z}_C \text{sh}(\underline{Y} l), \\ \underline{Y}_1 &= \underline{Y}_2 = \frac{\text{ch}(\underline{Y} l) - 1}{\underline{Z}_C \text{sh}(\underline{Y} l)}. \end{aligned} \quad (2.23)$$

Используя известные математические соотношения

$$\begin{aligned} \text{sh}(x) &= 2 \text{sh} \frac{x}{2} \text{ch} \frac{x}{2}, \\ \text{ch}(x) &= 2 \text{sh}^2 \frac{x}{2} + 1, \end{aligned} \quad (2.24)$$

получаем

$$\underline{Z} = \underline{Z}_C \operatorname{sh}(\underline{\gamma}_0 l),$$

$$\underline{Y}_1 = \underline{Y}_2 = \frac{1}{\underline{Z}_C} \operatorname{th} \frac{\underline{\gamma}_0 l}{2}.$$
(2.25)

Для идеальной линии параметры П-образной схемы замещения получаются в виде:

$$\underline{Z} = jZ_C \sin(\beta_0 l),$$

$$\underline{Y}_1 = \underline{Y}_2 = j \frac{1}{Z_C} \operatorname{tg} \frac{\beta_0 l}{2}.$$
(2.26)

Пример 1. Найдем распределение величины напряжения и тока вдоль ЛЭП 500 кВ длиной $L = 500$ км при холостом ходе и при передаче мощности нагрузки меньше и больше натуральной мощности линии. Конструкция фазы линии: 3хАС-400/51. Расчеты и графические построения выполним в системе Mathcad. Приведенные ниже значения параметров линии выражены в омах, сименсах и радианах. Параметры режима ЛЭП даны в киловольтах, килоамперах, мегаваттах и мегаварах.

Длина и погонные параметры линии:

$L := 500$	$r_0 := 0.025$	$g_0 := 0.023 \cdot 10^{-6}$	$x_0 := 0.306$	$b_0 := 3.62 \cdot 10^{-6}$
$z_0 := r_0 + j \cdot x_0$	$y_0 := g_0 + j \cdot b_0$			

Расчетные параметры линии – волновое сопротивление, коэффициент распространения волны и натуральная мощность:

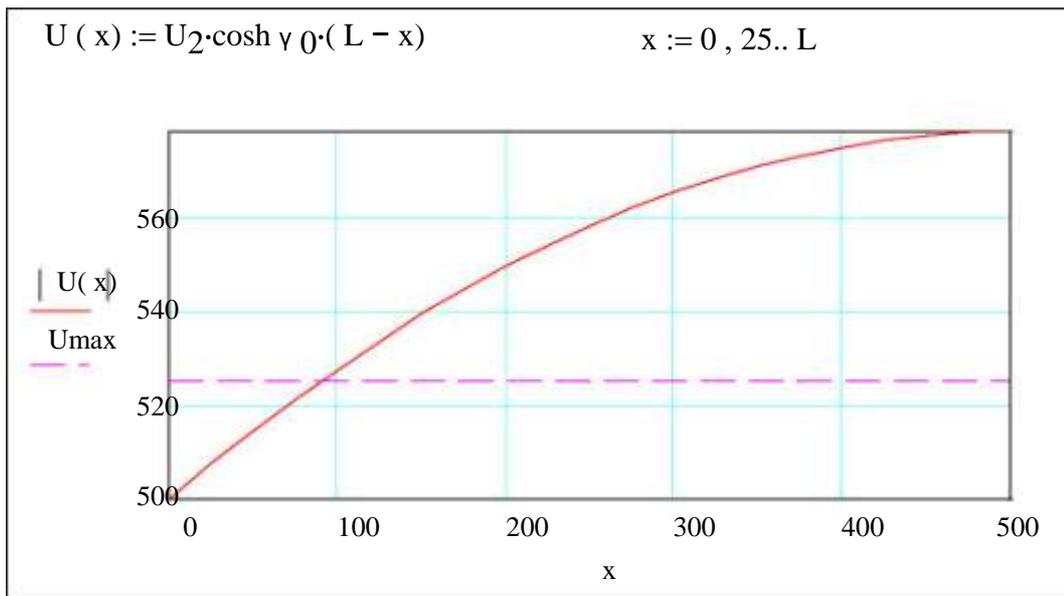
$Z_c := \sqrt{\frac{z_0}{y_0}}$ $Z_c = 291.016 - 10.942i$ $P_{nat} := \frac{U_1^2}{Z_c}$	$\gamma_0 := \sqrt{z_0 \cdot y_0}$ $\gamma_0 = 4.63 \cdot 10^{-5} + 1.053i \cdot 10^{-3}$ $P_{nat} = 857.845 + 32.255i$
--	---

1. Режим холостого хода

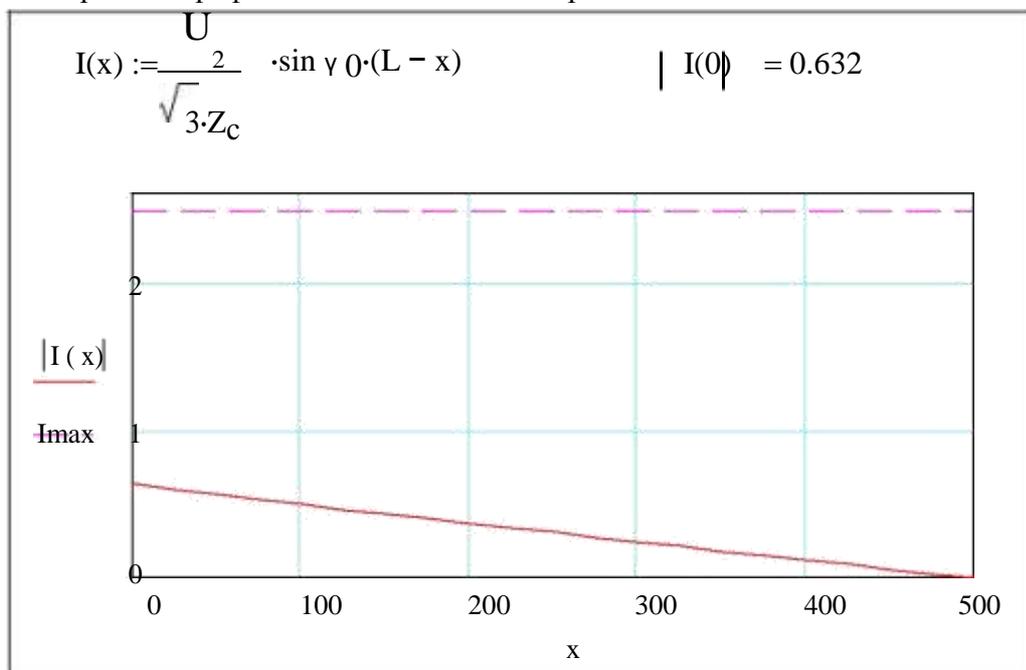
Напряжение в конце линии:

$U_2 := \frac{U_1}{\operatorname{cosh}(\gamma_0 \cdot L)}$	$ U_2 = 578.152$
--	-------------------

Построение графика напряжения вдоль линии в режиме холостого хода:



Построение графика тока вдоль линии в режиме холостого хода:



Из полученных зависимостей видно, что напряжение вдоль ЛЭП начинает превышать предельно допустимое значение уже на расстоянии около 100 км от начала линии; такой режим в действительности не осуществим из-за перекрытия изоляции на линии.

Ток по линии имеет наибольшее значение в начале линии и не превышает допустимое значение, равное 2,475 кА.

2. Режим передачи мощности меньше натуральной

Натуральная мощность данной ЛЭП равна 859,9 МВт. Возьмем передаваемую мощность 700 МВт, реактивную мощность в конце линии примем равной нулю

$$\boxed{P_{21} := 700 \quad Q_{21} := 0 \quad S_{21} := P_{21} + i \cdot Q_{21}}$$

Напряжение в конце ЛЭП найдем из решения системы уравнений.

Начальные приближения для неизвестных U_2, I_2 :

$$U_{2l} := 500 - i \cdot 100 \quad I_{2l} := \frac{S_{2l}}{U_{2l}}$$

Решающий блок:

$$\begin{aligned} &\text{Given} \\ &U_{2l} = U_{2l} \cdot \cosh \gamma \cdot L + I_{2l} \cdot Z \cdot \sinh \gamma \cdot L \\ &I_{2l} = \frac{S_{2l}}{U_{2l}} \\ &U_{2l}, I_{2l} := \text{Find } U_{2l}, I_{2l} \end{aligned}$$

Результаты решения системы уравнений (напряжение и ток в конце линии):

$$\begin{aligned} U_{2l} &= 462.558 - 210.534i & |U_{2l}| &= 508.217 \\ \text{angle Re } U_{2l}, \text{Im } U_{2l} - 2 \cdot \pi &= -24.473 \cdot \text{deg} \\ I_{2l} &= 1.254 - 0.571i & |I_{2l}| &= 1.377 \end{aligned}$$

Вектор напряжения в конце линии отстает от вектора напряжения в начале на 24,473 градуса.

3. Режим передачи мощности больше натуральной

Примем передаваемую активную мощность по линии 900 МВт. Можно убедиться, что при реактивной мощности в конце линии, равной нулю, режим напряжений по линии является неудовлетворительным. Для поддержания удовлетворительного напряжения требуется реактивная мощность емкостного характера. Пусть мощность компенсирующего устройства, включенного в конец линии, такова, что в конце линии реактивная мощность равна минус 100 Мвар (передается в линию).

$$P_{2g} := 900 \quad Q_{2g} := -100 \quad S_{2g} := P_{2g} + i \cdot Q_{2g}$$

Напряжение в конце ЛЭП найдем из решения системы уравнений.

Начальные приближения для неизвестных U_2, I_2 :

$$U_{2g} := 500 - i \cdot 100 \quad I_{2g} := \frac{S_{2g}}{U_{2g}}$$

Решающий блок:

Given

$$U_1 = U_{2g} \cdot \cosh \gamma \cdot L + I_{2g} \cdot Z_c \cdot \sinh \gamma \cdot L$$

$$I_1 = \frac{U_{2g}}{Z_c} \cdot \sinh \gamma \cdot L + I_{2g} \cdot \cosh \gamma \cdot L$$

U_{2g}
 I_{2g} := Find U_{2g}, I_{2g}

Результаты решения системы уравнений (напряжение и ток в конце линии):

$$U_{2g} = 412.797 - 270.897i \quad |U_{2g}| = 493.748$$

$$\text{angle } \text{Re } U_{2g}, \text{Im } U_{2g} - 2 \cdot \pi = -33.275 \cdot \text{deg}$$

$$I_{2g} = 1.635 - 0.831i \quad |I_{2g}| = 1.834$$

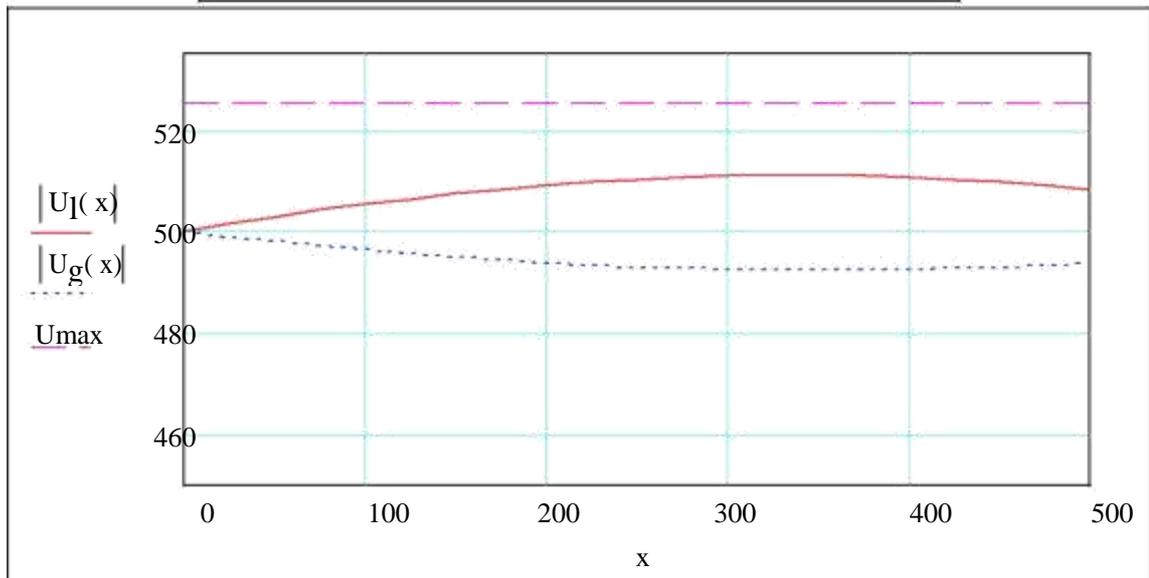
Построим графики напряжения и тока вдоль линии для обоих режимов передачи мощности.

Функция напряжения для $P_2 < P_{\text{нат}}$

$$U_1(x) := U_{21} \cdot \cosh \gamma_0 \cdot (L - x) + I_{21} \cdot Z_c \cdot \sinh \gamma_0 \cdot (L - x)$$

Функция напряжения для $P_2 > P_{\text{нат}}$

$$U_g(x) := U_{2g} \cdot \cosh \gamma_0 \cdot (L - x) + I_{2g} \cdot Z_c \cdot \sinh \gamma_0 \cdot (L - x)$$

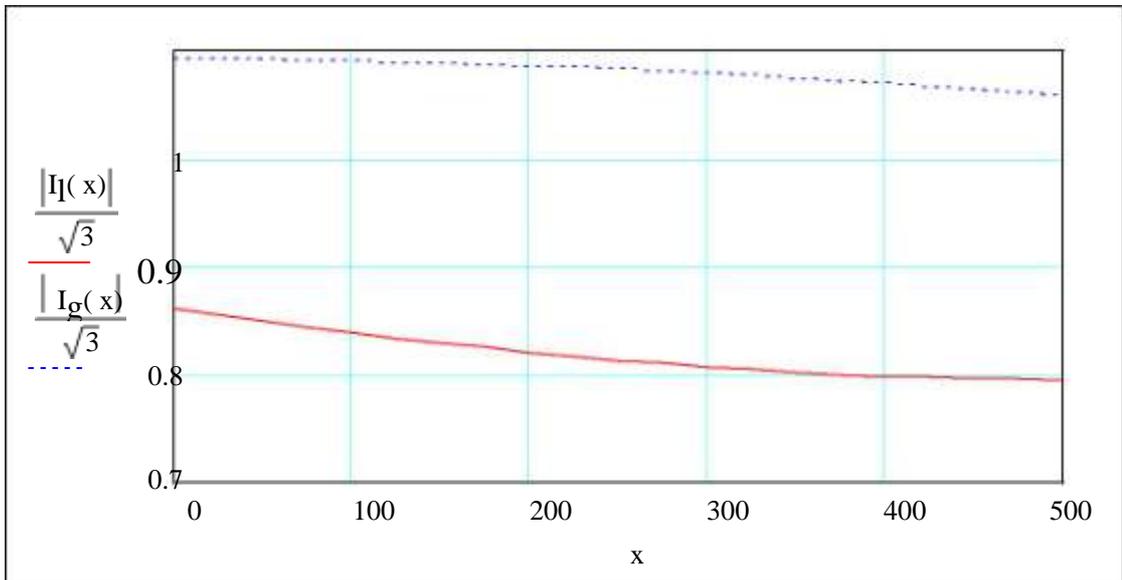


Функция тока для $P_2 < P_{\text{нат}}$

$$I_1(x) := \frac{U_{21}}{Z_c} \cdot \sinh \gamma_0 \cdot (L - x) + I_{21} \cdot \cosh \gamma_0 \cdot (L - x)$$

Функция тока для $P_2 > P_{\text{нат}}$

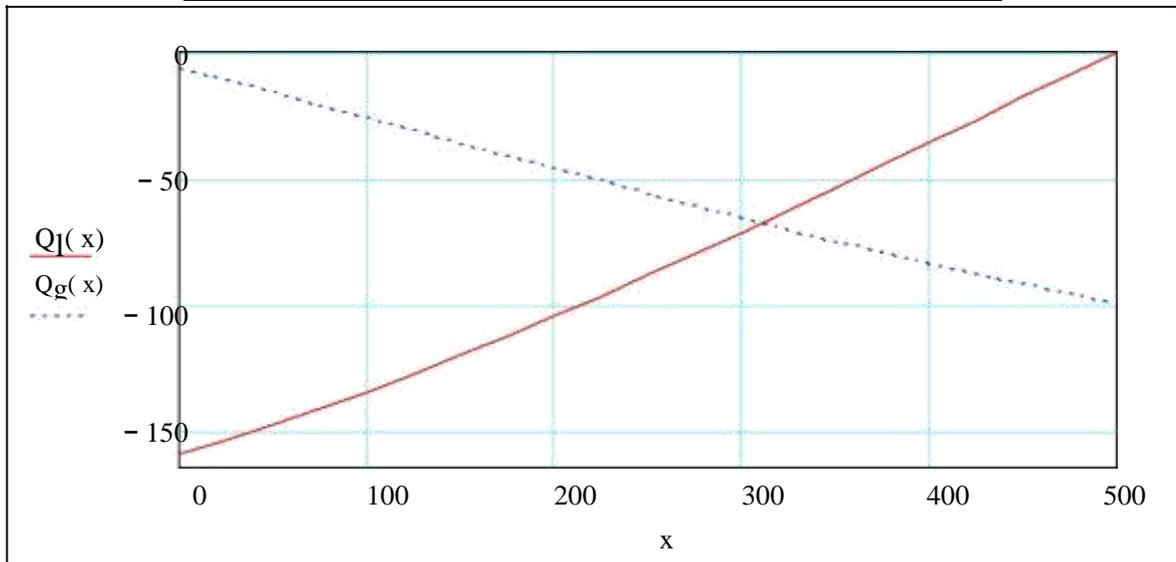
$$I_g(x) := \frac{U}{Z_c} \cdot \sinh \gamma_0 \cdot (L - x) + I_{2g} \cdot \cosh \gamma_0 \cdot (L - x)$$



Изменение активной и реактивной мощности вдоль ЛЭП для двух режимов:

$$P_l(x) := \operatorname{Re} \left(U_l(x) \cdot I_l(x) \right) \quad Q_l(x) := \operatorname{Im} \left(U_l(x) \cdot I_l(x) \right)$$

$$P_g(x) := \operatorname{Re} \left(U_g(x) \cdot I_g(x) \right) \quad Q_g(x) := \operatorname{Im} \left(U_g(x) \cdot I_g(x) \right)$$



Значения активной мощности к началу линии возрастают в обоих случаях, так как вдоль линии имеют место потери активной мощности.

Реактивная мощность в первом случае, когда реактивной нагрузки в конце линии нет, передается к началу линии (отрицательные значения) из-за преобладания зарядной мощности над потерями реактивной мощности. Во втором случае имеет место обратная картина – потери реактивной мощности больше зарядной и потери компенсируются источником реактивной мощности в конце линии.

2.1.4. Упрощенные модели ЛЭП

Для П-образной схемы замещения ЛЭП (рис. 2.6) в п. 2.1.3 было получено

$$\begin{aligned} \underline{Z} &= \underline{Z}_C \operatorname{sh}(\underline{\gamma}_0 l), \\ \underline{Y}_1 = \underline{Y}_2 &= \frac{1}{\underline{Z}_C} \operatorname{th} \frac{\underline{\gamma}_0 l}{2}. \end{aligned} \quad (2.27)$$

Величины составляющих комплексного параметра $\gamma_0 = \alpha_0 + j\beta_0$ для линий сверхвысокого напряжения имеют порядок: $\alpha_0 - 10^{-5}$ и $\beta_0 - 10^{-3}$. Поэтому когда длина линии l невелика, приближенно можно принять

$$\begin{aligned} \operatorname{sh}(\underline{\gamma}_0 l) &\approx \underline{\gamma}_0 l, \\ \operatorname{th} \frac{\underline{\gamma}_0 l}{2} &\approx \frac{\underline{\gamma}_0 l}{2}. \end{aligned} \quad (2.28)$$

Следовательно, для параметров П-образной схемы замещения с математической моделью длинной линии получаем:

$$\begin{aligned} \underline{Z} &= \sqrt{\frac{\underline{z}_0}{\underline{y}_0}} \sqrt{\underline{z}_0 \underline{y}_0} \cdot l = \underline{z}_0 l = (r_0 + jx_0) l, \\ \underline{Y}_1 = \underline{Y}_2 &= \frac{1}{\sqrt{\frac{\underline{z}_0}{\underline{y}_0}}} \frac{\sqrt{\underline{z}_0 \underline{y}_0}}{2} l = \frac{y}{2} = \frac{(g_0 + jb_0)}{2} l. \end{aligned} \quad (2.29)$$

Подставим в уравнения для П-образной схемы замещения (2.21) полученные значения (2.29)

$$\begin{aligned} \underline{U}_1 &= (1 + \underline{Z} \underline{Y}_2) \underline{U}_2 + \underline{Z} \underline{I}_2 = 1 + \frac{\underline{z}_0 l y l}{2} \underline{U}_2 + \underline{z}_0 l \underline{I}_2, \\ \underline{I}_1 &= (\underline{Y}_1 + \underline{Y}_1 \underline{Z} \underline{Y}_2 + \underline{Y}_2) \underline{U}_2 + (1 + \underline{Z} \underline{Y}_1) \underline{I}_2 = \\ &= \underline{y}_0 l + \frac{y l \underline{z}_0 l y l}{4} \underline{U}_2 + 1 + \frac{\underline{z}_0 l y l}{2} \underline{I}_2. \end{aligned} \quad (2.30)$$

или окончательно

$$\begin{aligned} \underline{U}_1 &= 1 + \frac{\underline{z}_0 y l^2}{2} \underline{U}_2 + \underline{z}_0 l \underline{I}_2, \\ \underline{I}_1 &= \underline{y}_0 l + \frac{\underline{z}_0 y l^2}{4} \underline{U}_2 + 1 + \frac{\underline{z}_0 y l^2}{2} \underline{I}_2. \end{aligned} \quad (2.31)$$

Полученные уравнения являются упрощенной математической моделью ЛЭП, в которой не учитывается распределенность параметров, а сосредоточенные сопротивления и проводимости вычисляются по (2.29).

Для совсем коротких линий второе слагаемое в выражении $1 + \frac{\underline{z}_0 \underline{y}_0 l^2}{2}$ является очень маленьким, вследствие того, что проводимость \underline{y}_0 имеет порядок $10^{-6} \dots 10^{-4}$. Тогда уравнения (2.31) приобретают еще более простой вид

$$\begin{aligned} \underline{U}_1 &= \underline{U}_2 + \underline{z}_0 l \underline{I}_2, \\ \underline{I}_1 &= \underline{y}_0 l \underline{U}_2 + \underline{I}_2. \end{aligned} \quad (2.32)$$

Такая модель соответствует Г-образной схеме замещения линии, в которой только одна поперечная ветвь $\underline{Y}_1 = \underline{y}_0 l$.

Все математические модели ЛЭП удобно сопоставлять в табличной форме записи параметров четырехполюсника, табл. 2.3. Распределенность параметров в двух последних моделях не учитывается.

В других случаях пренебрегают либо сопротивлениями токоведущих жил линии (активным или реактивным), либо емкостной проводимостью между фазами линии.

Таблица 2.3

Коэффициенты четырехполюсника моделей ЛЭП

Модель	<u>A</u>	<u>B</u>	<u>C</u>	<u>D</u>
Уравнения длинной линии	$\text{ch}(\underline{Y}_0 l)$	$\underline{Z}_C \text{sh}(\underline{Y}_0 l)$	$\frac{1}{\underline{Z}_C} \text{sh}(\underline{Y}_0 l)$	$\text{ch}(\underline{Y}_0 l)$
Уравнения идеальной линии	$\cos(\beta_0 l)$	$j \underline{Z}_C \sin(\beta_0 l)$	$j \frac{1}{\underline{Z}_C} \sin(\beta_0 l)$	$\cos(\beta_0 l)$
Модель с сосредоточенными параметрами П-образной схемы замещения	$1 + \frac{\underline{z}_0 \underline{y}_0 l^2}{2}$	$\underline{z}_0 l$	$\underline{y}_0 l \left(1 + \frac{\underline{z}_0 \underline{y}_0 l^2}{4} \right)$	$1 + \frac{\underline{z}_0 \underline{y}_0 l^2}{2}$
Модель с сосредоточенными параметрами Г-образной схемы замещения	1	$\underline{z}_0 l$	$\underline{y}_0 l$	1

Пример 2. Выполним оценку погрешностей двух упрощенных математических моделей ЛЭП – уравнений идеальной линии и уравнений для П-образной схемы замещения без учета распределенности параметров – для конкретной ЛЭП 500 кВ. Для этого построим зависимости напряжения в начале линии U_1 от длины линии при передаче мощности нагрузки близкой к натуральной мощности линии. Конструкция фазы линии: 3хАС-

400/51. Расчеты и графические построения выполним в системе Mathcad. Приведенные ниже значения параметров линии выражены в омах, сименсах и радианах. Параметры режима ЛЭП даны в киловольтах, килоамперах, мегаваттах и мегаварах.

Длина и погонные параметры линии:

$$L := 500 \quad r_0 := 0.025 \quad g_0 := 0.023 \cdot 10^{-6} \quad x_0 := 0.306 \quad b_0 := 3.62 \cdot 10^{-6}$$

$$z_0 := r_0 + j \cdot x_0 \quad y_0 := g_0 + j \cdot b_0$$

Передаваемая мощность и напряжение в конце линии:

$$P_2 := 800 \quad Q_2 := -33.5 \quad S_2 := P_2 + i \cdot Q_2 \quad U_2 := 500$$

Расчетные параметры ЛЭП:

$$z_0 := r_0 + j \cdot x_0 \quad y_0 := g_0 + j \cdot b_0$$

$$Z_c := \sqrt{\frac{z_0}{y_0}} \quad \gamma := \sqrt{z_0 \cdot y_0}$$

$$Z_c = 291.016 - 10.942i \quad \gamma = 4.63 \cdot 10^{-5} + 1.053i \cdot 10^{-3}$$

Для идеальной линии:

$$Z_C := \operatorname{Re}(Z_c) \quad \beta := \operatorname{Im}(\gamma)$$

$$Z_C = 291.016 \quad \beta = 1.053 \cdot 10^{-3}$$

Определим функции напряжения и тока в начале линии для трех моделей ЛЭП:

$$U_I(x) := \cosh(\gamma \cdot x) \cdot U_2 + Z_c \cdot \sinh(\gamma \cdot x) \cdot I_2 \quad \text{Модель длинной линии}$$

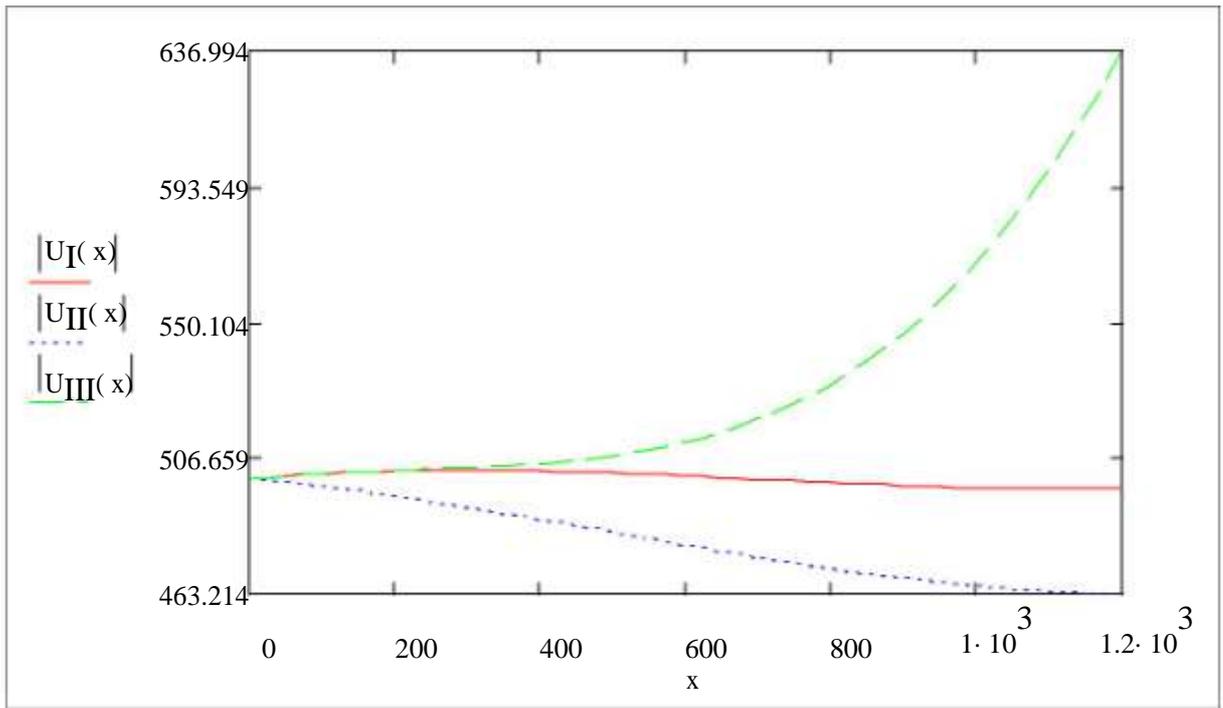
$$U_{II}(x) := \cos(\beta \cdot x) \cdot U_2 + j \cdot Z_C \cdot \sin(\beta \cdot x) \cdot I_2 \quad \text{Модель идеальной линии}$$

$$U_{III}(x) := 1 + \frac{z_0 \cdot y_0 \cdot x^2}{2} \cdot U_2 + z_0 \cdot x \cdot I_2 \quad \text{Модель линии без учета распределенности параметров}$$

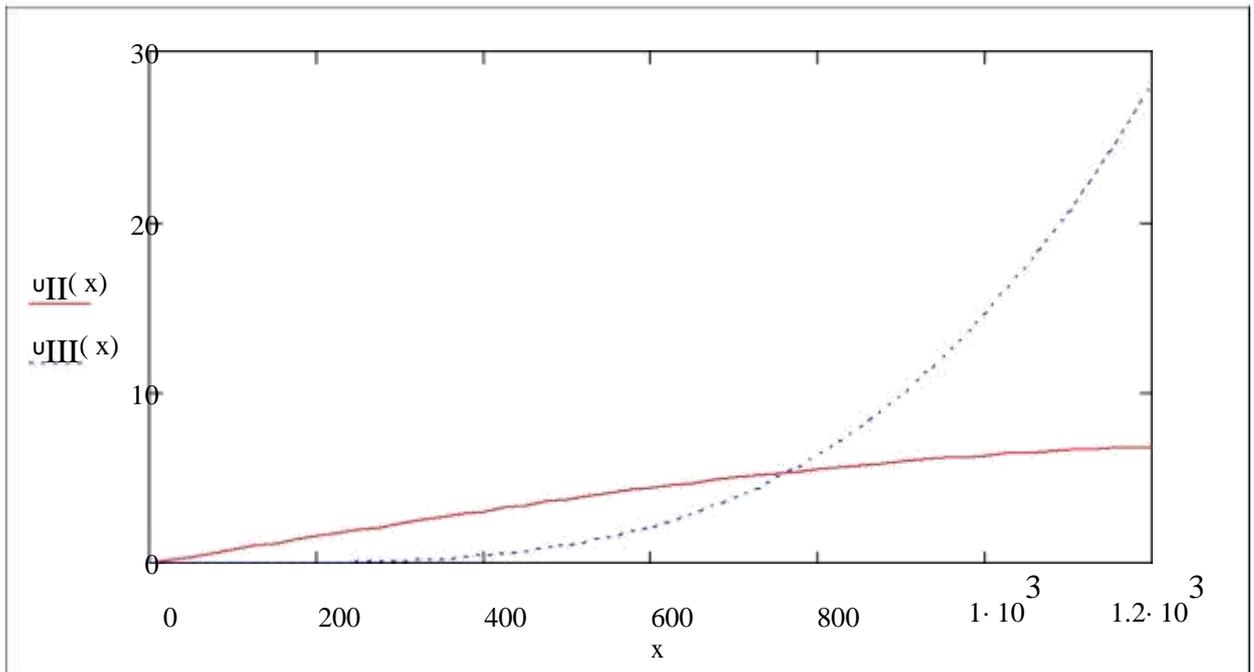
Относительные погрешности напряжения в начале линии

$$\nu_{II}(x) := \frac{\left| |U_{II}(x)| - |U_I(x)| \right|}{|U_I(x)|} \cdot 100 \quad \nu_{III}(x) := \frac{\left| |U_{III}(x)| - |U_I(x)| \right|}{|U_I(x)|} \cdot 100$$

Графики напряжений в начале линии



Графики относительных погрешностей напряжения в начале линии для упрощенных математических моделей:



Примем допустимую относительную погрешность в вычислении напряжения – 1%. Из графиков погрешностей видно, что погрешности в определении напряжения в начале линии для модели идеальной линии превышает допустимую уже при 120 км, а по току при 600 км; погрешности для модели без учета распределенности параметров допустима для линий длиной до 500 км.

Аналогичные графики погрешностей можно построить для указанных моделей для тока в начале линии.

2.2. Силовой трансформатор

2.2.1. Конструктивное выполнение и принцип действия силового трансформатора

Трансформатором называют статическое электромагнитное устройство, имеющее две или более индуктивно связанных обмоток и предназначенное для преобразования посредством электромагнитной индукции одной системы переменного тока в другую систему переменного тока. При этом число фаз, форма кривой напряжения (тока) и частота остаются неизменными.

Силовые трансформаторы применяются в системах передачи и распределения электроэнергии; для установок с преобразователями переменного тока в постоянный (выпрямители) или постоянного в переменный (инверторы); для получения требуемых напряжений питания у электроприемников. Силовые трансформаторы устанавливаются на электростанциях, на понижающих подстанциях, в центрах питания потребителей и непосредственно у потребителей электрической энергии.

В электрических сетях используются трехфазные или группы из трех однофазных трансформаторов. Силовые трансформаторы выполняют двухобмоточными и трехобмоточными. Существуют также трехобмоточные автотрансформаторы и двухобмоточные трансформаторы с расщепленной вторичной обмоткой.

Основными элементами силовых трансформаторов являются: магнитопровод, обмотки, изоляция, бак, расширитель и высоковольтные вводы. Другие части – это элементы системы охлаждения, устройства регулирования напряжения, а также защитные и измерительные устройства.

Магнитопровод является магнитной системой силового трансформатора и служит конструктивным основанием для установки и крепления обмоток, отводов от обмоток и других деталей. Магнитопровод выполняется из электротехнической стали.

Обмотки являются частью электрической цепи и состоят из обмоточного провода (медного или алюминиевого) и изоляционных деталей. К обмоткам также относят вводные концы обмоток, ответвления для регулирования напряжения и регулировочную обмотку, емкостные кольца и электростатические экраны емкостной защиты от перенапряжений.

Обмотки состоят из последовательно соединенных катушек, которые могут наматываться непрерывно, т.е. без паек. Между катушками ставятся прокладки из электрокартона. Фазы обмоток одного напряжения соединяются между собой в звезду или треугольник.

В трансформаторах с масляным охлаждением магнитопровод с обмотками помещают в бак с трансформаторным маслом. Омывая обмотки и магнитопровод, трансформаторное масло отбирает от них тепло и, обладая большей теплопроводностью, чем воздух, через стенки радиатора отдает ее в окружающую среду.

Существуют так же сухие трансформаторы.

Вводы предназначены для присоединения к сборным шинам распределительных устройств станций и подстанций. Ввод состоит из токопроводящей части, металлического фланца, служащего для крепления на крышке бака, и фарфорового изолятора.

Для компенсации температурных изменений применяется расширитель, помещенный в верхней части бака трансформатора или отдельным выносным баком.

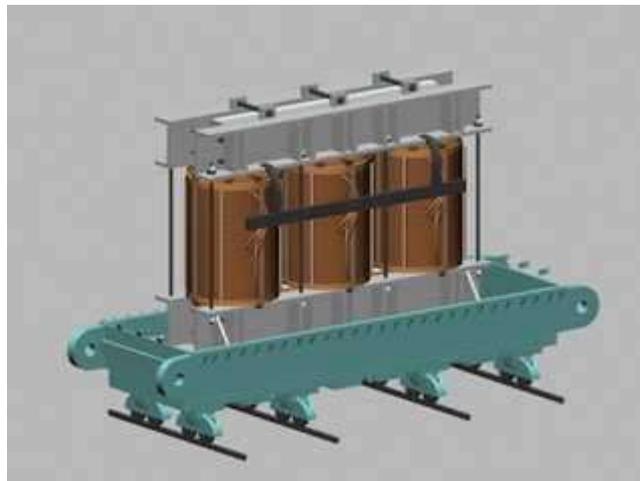


Рис. 2.7. Магнитопровод с обмотками силового трансформатора

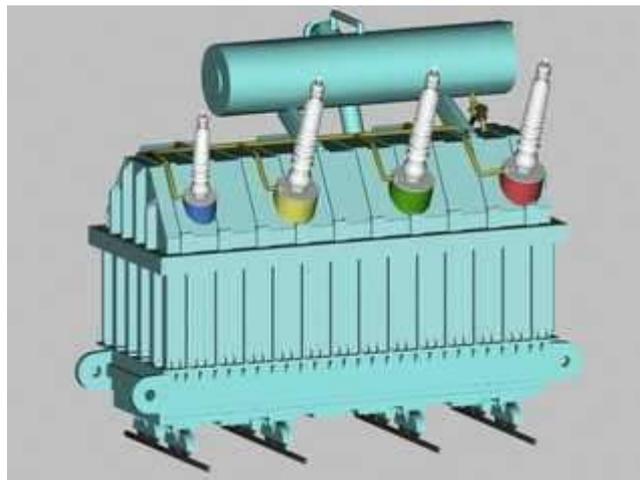


Рис. 2.8. Общий вид силового трансформатора

Принцип действие трансформатора основан на явлении электромагнитной индукции. При подключении первичной обмотки к источнику переменного тока с напряжением u_1 в витках этой обмотки протекает переменный ток i_1 , который создает в магнитопроводе переменный магнитный поток Φ .

Замыкаясь на магнитопроводе, этот поток сцепляется с обеими обмотками (первичной и вторичной) и индуцирует в них ЭДС:

$$\begin{aligned} e_1 &= -w_1 \frac{d\Phi}{dt}, \\ e_2 &= -w_2 \frac{d\Phi}{dt}. \end{aligned} \quad (2.33)$$

где w_1 и w_2 – число витков в первичной и вторичной обмотках трансформатора.

При подключении нагрузки к выводам вторичной обмотки трансформатора под действием ЭДС e_2 в цепи этой обмотки создается ток i_2 , а на выводах вторичной обмотки устанавливается напряжение u_2 .

Из (2.33) следует, что ЭДС e_1 и e_2 , отличаются друг от друга числом витков обмоток, в которых они наводятся. Поэтому, применяя обмотки с требуемым соотношением витков, можно изготовить трансформатор на любое отношение напряжений.

Обмотку трансформатора, подключенную к сети с более высоким напряжением, называют обмоткой высшего напряжения (ВН); обмотку, присоединенную к сети меньшего напряжения, – обмоткой низшего напряжения (НН).

Трансформаторы обладают свойством обратимости; один и тот же трансформатор можно использовать в качестве повышающего и понижающего. Но обычно трансформатор имеет определенное назначение: либо он является повышающим, либо понижающим.

Трансформатор – это аппарат переменного тока. Если же его первичную обмотку подключить к источнику постоянного тока, то магнитный поток и магнитопроводе трансформатора также будет постоянным как по величине, так и по направлению ($d\Phi/dt = 0$). Поэтому и в обмотках трансформатора не будет наводиться ЭДС.

2.2.2. Электрические и магнитные свойства и параметры силового трансформатора

Основными электрическими элементами силового трансформатора являются обмотки, имеющими электрическое сопротивление. Ток, протекая по этим обмоткам, вызывает нагрев обмотки. Потоки рассеивания обмоток обуславливают собственные индуктивности обмоток. Следовательно, в обмотках трансформатора, по которым протекают токи, имеются активные и индуктивные сопротивления.

Процесс намагничивания активной стали магнитопровода характеризуется кривой намагничивания $B = f(H)$. Эта зависимость является нелинейной: на кривой имеется участок, после которого дальнейший рост напряженности магнитного поля практически не приводит к увеличению индукции в стали. Эта зона характеризует насыщение электротехнической стали. Отношение индукции к напряженности поля в любой точке кривой намагничивания называют магнитной проницаемостью (μ), которая характеризует способность материала к намагничиванию. Зависимость магнитной проницаемости электротехнической стали от индукции является также нелинейной.

Вследствие непрерывного изменения величины и направления намагничивающего тока, протекающего в первичной обмотке трансформатора, в магнитопроводе создается переменный магнитный поток, изменение которого приводит к перемагничиванию электротехнической стали.

Электрическая энергия, затраченная на перемагничивание, преобразуется в тепловую энергию, приводящую к нагреву магнитопровода трансформатора.

Потери в активной части магнитопровода обуславливаются природой процессов намагничивания ферромагнитных материалов и состоят из трех частей: потерь на гистерезис (P_H), потерь на вихревые токи (P_B) и потерь на магнитное последствие (P_{II})

Потери на гистерезис при перемагничивании вызываются затратой энергии на перестройку границ доменов, и направления их самопроизвольной намагниченности в электротехнической стали зависят от ее микроструктуры и параметров внешнего магнитного поля.

Потери на вихревые токи вызываются затратой энергии на нагрев активной стали от вихревых токов, наводимых в ней переменным магнитным потоком. Вихревые токи циркулируют в листах в плоскостях, перпендикулярных направлению магнитного потока, т. е. в плоскостях поперечного сечения магнитопровода.

Величина потерь на вихревые токи пропорциональна квадрату толщины и обратно пропорциональна удельному электрическому сопротивлению активного материала, поэтому с целью уменьшения потерь на вихревые токи магнитопровод набирается из тонких, изолированных друг от друга слоев, толщина которых в основном определяется толщиной электротехнической стали. Слои магнитопровода выполняются из отдельных пластин или лент.

Измеренные потери в стали всегда больше, чем расчетная сумма потерь на гистерезис и на вихревые токи, за счет наличия потерь на магнитное последствие или, как их иногда называют, «дополнительных» потерь. Приро-

да этих потерь в настоящее время недостаточно ясно, и они не поддаются аналитическому расчету. Увеличение общих потерь в стали магнитопровода может быть вызвано также за счет механических воздействий на нее при технологической обработке и несовершенства межлистовой изоляции. Кроме того, потоки рассеивания обмоток частично замыкаются через бак и другие стальные элементы трансформатора, что вызывает дополнительные потери на перемагничивание и вихревые токи. Для снижения этих потерь стальные баки трансформатора экранируют пакетами электротехнической стали или пластинами из немагнитных материалов (меди, алюминия).

Ток намагничивания и ток, вызывающий потери в стали трансформатора также протекают по первичной обмотке. Вследствие нелинейности характеристики намагничивания, ток намагничивания не является синусоидальным – зависимость тока намагничивания от времени является периодической функцией, но с несколько вытянутой по отношению к функции синуса формой кривой. Так как нагрузочный ток обычно в десятки раз больше тока намагничивания, то суммарный ток (намагничивания и нагрузочный) первичной обмотки является практически синусоидальным. В режимах работы трансформатора близких к холостому ходу следует считаться с несинусоидальностью тока трансформатора. Несинусоидальность тока трансформатора сильно увеличивается при возрастании тока намагничивания, что происходит при превышении напряжения, поданного на трансформатор.

2.2.3. Математические модели силового трансформатора

Рассмотрим математические модели силовых трансформаторов, которые применяются в задачах, связанных с расчетом установившихся режимов схем электрических сетей. В таких моделях не учитываются емкостные связи между витками каждой из обмоток, между самими обмотками и обмотками и землей, а также распределенность электрических и магнитных параметров. Кроме того, ограничимся рассмотрением симметричных режимов нагрузки трансформаторов.

Получим математическую модель однофазного двухобмоточного трансформатора. Вначале предположим, что трансформатор не имеет магнитопровода (воздушный трансформатор), тогда он может быть представлен схемой рис 2.6, в которой активные сопротивления обмоток изображены отдельно. Полярности обмоток на схеме отмечены звездочками.

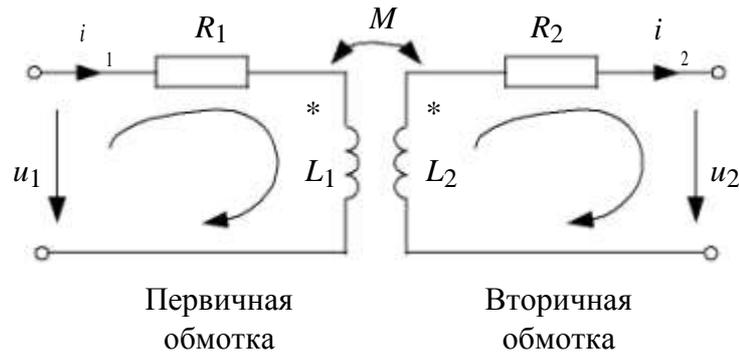


Рис. 2.6. Схема трансформатора без магнитопровода

При обходе контуров на схеме рис. 2.6 в соответствии с заданными направлениями по второму закону Кирхгофа получим уравнения трансформатора в дифференциальной форме

$$\begin{aligned} u_1 &= R_1 i_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} - M \frac{di_2}{dt}, \\ -u_2 &= R_2 i_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} - M \frac{di_1}{dt}. \end{aligned} \quad (2.34)$$

Так как направления токов на схеме ориентированы не одинаково по отношению к звездочкам, то полярность $M \frac{di_1}{dt}$ не совпадает с i_2 и, наоборот, полярность $M \frac{di_2}{dt}$ не совпадает с i_1 .

При синусоидальных токах и напряжениях уравнения (2.34) в комплексной форме записываются в следующем образом:

$$\begin{aligned} \underline{U}_1 &= R_1 \underline{I}_1 + j\omega L_1 \underline{I}_1 - j\omega M \underline{I}_2, \\ -\underline{U}_2 &= R_2 \underline{I}_2 + j\omega L_2 \underline{I}_2 - j\omega M \underline{I}_1. \end{aligned} \quad (2.35)$$

Эти уравнения равносильны следующим:

$$\begin{aligned} \underline{U}_1 &= R_1 \underline{I}_1 + j\omega (L_1 - M) \underline{I}_1 + j\omega M (\underline{I}_1 - \underline{I}_2), \\ -\underline{U}_2 &= R_2 \underline{I}_2 + j\omega (L_2 - M) \underline{I}_2 - j\omega M (\underline{I}_1 - \underline{I}_2). \end{aligned} \quad (2.36)$$

Последним уравнениям соответствует схема замещения рис. 2.7. В отличие от рис. 2.6 в схеме замещения первичная и вторичная цепи трансформатора связаны не индуктивно, а гальванически.

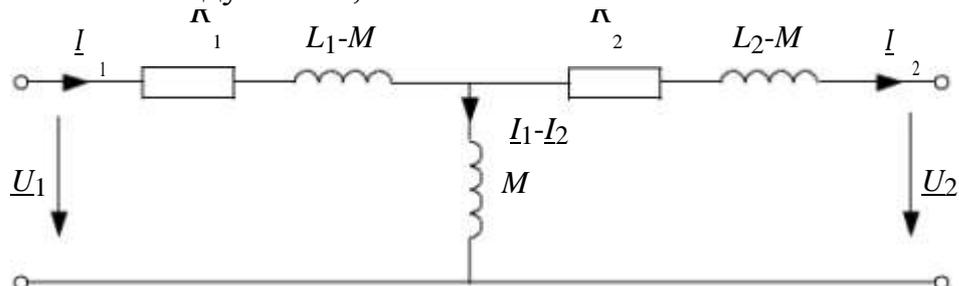


Рис. 2.7. Схема замещения трансформатора без магнитопровода

Входящие в схему рис. 2.7 разности $L_1 - M$ и $L_2 - M$ имеют физический смысл только при одинаковом числе витков первичной w_1 и вторичной w_2 обмоток ($w_1 = w_2$). В этом случае они представляют собой индуктивности рассеяния L_{s1} и L_{s2} первичной и вторичной обмоток трансформатора.

В реальных трансформаторах для моделирования потерь в стали в схему замещения трансформатора вводят активную проводимость G_μ . Для моделирования эффекта намагничивания сердечника вводят реактивную проводимость B_μ .

Если взять за основу математической модели трансформатора так называемый идеальный трансформатор с коэффициентом трансформа-

ции $n = \frac{w_1}{w_2}$, для которого относительная магнитная проницаемость равна бес-

конечности и ток намагничивания равен нулю, то путем добавления к нему элементов, учитывающих основные паразитные эффекты, можно получить полную схему замещения трансформатора (рис 2.8). Потери энергии в обмотках трансформатора при протекании по ним токов учитываются активными сопротивлениями R_1 и R_2 , включенными последовательно с индуктивностями рассеяния, учитывающими эффект запаса энергии и наведения напряжения в обмотках от потоков рассеяния. Этим индуктивностям соответствуют индуктивные сопротивления обмоток X_1 и X_2 . Ток намагничивания обуславливает намагничивающую силу, которая создает поток взаимной индукции. Величина тока намагничивания I_∞ пропорциональна напряжению первичной обмотки. Параллельно индуктивной проводимости намагничивания B_μ включают активную проводимость G_μ , учитывающую потери в сердечнике.

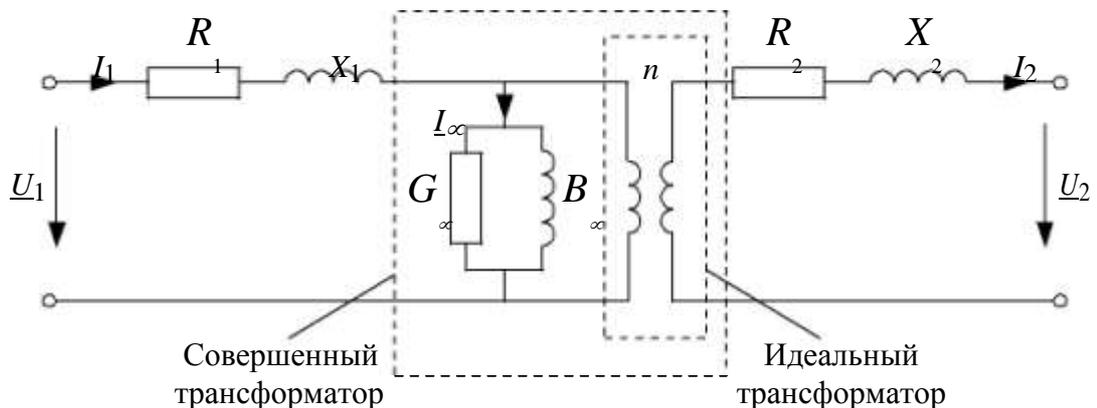


Рис. 2.8. Полная T-образная схема замещения трансформатора

Таким образом, *идеальным трансформатором* является трансформатор, для которого при любых условиях

$$\frac{U_1}{U_2} = \frac{I_2}{I_1} = n.$$

Трансформатор, для которого при любой нагрузке $\frac{U_1}{U_2} \equiv n$, называется

совершенным трансформатором, см. рис 2.8.

Во многих случаях пользуются приведенной Т-образной схемой замещения трансформатора (рис 2.9). Получается она приведением сопротивлений вторичной обмотки к напряжению первичной обмотки по соотношениям:

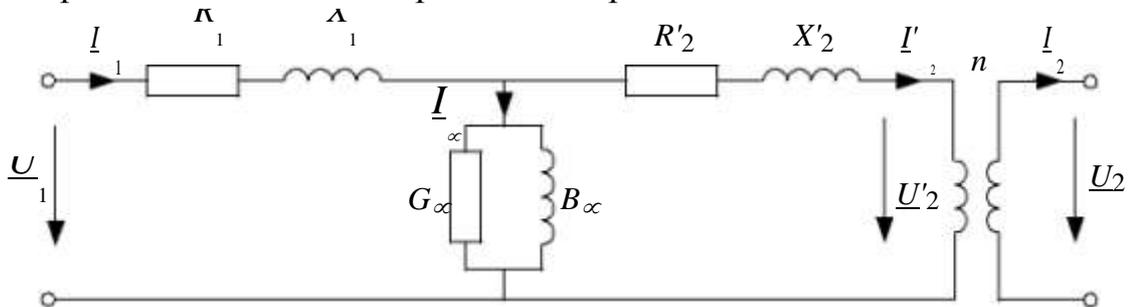


Рис. 2.9. Приведенная Т-образная схема замещения трансформатора

На схеме рис. 2.9 отмечены ток и напряжение:

$$\underline{U}'_2 = n\underline{U}_2, \quad \underline{I}'_2 = -\frac{1}{n} \underline{I}_2. \quad (2.37)$$

2.2.4. Г-образная и П-образная схемы замещения силового трансформатора

Обычно для силовых трансформаторов более целесообразна так называемая Г-образная схема замещения, элементы которой имеют простой физический смысл и могут быть вычислены или измерены. Получается она следующим образом.

Ветвь намагничивания переносится на зажимы первичной обмотки и оказывается включенной на напряжение U_1 . Это вносит погрешность в математическую модель, так как в действительности ток намагничивания (ток холостого хода) протекает по первичной обмотке. Обычно ток холостого хода силовых трансформаторов меньше одного процента от номинального тока трансформатора и такое упрощение считается допустимым. Сопротивления первичной обмотки оказываются последовательно включенными с приведенными сопротивлениями вторичной обмотки, и при их сложении получают так называемые сопротивления трансформатора R_T и X_T (рис. 2.10):

$$R_T = R_1 + R'_2, \quad X_T = X_1 + X'_2.$$

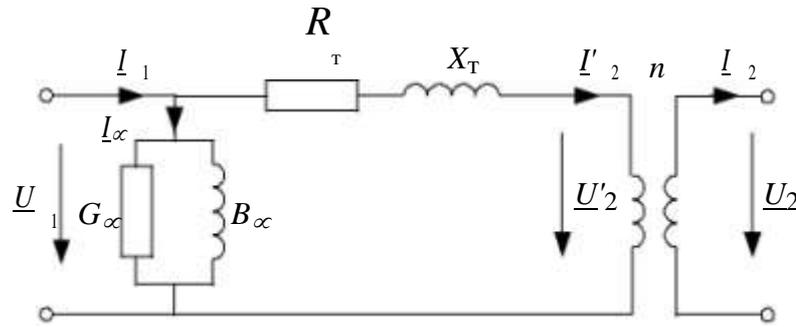


Рис. 2.10. Г-образная схема замещения трансформатора

Полученная схема носит название Г-образной схемы замещения трансформатора и применяется для выполнения расчетов схем электрических сетей, где она еще больше упрощается путем представления ветви холостого хода в виде постоянных величин потерь активной и реактивной мощности на холостой ход (рис 2.11).

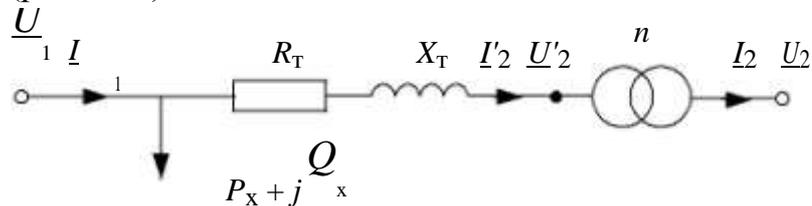


Рис. 2.11. Упрощенная Г-образная схема замещения трансформатора

Все полученное выше для однофазных трансформаторов можно распространить на каждую фазу трехфазного трансформатора.

Сопротивления и проводимости Г-образной схемы замещения трансформатора, приведенные к напряжению обмотки первичного напряжения, определяются по формулам:

$$R_{\tau} = \frac{P_{\kappa}}{S^2} \frac{U_2}{U_{1\text{НОМ}}} ; \quad X_{\tau} = \frac{U U_2}{100S} \frac{U_2}{U_{1\text{НОМ}}} ; \quad (2.38)$$

$$G_{\mu} = \frac{P_{\kappa}^{\text{НОМ}}}{U_{1\text{НОМ}}^2} ; \quad B_{\mu} = \frac{I_{\kappa}^{\text{НОМ}}}{100U_{1\text{НОМ}}^2} = \frac{Q_{\kappa}}{U_{1\text{НОМ}}^2}$$

Моделирование элементов схем электрических сетей при использовании специальных программ для расчета их режимов работы удобно выполнять по П-образным схемам замещения. Такую схему замещения можно получить и для трансформатора.

Получим параметры П-образной схемы замещения (рис. 2.5), на основе Г-образной схемы замещения двухобмоточного понижающего трансформатора, с коэффициентом трансформации $n > 1$ (рис. 2.10).

Найдем напряжение и ток первичной обмотки:

$$\underline{U}_1 = n\underline{U}_2 + \underline{U}_{\tau} = n\underline{U}_2 + (R_{\tau} + jX_{\tau}) \frac{I_2}{n} \quad (2.39)$$

$$\underline{I}_1 = \underline{I}_{\infty} + \frac{I_2}{n} = (G_{\infty} - jB_{\infty}) \underline{U}_1 + \frac{I_2}{n} \quad (2.40)$$

После подстановки (2.52) в (2.53) получим

$$\underline{I}_1 = n (G_\infty - jB_\infty) U_2 + \frac{1}{n} \left((R_T + jX_T)(G_\infty - jB_\infty) + 1 \right) \underline{I}_2 \quad (2.41)$$

Сопоставляя полученные выражения (2.39) и (2.41) с уравнениями четырехполюсника:

$$\begin{aligned} \underline{U}_1 &= \underline{A} \underline{U}_2 + \underline{B} \underline{I}_2, \\ \underline{I}_1 &= \underline{C} \underline{U}_2 + \underline{D} \underline{I}_2 \end{aligned} \quad (2.42)$$

и учитывая соотношения между коэффициентами четырехполюсника и параметрами П-образной схемы замещения [см. (2.21)]:

$$\begin{aligned} \underline{A} &= 1 + \underline{Z} \underline{Y}_2, \\ \underline{B} &= \underline{Z}, \\ \underline{C} &= \underline{Y}_1 + \underline{Y}_1 \underline{Z} \underline{Y}_2 + \underline{Y}_2, \\ \underline{D} &= 1 + \underline{Z} \underline{Y}_1, \end{aligned} \quad (2.43)$$

будем иметь:

$$\begin{aligned} \underline{A} &= 1 + \underline{Z} \underline{Y}_2 = n, \\ \underline{B} &= \underline{Z} = \frac{\underline{Z}_T}{n}, \\ \underline{C} &= \underline{Y}_1 + \underline{Y}_1 \underline{Z} \underline{Y}_2 + \underline{Y}_2 = n \underline{Y}_\infty, \\ \underline{D} &= 1 + \underline{Z} \underline{Y}_1 = \frac{1}{n} (1 + \underline{Z}_T \underline{Y}_\infty). \end{aligned} \quad (2.44)$$

Из полученных соотношений можно найти параметры П-образной схемы замещения трансформатора:

$$\begin{aligned} \underline{Z} &= \frac{1}{\underline{Z}_T}, \\ \underline{Y}_1 &= \frac{1}{\underline{Z}_T} (1 - n) + \underline{Y}_\infty, \\ \underline{Y}_2 &= \frac{n}{\underline{Z}_T} (n - 1). \end{aligned} \quad (2.45)$$

П-образная схема замещения трансформатора в отличие от П-образной схемы замещения ЛЭП является несимметричной, т. е. $\underline{Y}_1 \neq \underline{Y}_2$.

2.2.5. Построение внешней характеристики трансформатора

Внешней характеристикой трансформатора называют зависимость изменения вторичного напряжения U_2 от тока нагрузки I_2 при постоянном коэффициенте мощности приемника $\cos\varphi = \text{const}$ и номинальном первичном напряжении $U_1 = U_{\text{ном}}$. Сопоставляя внешние характеристики, полученные для различных математических моделей трансформатора с экспериментально полученной характеристикой трансформатора, можно оценить величину погрешности различных моделей и определить, таким образом, область их использования.

Выполним построение внешней характеристики силового трансформатора по его математической модели при изменении тока вторичной обмотки от нуля до $I_{\text{ном}}$ для трех различных коэффициентов мощности: 0,8; 0,9 и 1,0.

Внешнюю характеристику $U_2 = f(I_2)$ построим по уравнению

$$\underline{U}_1 = \underline{A}\underline{U}_2 + \sqrt{3}\underline{B}\underline{I}_2 \quad (2.46)$$

Примем $\underline{U}_1 = U_1 = \text{const}$ (совместим с вещественной осью), тогда векторная диаграмма токов и напряжений трансформатора будет иметь вид как на рис. 2.12.

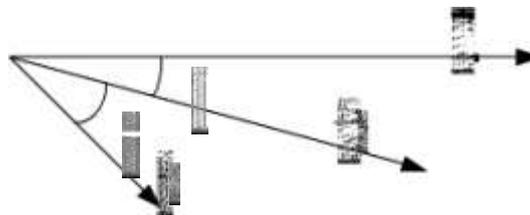


Рис. 2.12. Векторная диаграмма токов и напряжений 1

Выразим из (2.46) напряжение \underline{U}_2 :

$$\underline{U}_2 = \frac{\underline{U}_1 - \underline{B}\underline{I}_2}{\underline{A}} \quad (2.47)$$

Здесь ток \underline{I}_2 имеет угол сдвига относительно вещественной оси $-(\delta + \varphi)$, а напряжение вторичной обмотки представлено в комплексном виде: $|\underline{U}_2|$ и δ , где δ входит в левую часть уравнения: $\underline{U}_2 = U_2 e^{-j\delta}$ и в правую: $\underline{I}_2 = I_2 e^{-j(\varphi + \delta)}$.

Чтобы получить зависимость величины (модуля) U_2 от величины (модуля) I_2 необходимо перейти к уравнениям с вещественными переменными. Для удобства примем совмещенным с действительной осью вектор \underline{U}_2 , тогда векторная диаграмма токов и напряжений примет вид, рис. 2.13.

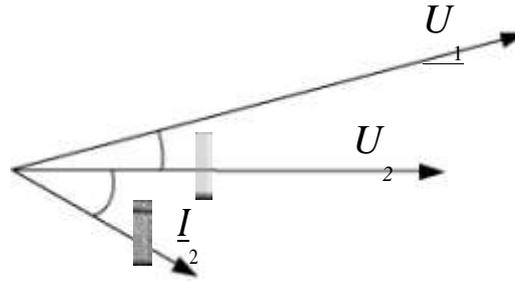


Рис. 2.13. Векторная диаграмма токов и напряжений 2

и напряжение U_2 :

$$U_2 = \frac{U_1 - \underline{B}I_2}{\underline{A}}, \quad (2.48)$$

где $\underline{U}_1 = U_1 e^{j\delta}$; $\underline{I}_2 = I_2 e^{-j\phi}$.

Разделим уравнение (2.48) на два уравнения с вещественными переменными. С учетом $\underline{A} = A = n$ и $\underline{B} = B' + jB''$, будем иметь систему уравнений:

$$\begin{aligned} U_2 &= \frac{1}{A} U_1' - \sqrt{3}(B'I_2' + B''I_2'') \quad , \\ 0 &= \frac{1}{A} U_1'' - \sqrt{3}(B''I_2' - B'I_2'') \quad . \end{aligned} \quad (2.49)$$

Так, как $I_2' = I_2 \cos\phi$, $I_2'' = I_2 \sin\phi$ и $U_1 = \sqrt{U_1'^2 + U_1''^2}$, получаем систему уравнений:

$$\begin{aligned} U_2 &= \frac{1}{A} U_1' - \sqrt{3}(B'I_2 \cos\phi + B''I_2 \sin\phi) \quad , \\ 0 &= \frac{1}{A} U_1'' - \sqrt{3}(B''I_2 \cos\phi - B'I_2 \sin\phi) \quad , \\ U_1^2 &= U_1'^2 + U_1''^2. \end{aligned} \quad (2.50)$$

с неизвестными U_2 , U_1' и U_1'' .

Изменяя ток I_2 в пределах от нуля до $I_{2\text{ном}}$ будем искать решение системы уравнений (2.50) для каждого значения I_2 и строить зависимость $U_2 = f(I_2)$.

В Mathcad имеется возможность определения функции как решения системы уравнений. Для этого выражение с Find имеет вид определения функции: $f(x) := \text{Find}(x)$ и далее в документе Mathcad $f(x)$ становится определенной и является функцией аргумента x .

В нашем случае аргументами функции с Find будет U_2 (по условию с углом равным нулю) и $\cos\phi$, который также будет различным для разных выходных характеристик.

Пример 1

Определение функции как решения системы уравнений.

Для удобства записи введем еще две переменных $I_2' = I_2 \cos\phi$ и $I_2'' = I_2 \sin\phi$. Начальные приближения:

$$U_2 := \frac{U_1}{n} \quad U'_1 := U_1 \quad U''_1 := 0 \quad I'_2 := 0 \quad I''_2 := 0$$

Решающий блок Mathcad:

Given

$$U_2 = \frac{U'_1}{A} - \sqrt{3} \cdot \frac{(\operatorname{Re}(B) \cdot I'_2 + \operatorname{Im}(B) \cdot I''_2)}{A}$$

$$0 = U''_1 - \sqrt{3} \cdot (\operatorname{Im}(B) \cdot I'_2 - \operatorname{Re}(B) \cdot I''_2)$$

$$U_1^2 = U'^2_1 + U''^2_1$$

$$I'_2 = I \cdot \cos\varphi$$

$$I''_2 = I \cdot \sqrt{1 - \cos^2\varphi}$$

Функция как решение системы уравнений:

$$F(I, \cos\varphi) := \operatorname{Find}(U_2, U'_1, U''_1, I'_2, I''_2)$$

Здесь функция F является вектор-функцией, т.е. содержит пять элементов (по числу неизвестных). Первый элемент дает функцию U_2 , второй – U'_1 и т.д. Нас интересует только первый элемент: функция U_2 от I_2 и $\cos\varphi$. Если переменная ORIGIN в Mathcad имеет заданное по умолчанию значение 0, то наша функция будет использоваться в виде: $F(I_2, \cos\varphi)_0$. Так, например, для $\cos\varphi = 0,8$ выходная характеристика будет строиться по функции $F(I_2, 0.8)_0$ при изменении тока от 0 до $I_{\text{ном}}$.

Пример 2

Построить внешнюю характеристику силового трансформатора ТРДЦН-63000/110 по его математической модели – Г-образной схеме замещения.

Расчеты и построение характеристики выполним в Mathcad. Напряжения в киловольтах, мощности в кВА, токи в килоамперах, сопротивления в омах, проводимости в сименсах.

Параметры трансформатора:

$$U_{1\text{ном}} := 115 \quad U_{2\text{ном}} := 10.5 \quad S_{\text{ном}} := 63000 \quad P_X := 59.0 \quad Q_X := 410$$

$$R := 0.8 \quad X := 22$$

Номинальный ток, коэффициент трансформации и параметры ветви намагничивания:

$$I_{2\text{ном}} := \frac{S_{\text{ном}}}{\sqrt{3} \cdot U_{2\text{ном}}} \cdot 10^{-3} \quad n := \frac{U_{1\text{ном}}}{U_{2\text{ном}}} \quad G := \frac{P_X}{U_{1\text{ном}}^2} \cdot 10^{-3} \quad B := \frac{Q_X}{U_{1\text{ном}}^2} \cdot 10^{-3}$$

$$I_{2\text{ном}} = 3.464 \quad n = 10.952 \quad G = 4.461 \cdot 10^{-6} \quad B = 3.1 \cdot 10^{-5}$$

Коэффициенты A и B четырехполюсника:

$$A := n \quad B := \frac{R + j \cdot X}{n} \quad B = 0.073 + 2.009i$$

Условия построения характеристики:

$$U_1 := U_{1nom} \quad I := 0, 0.1 \cdot I_{2nom} \dots I_{2nom}$$

Начальные приближения:

$$U_2 := \frac{U_1}{n} \quad U'_1 := U_1 \quad U''_1 := 0 \quad I'_2 := 0 \quad I''_2 := 0$$

Решающий блок Mathcad:

Given

$$U_2 = \frac{U'_1}{A} - \sqrt{3} \cdot \frac{(\operatorname{Re}(B) \cdot I'_2 + \operatorname{Im}(B) \cdot I''_2)}{A}$$

$$0 = U''_1 - \sqrt{3} \cdot (\operatorname{Im}(B) \cdot I'_2 - \operatorname{Re}(B) \cdot I''_2)$$

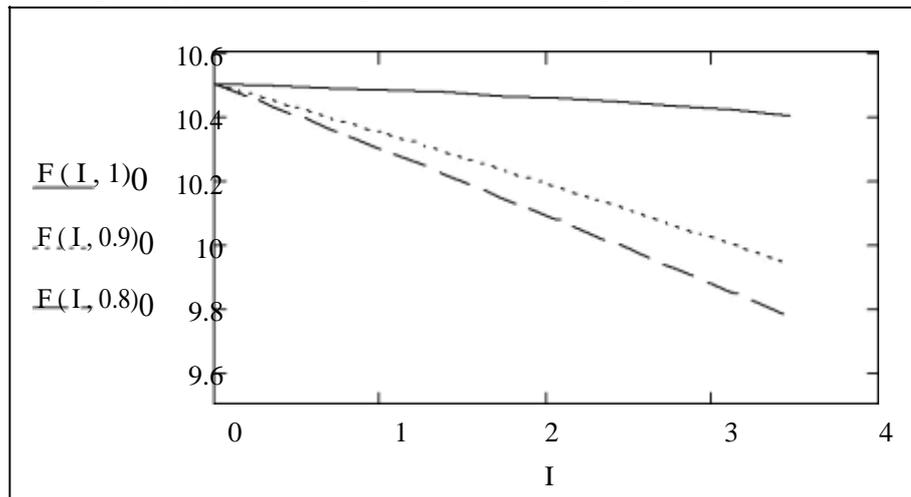
$$U_1^2 = U'^2_1 + U''^2_1$$

$$I'_2 = I \cdot \cos f$$

$$I''_2 = I \cdot \sqrt{1 - \cos^2 f}$$

$$F(I, \cos f) := \operatorname{Find}(U_2, U'_1, U''_1, I'_2, I''_2)$$

Внешние характеристики для трех значений коэффициента мощности: 1; 0,9 и 0,8:



Снижение напряжения на вторичной обмотке с ростом тока нагрузки вызвано потерей напряжения в сопротивлениях обмоток трансформатора. Для того чтобы не допустить снижения напряжения у потребителей электроэнергии в силовых трансформаторах предусмотрено специальное устройство – регулятор напряжения, который при росте тока нагрузки изменяет коэффициент трансформации таким образом, чтобы обеспечить необходимое напряжение на шинах вторичного напряжения трансформатора.

Получим внешнюю характеристику трансформатора по его упрощенной модели, в которой не учитываются активные параметры: $R_T = 0$ и $G = 0$, и сопоставим полученные характеристики с характеристиками, полученными по полной модели.

Коэффициенты A и B четырехполюсника для упрощенной модели:

$$A := n \quad B := \frac{j \cdot X}{n} \quad B = 2.009i$$

Начальные приближения:

$$U_2 := \frac{U_1}{n} \quad U'_1 := U_1 \quad U''_1 := 0 \quad \Gamma'_2 := 0 \quad \Gamma''_2 := 0$$

Решающий блок Mathcad:

$$U_2 = \frac{U'_1}{A} - \sqrt{3} \cdot \frac{(\operatorname{Re}(B) \cdot \Gamma'_2 + \operatorname{Im}(B) \cdot \Gamma''_2)}{A}$$

$$0 = U''_1 - \sqrt{3} \cdot (\operatorname{Im}(B) \cdot \Gamma'_2 - \operatorname{Re}(B) \cdot \Gamma''_2)$$

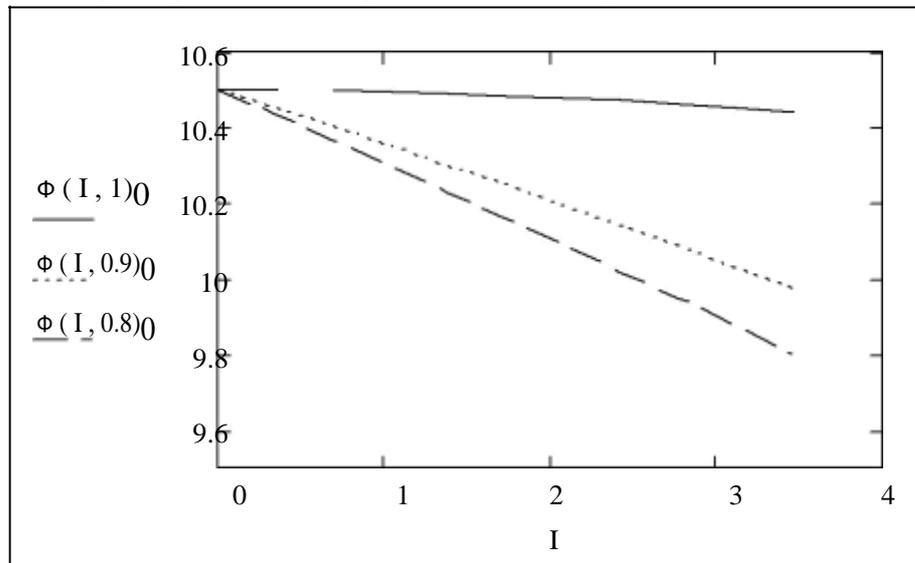
$$U_1^2 = U_1'^2 + U_1''^2$$

$$\Gamma'_2 = I \cdot \cos \varphi$$

$$\Gamma''_2 = I \cdot \sqrt{1 - \cos^2 \varphi}$$

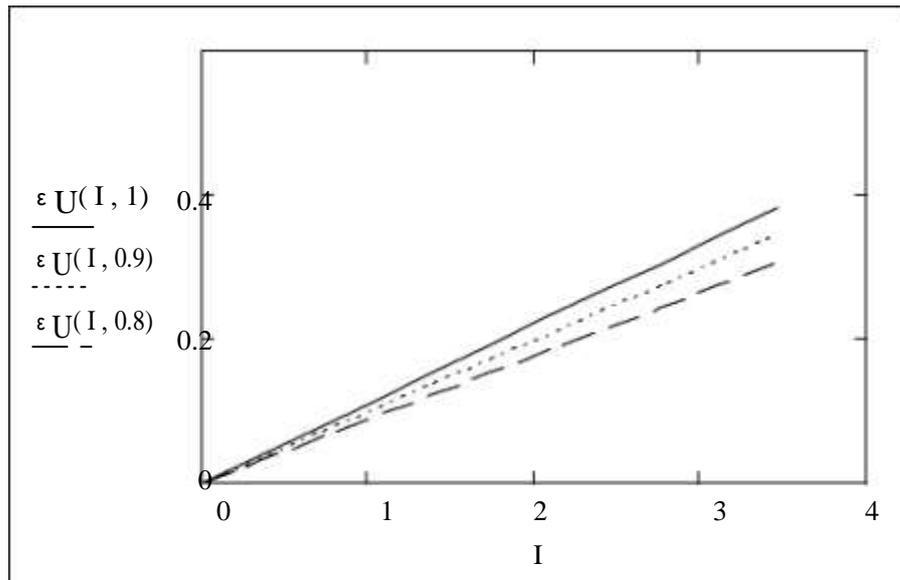
$$\Phi(I, \cos \varphi) := \text{Find } U_2, U'_1, U''_1, \Gamma'_2, \Gamma''_2$$

Внешние характеристики для трех значений коэффициента мощности: 1; 0,9 и 0,8:



Вычислим и построим функции погрешностей внешних характеристик упрощенной модели:

$$\varepsilon_{U(I, \cos \varphi)} := \frac{|F(I, \cos \varphi) - \Phi(I, \cos \varphi)|}{|F(I, \cos \varphi)|} \cdot 100$$



Из последнего рис. видно, что погрешности характеристик упрощенной модели не превышают 0,4 %. Такая погрешность вполне допустима во многих задачах расчета установившихся режимов и токов короткого замыкания в электрических системах и поэтому иногда активным сопротивлением обмоток трансформатора и потерями в стали пренебрегают. Следует, однако, заметить, что для трансформаторов малой мощности такая картина не сохраняется и применение упрощенной модели становится более ограниченным.

2.3. Электрическая нагрузка

2.3.1. Статические характеристики электрической нагрузки

Процесс потребления электрической энергии потребителями отождествляется с понятием электрической нагрузки, которая характеризуется мощностью и энергией. Нагрузкой может быть один электроприемник, группа однотипных электроприемников или совокупность различных электроприемников – смешанная нагрузка.

К основным электроприемникам в электрической системе относятся:

- асинхронные двигатели,
- синхронные двигатели,
- лампы накаливания,
- люминесцентные лампы,
- печи сопротивления.
- дуговые печи.

Существует также большое число устройств и бытовых приборов, в которых сочетаются различные по типу электроприемники.

В задачах анализа установившихся режимов электрических систем необходима величина активной и реактивной мощности нагрузки. Физическая природа потребления энергии электрической нагрузкой такова, что ее активная и реактивная мощности зависят от подведенного напряжения и частоты в электрической системе. Такие зависимости носят название статических характеристик нагрузок по частоте и по напряжению. Разные типы электрических нагрузок имеют различные статические характеристики. В совокупности различных типов электроприемников рассматриваются статические характеристики смешанной нагрузки.

Статические характеристики используются при регулировании частоты и напряжения в ЭЭС. В общем они записываются как: $P = \phi(f, U)$, $Q = \psi(f, U)$.

Здесь мы будем рассматривать зависимости мощности нагрузки только от напряжения – статические характеристики нагрузки по напряжению $P(U)$ и $Q(U)$. При этом будем считать частоту в ЭЭС неизменной величиной.

По статическим характеристикам, построенным в относительных номинальных единицах, могут быть определены регулирующие эффекты нагрузки – как производные $\frac{\partial P}{\partial U}$, $\frac{\partial Q}{\partial U}$ в какой либо рабочей точке характеристики, например

при $U = U_{\text{ном}}$.

Регулирующий эффект показывает степень снижения активной и реактивной нагрузки при изменении напряжения. Чем больше регулирующий эффект, тем сильнее изменяется мощность, потребляемая нагрузкой при изменении напряжения или частоты.

Для различных электроприемников и их сочетаний статические характеристики получаются разными и зависящими от их рабочих режимов. Практически приходится пользоваться статическими характеристиками, полученными экспериментально. В некоторых случаях их удастся получить расчетным путем.

Статические характеристики изображают в координатах относительных величин – активной и реактивной мощности от частоты и напряжения, рис.2.14.

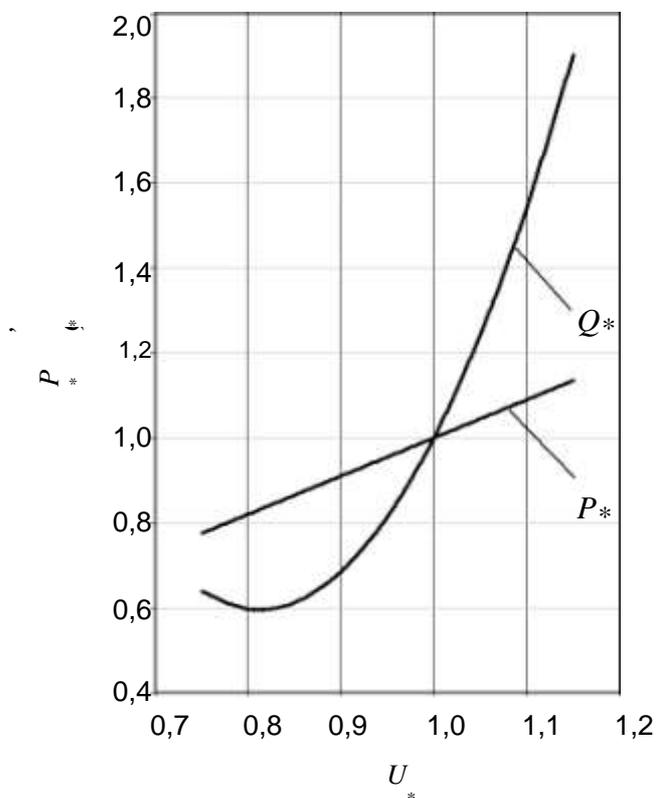


Рис. 2.14 Средние статические нагрузки по напряжению для смешанной нагрузки

На рис.2.14 относительная величина напряжения $U^* = U / U_{\text{ном}}$, а относительные мощности определяются по отношению к номинальной или какой либо выбранной величине мощности нагрузки: $P^* = P / P_{\text{ном}}$, $Q^* = Q / Q_{\text{ном}}$.

Следует отметить, что в ЭЭС и конкретно у потребителей устанавливаются специальные автоматические регулирующие устройства, которые компенсируют изменение напряжения на электроприемниках, что в значительной мере снижает регулирующие эффекты нагрузки. В простейшем случае это стабилизаторы напряжения, а в высоковольтных

сетях – мощные регулируемые компенсирующие устройства реактивной мощности и регуляторы напряжения силовых трансформаторов. Рассмотрим статические характеристики отдельных видов нагрузки.

Асинхронные двигатели. Принцип действия асинхронного двигателя основан на явлении электромагнитной индукции. В неподвижную трехфазную обмотку статора асинхронного двигателя подается переменный ток, ко-

торый формирует в статоре вращающееся магнитное поле. Это поле пересекает проводники замкнутой обмотки ротора и наводит в них ЭДС, под действием которых по обмотке ротора будет протекать ток. Взаимодействие этого тока с полем статора создает на проводниках обмотки ротора электромагнитные силы – вращающий момент, направление которого определяется по правилу «левой руки». Эти силы увлекают ротор в сторону вращения магнитного потока. Скорость вращения ротора всегда меньше скорости вращения магнитного поля статора. Если предположить, что в какой-то момент времени частота вращения ротора оказалась равной частоте вращения поля статора, то проводники обмотки ротора не будут пересекать магнитное поле статора и тока в роторе не будет. В этом случае вращающийся момент станет равным нулю, и частота вращения ротора уменьшится по сравнению с частотой вращения поля статора, пока не возникнет вращающийся момент, уравновешивающий момент нагрузки на валу двигателя и момента сил трения в подшипниках.

Асинхронные двигатели имеют различные статические характеристики. Активная мощность двигателей в сильной мере зависит от характеристик машин, приводимых во вращение двигателями. Реактивная мощность имеет разную зависимость от напряжения в зависимости от номинальной мощности двигателя. Маломощные двигатели имеют более крутые характеристики по сравнению с мощными двигателями.

Реактивная мощность, потребляемая асинхронными двигателями, складывается из намагничивающей мощности, связанной с намагничивающим током, и мощности рассеяния, связанной с созданием полей рассеяния в статоре и роторе. При снижении напряжения реактивная мощность рассеяния растет, а намагничивающая мощность снижается. Суммарная мощность вначале снижается, а затем вновь начинает расти. При определенном напряжении, называемом критическим, двигатель останавливается и его дальнейшая работа становится невозможной.

Синхронные двигатели. Вращающееся магнитное поле статора синхронной машины увлекает за собой ротор, который является электромагнитом – индуктором. Разноименные полюса магнитного поля статора и ротора притягиваются и ротор вращается с постоянной скоростью. Для того, чтобы ротор стал электромагнитом на него подается постоянный ток – ток возбуждения. Этот ток при вращении ротора вызывает магнитное поле в статоре – реакцию якоря. В зависимости от величины тока возбуждения синхронный двигатель может работать в режиме перевозбуждения или недовозбуждения. Режим перевозбуждения – это нормальный режим работы двигателя. Мощ-

ные синхронные двигатели изготавливают с номинальным коэффициентом мощности 0,9 и 0,8 при работе с перевозбуждением.

В режиме перевозбуждения синхронный двигатель выдает реактивную мощность, т.е. имеет емкостной характер реактивной мощности по отношению к сети. При недозавоуждении синхронный двигатель имеет реактивную мощность индуктивного характера, но вследствие ограничений по устойчивости работы и перегреву лобовых частей машины максимально возможная потребляемая реактивная мощность не превышает 30 % от номинальной реактивной мощности при перевозбуждении.

Синхронные двигатели используются как источники реактивной мощности в ЭЭС и применяются для регулирования напряжения. Ток возбуждения синхронных машин изменяется в соответствии с законом регулирования напряжения в сети, поэтому статические характеристики синхронного двигателя по реактивной мощности зависят от закона регулирования напряжения в узле нагрузки, к которому он присоединен. В целом синхронные двигатели имеют положительный регулирующий эффект как по активной, так и по реактивной мощности.

Осветительная нагрузка. Установки электрического освещения с лампами накаливания, люминесцентными, дуговыми ртутными, натриевыми, ксеноновыми применяются на всех предприятиях для внутреннего и наружного освещения, для бытовых потребителей, нужд городского освещения и т.д.

Лампы накаливания излучают свет за счет свечения нити накаливания при большой температуре. При этом значительная часть потребляемой лампами накаливания энергии тратится на превращение в тепловую энергию. Если считать сопротивление R нити накаливания неизменным, а индуктивным сопротивлением пренебречь, то активная мощность лампы будет пропорциональна квадрату подведенного напряжения:

$$P(U) = \frac{U^2}{R} . \quad (2.51)$$

Однако, с изменением тока, протекающего по нити накаливания, ее температура и сопротивление меняются: с увеличением тока растет температура и увеличивается сопротивление нити, и наоборот, при снижении напряжения нить остывает и сопротивление снижается.

Экспериментально установлено, что потребляемая лампами накаливания мощность пропорциональна напряжению в степени 1,5–1,6. Реактивная мощность лампами накаливания практически не потребляется.

Люминесцентные лампы менее чувствительны к отклонениям напряжения. При повышении напряжения потребляемая мощность и световой поток увеличиваются, а при снижении – уменьшаются, но не в такой степени как у ламп накаливания. Однако, при снижении напряжения на люминесцентных лампах до величины $0,9U_{\text{ном}}$ они начинают мерцать, а при величине напряжения $0,8U_{\text{ном}}$ просто не загораются. Регулирующий эффект люминесцентных ламп по схеме с расщепленной фазой равен примерно 1,9 для активной мощности, а для реактивной мощности может быть оценен величиной 1,5.

Печи сопротивления имеют характеристики схожие с характеристиками ламп накаливания.

Дуговые печи представляют собой сложную и тяжелую нагрузку для энергосети – это крупный, несимметричный и в высокой степени нестабильный потребитель по реактивной мощности. Флуктуации реактивной мощности, особенно выраженные на стадии расплава, приводят к падениям напряжения уменьшающим активную мощность поступающую к электропечи и другим электрическим нагрузкам подсоединенным к тем же шинам распределительного устройства. Активная мощность, потребляемая печью, меняется пропорционально квадрату напряжения.

Компенсирующие устройства типа индуктивности и емкости имеют квадратичные зависимости реактивной мощности от напряжения (если их реактивные сопротивления постоянны). Емкостная нагрузка имеет отрицательный регулирующий эффект.

Большинство компенсирующих устройств в настоящее время выпускаются с регулирующими устройствами, т.е. при изменении напряжения на шинах, где подключены компенсирующие устройства, последние изменяют свою мощность в соответствии с законом регулирования. Чаще всего компенсирующие устройства стабилизируют напряжение, т.е. поддерживают его на заданном уровне, что эквивалентно положительному регулируемому эффекту.

2.3.2. Моделирование электрических нагрузок

Статические характеристики для каждого типа электрической нагрузки и их совокупностей могут быть получены экспериментально. Однако в каждом конкретном случае это затруднительно и чаще всего пользуются так называемыми типовыми характеристиками. Так, например, можно выделить статические характеристики асинхронных двигателей малой, средней и большой мощности или статические характеристики определенного состава

смешанной нагрузки. Полученные по таким нагрузкам статические характеристики обобщаются и представляются в виде математических моделей. В общем случае статические характеристики нагрузки по напряжению могут быть представлены в виде:

$$P(U) = P_0 P^*(U) = P_0 a_P \frac{U^2}{U_{\text{ном}}^2} + b_P \frac{U}{U_{\text{ном}}} + c_P; \quad (2.52)$$

$$Q(U) = Q_0 Q^*(U) = Q_0 a_Q \frac{U^2}{U_{\text{ном}}^2} + b_Q \frac{U}{U_{\text{ном}}} + c_Q.$$

где P_0 и Q_0 – активная и реактивная мощности нагрузки при номинальном напряжении; $P^*(U)$ и $Q^*(U)$ – статические характеристики нагрузок в относительных единицах; $U_{\text{ном}}$ – номинальное напряжение нагрузки или сети; a_P , a_Q , b_P , b_Q , c_P и c_Q – коэффициенты (параметры) моделей, полученные в результате обработки экспериментальных данных.

Средние статические характеристики примерно соответствуют следующему составу нагрузки, %:

Крупные асинхронные двигатели	15
Мелкие асинхронные двигатели	35
Крупные синхронные двигатели	9
Печи и ртутные выпрямители	11
Освещение и бытовая нагрузка	22
Потери в сетях	8

Обычно принимается $a_P = 0$, т.е. линейная зависимость активной нагрузки от напряжения. Коэффициенты b_P и c_P в зависимости от характеристики узла нагрузки приведены в табл. 2.4.

Таблица 2.4

Значения коэффициентов b_P и c_P

Характер нагрузки	Статические характеристики					
	пологие		средние		крутые	
	b_P	c_P	b_P	c_P	b_P	c_P
Преобладают крупные промышленные предприятия	0,3	0,7	0,6	0,4	0,9	0,1
В среднем	0,4	0,6	0,9	0,1	1,4	-0,4
Крупных промышленных предприятий нет	0,9	0,1	1,2	-0,2	1,5	-0,5

Коэффициенты a_Q , b_Q и c_Q в зависимости от коэффициента мощности приведены в табл. 2.5.

Таблица 2.5

Значения коэффициентов a_Q , b_Q и c_Q

Коэффициент мощности	Статические характеристики								
	пологие			средние			крутые		
	a_Q	b_Q	c_Q	a_Q	b_Q	c_Q	a_Q	b_Q	c_Q
0,83...0,87	10	-18	9	9,6	-15,3	6,7	10	-14,4	5,4
0,88...0,90	11,9	-21,8	10,9	11,4	-18,5	8,1	11,9	-17,4	6,5
0,91...0,93	14,1	-26,2	13,1	13,5	-22,2	9,7	14,1	-21	7,9

Моделирование электрических нагрузок статическими характеристиками по напряжению в расчетах установившихся режимов считается наиболее точным способом учета потребляемой мощности нагрузки. Однако, для получения действительных статических характеристик требуются экспериментальные исследования, а для подбора типовых статических характеристик должен быть известен состав нагрузки, который может сильно изменяться во времени. Кроме того, в этом случае в расчетах обязательно следует учитывать действие регуляторов напряжения, что сильно усложняет подготовку данных и требует знание законов регулирования.

Поэтому в большинстве случаев пользуются самой простой моделью нагрузки – постоянными значениями активной и реактивной мощности: $P = \text{const}$, $Q = \text{const}$.

В некоторых задачах, в которых выполняются расчеты установившихся режимов, токов короткого замыкания в электрической сети или расчеты устойчивости ЭЭС, нагрузки принято представлять схемами замещения. Такое представление является точным в том случае, если для нагрузки известны ее статические характеристики и величина подведенного напряжения. В других случаях такие модели являются приближенными.

Рассмотрим электрическую цепь, в которой имеется нагрузка, представленная в виде сопротивления \underline{Z}_H . Это сопротивление в общем случае является переменной величиной – получается нелинейная электрическая цепь. Даже если считать мощность, потребляемую нагрузкой постоянной, сопротивление будет меняться в зависимости от напряжения по формуле:

$$\underline{Z}_H = \frac{U_H^2}{\underline{S}_H} \quad (2.53)$$

Кроме того, мощность также зависит от напряжения по статической характеристике и поэтому

$$\underline{Z}_H = \frac{U_H^2}{P_H - jQ_H} \quad (2.54)$$

Нагрузка может быть представлена в виде двух схем замещения – с последовательным и параллельным соединением элементов, рис. 2.15.

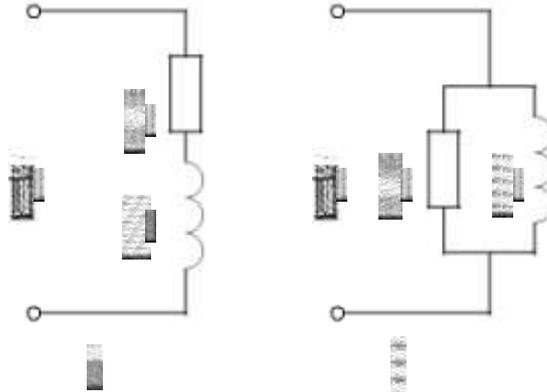


Рис. 2.15. Схемы замещения нагрузки

При последовательном соединении:

$$\underline{Z}_H = \frac{U_H^2}{\underline{S}_H^*} = \frac{U_H^2}{S_H} (\cos \phi + j \sin \phi) = R + jX, \quad (2.55)$$

а при параллельном:

$$\underline{Y}_H = \frac{\underline{S}_H^*}{U_H^2} = \frac{S_H}{U_H^2} (\cos \phi - j \sin \phi) = G_H - jB_H. \quad (2.56)$$

При постоянной величине заданного сопротивления или проводимости моделирование с помощью выражений (2.55) и (2.56), дает характеристики:

$$P(U) = \frac{S_H^2}{U_H^2} R, \quad Q(U) = \frac{S_H^2}{U_H^2} X, \quad P(U) = U^2 G, \quad Q(U) = U^2 B. \quad (2.57)$$

Моделирование постоянным сопротивлением дает обратную квадратичную зависимость от напряжения, а постоянной проводимостью – зависимость пропорционально квадрату напряжения. Вторая модель хорошо согласуется с моделью статической характеристики реактивной мощности нагрузки (2.52), поэтому для реактивной мощности вполне приемлема. Для активной мощности можно, например, воспользоваться линейной моделью, тогда будем иметь:

$$P(U) = U U_{ном} G, \quad Q(U) = U^2 B, \quad (2.58)$$

где G_H и B_H вычислены при номинальном напряжении нагрузки.

На рис. 2.16 представлены действительные статические характеристики нагрузки – сплошные линии – и характеристики, полученные по моделям (2.58) – пунктирные линии.

Иногда в качестве данных по нагрузке бывают известны измеренные токи нагрузки. Принимая какое либо значение коэффициента мощности нагрузки, ее можно моделировать постоянными значениями токов I_H :

$$P_H(U_H) \approx \sqrt{3} U_H I_H \cos \phi; \quad (2.59)$$

$$Q_H(U_H) \approx \sqrt{3} U_H I_H \sin \phi,$$

что дает линейные статические характеристики как активной, так и реактивной мощности. Такие модели нагрузки используются в низковольтных сетях и сетях среднего напряжения.

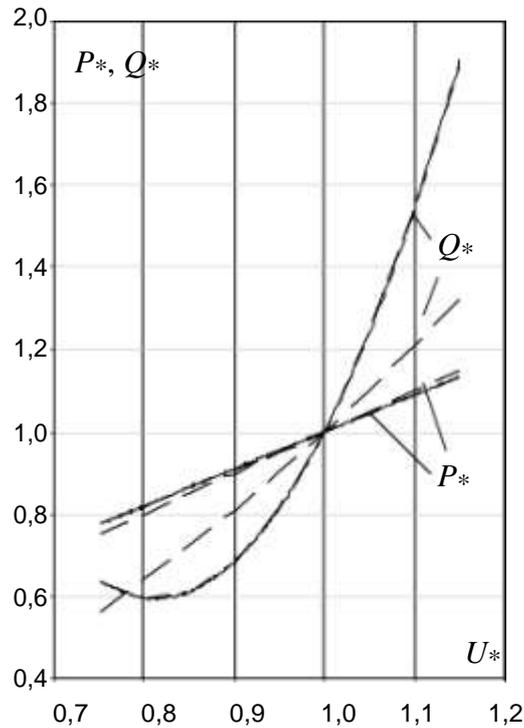


Рис. 2.16. Действительные статические характеристики нагрузки и зависимости мощностей от напряжения при моделировании нагрузки схемой замещения

Все математические модели электрических нагрузок, рассмотренные выше, сведены в табл. 2.6.

Таблица 2.6.

Математические модели электрических нагрузок

Математические модели	Мощность нагрузки	Примечания
Статические характеристики нагрузки по напряжению	$P_H = \phi(U_H), \quad Q_H = \psi(U_H)$	Получаются по данным эксперимента или подбором типовых характеристик
Постоянные значения мощности нагрузки	$P_H = \text{const}, \quad Q_H = \text{const}$	
Схема замещения: $\underline{Y}_H = G_H - jB_H = \text{const}$	$P_H = U_H^2 G_H$ или $P_H = U_H U_{\text{ном}} G_H,$ $Q_H = U_H^2 B_H$	$\underline{Y}_H = \frac{S_{H0}}{U_{\text{ном}}^2} (\cos \phi - j \sin \phi)$

Схема замещения: $\underline{Z}_H = R_H + jX_H = \text{const}$	$P(U_n) = \frac{S_{H0}^2}{U_n^2} R$, $Q(U_n) = \frac{S_{H0}^2}{U_n^2} X$	$\underline{Z}_H = \frac{U_{H0}^2}{S_{H0}} (\cos \phi + j \sin \phi)$
Постоянное значение тока нагрузки: $I_H = \text{const} (\phi = \text{const})$	$P_n = \sqrt{3} U_n I_n \cos \phi$, $Q_n = \sqrt{3} U_n I_n \sin \phi$	$I_H = \frac{S_{H0}}{\sqrt{3} U_{H0}}$

Примечание. Во всех формулах S_{H0} – полная мощность нагрузки, которая может быть принята равной номинальной или максимальной мощности, а также мощности некоторого исходного или начального режима работы электроприемника или потребителя.

Пример.

Найти коэффициенты статической характеристики нагрузки по опытным данным для активной и реактивной мощности и определить их регулирующие эффекты.

Используем линейную модель для активной мощности и параболу для реактивной мощности. Построение характеристик выполним в Mathcad.

Все величины приведены в относительных единицах.

Исходные данные (результаты эксперимента):

	0.82	0.82	0.61			
	0.86	0.86	0.69			
	0.91	0.93	0.79			
	0.95	0.96	0.90			
D :=	1	1	1	U := D	P := D	Q := D
	1.05	1.04	1.13			
	1.09	1.09	1.27			
	1.14	1.13	1.41			

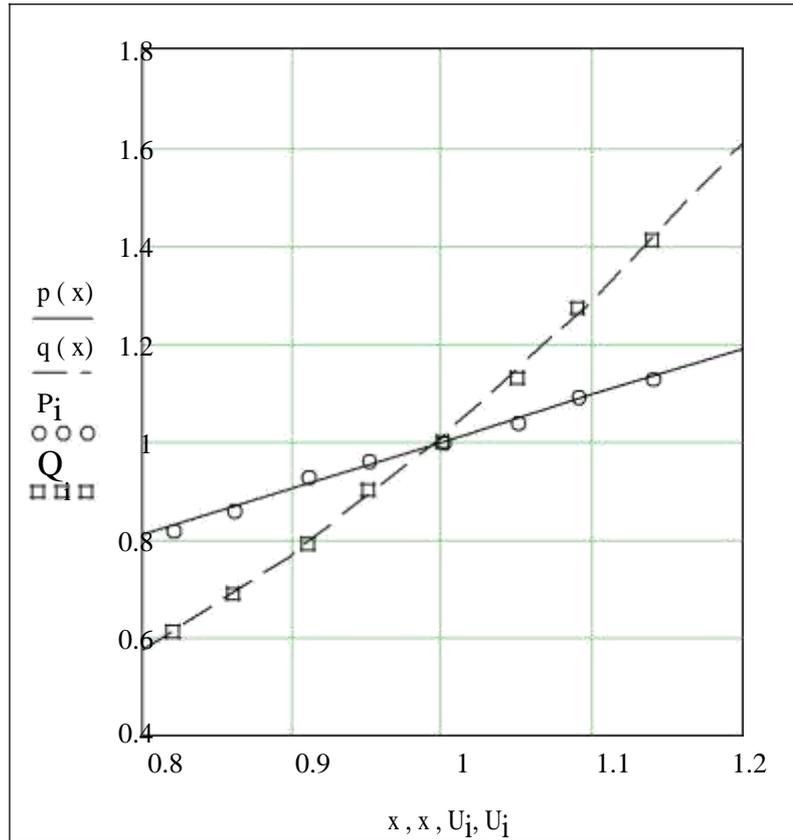
Коэффициенты функции полиномиальной регрессии:

					3
					3
					2
vsp := regress(U , P , 1)	vsp =	1	vsq := regress(U , Q , 2)	vsq =	0.539
		0.045			-1.643
		0.955			2.112

Определение функций статических характеристик и аргументов:

$p(x) := \text{interp}(vsp, U, P, x)$	$x := 0.8, 0.9.. 1.2$
$q(x) := \text{interp}(vsq, U, Q, x)$	$i := 0.. 7$

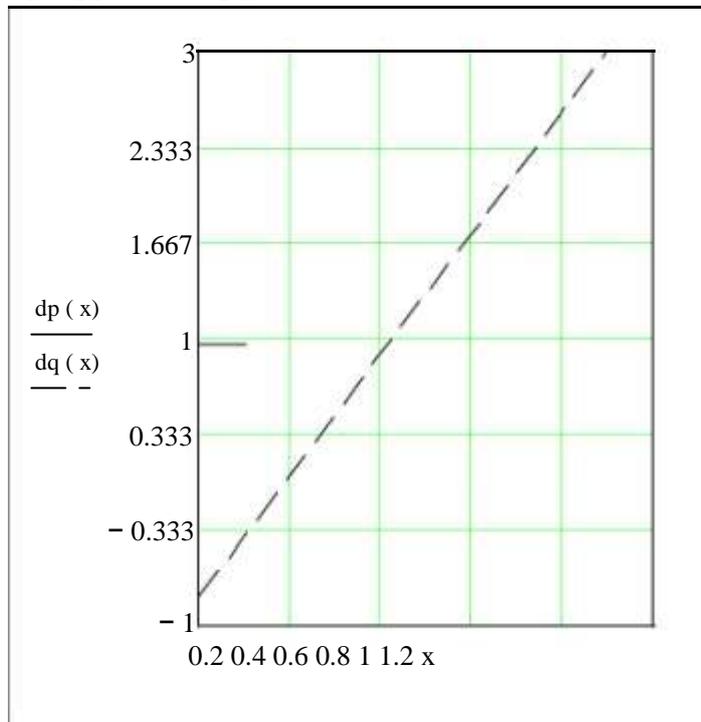
Графики статических характеристик (на графике отдельными маркерами нанесены экспериментальные данные):



Регулирующие эффекты:

$$\frac{dp(x)}{dx} := \frac{d}{dx} p(x) \quad dp(1) = 0.955 \qquad \frac{dq(x)}{dx} := \frac{d}{dx} q(x) \quad dq(1) = 2.582$$

Изменение регулирующих эффектов:



Регулирующий эффект активной мощности не меняется, так как модель статической характеристики была принята линейной.