Лекция 5.

Основные уравнения и граничные условия, описывающие электростатическое поле.

Расчеты установившихся режимов необходимы при выборе конфигурации схемы электрической системы и параметров ее элементов, анализе устойчивости и оценке токов коротких замыканий, определении экономичных режимов ее работы.

Для выполнения расчета любого установившегося режима необходима информация о схеме и параметрах сети электрической системы, о потребителях (нагрузках) и источниках электроэнергии (электростанциях).

Уравнения установившегося режима электрической системы, связывающие мощности, задающие токи и напряжения узлов, при отсутствии ЭДС в ветвях имеют вид

$$\dot{S}_у = 3\dot{U}_д \hat{J}; \quad (3.1)$$

$$Y_у\left(\dot{U} - \dot{U}_б\right) = \dot{J}, \quad (3.2)$$

где $\dot{S}_у$ - столбец мощностей источников или потребителей, присоединенных к узлам схемы замещения системы;

$\dot{U}_д$ - диагональная матрица напряжений в узлах схемы замещения;

$\dot{U}$ - столбец напряжений в узлах схемы;

$\dot{U}_б$ - столбец, каждый элемент которого равен напряжению в балансирующем узле;

$\dot{J}$ - столбец задающих токов в узлах (символом $\wedge$ отмечаются комплексно-сопряженные величины).

Система нелинейных (3.1) и линейных (3.2) уравнений при заданных мощностях узлов в общем случае может быть решена только итерационным методом. При этом возможны два подхода к решению:

- поочередное решение уравнений (3.1) и (3.2) в общем итерационном цикле;

- объединение этих уравнений в единую систему нелинейных уравнений и последующее ее решение.

В первом случае решение производится по следующей схеме:

1) задаются начальными приближениями напряжений узлов;

2) по значениям напряжений и заданным значениям мощностей (3.1) определяются задающие токи;

3) решается система линейных уравнений (3.2) при известных значениях задающих токов относительно напряжений в узлах;

4) на основе полученных значений напряжений в узлах выполняется следующий шаг итерационного процесса начиная с п.2.

Условием окончания итерационного процесса является близкое совпадение напряжений на двух последующих итерациях, а также совпадение вычисленных по (3.1) значений мощностей узлов с заданными.

Во втором случае уравнения (3.1) и (3.2) объединяются путем подстановки задающих токов либо из (3.2) в (3.1), что приводит к системе вида

$$3\hat{U}_{\text{д}} Y_y\left(\dot{U}-\dot{U}_{\text{б}}\right)=\hat{S}_{\text{у}}, \qquad (3.3)$$

либо из (3.1) в (3.2)

$$Y_y\left(\dot{U}-\dot{U}_{\text{б}}\right)=\frac{1}{3}\hat{U}_{\text{д}}^{-1}\hat{S}_{\text{у}}. \qquad (3.4)$$

Как при первом, так и при втором подходе на каждом шаге итерационного процесса *решается система линейных алгебраических уравнений* либо непосредственно в виде узловых уравнений (3.2), либо в виде линеаризованных уравнений (3.3) и (3.4).

Методы решения систем линейных алгебраических уравнений делятся на две группы: *прямые* и *итерационные*. К *прямым* относятся методы, позволяющие получить решение в результате конечного числа арифметических операций, зависящего от вычислительной схемы, а также от порядка и структуры матрицы коэффициентов системы уравнений. Методы этой группы называются также *точными*, т.к. если исходные данные заданы точно и вычисления точны, то решение также получается точным.

К *итерационным* относятся методы, с помощью которых решение системы линейных алгебраических уравнений получается как предел последовательных приближений, вычисляемых посредством единообразных операций. Эти методы называются *приближенными,* т.к. вычисления ведутся без округлений, позволяют получить решение системы уравнений лишь с заданной точностью.

В основе всех прямых методов решения линейных алгебраических уравнений установившегося режима электрической системы (УУР) лежит метод последовательного исключения неизвестных, называемый *методом Гаусса.* К числу наиболее характерных вычислительных схем этого метода относятся алгоритмы с *обратным ходом* и *без обратного хода*.

Алгоритм метода Гаусса с обратным ходом. Решение системы n линейных уравнений вида

$$Ax = b$$

по этому алгоритм состоит из двух этапов. *На первом этапе* (прямой ход) исходная система за n однотипных шагов преобразуется таким образом, что матрица коэффициентов преобразованной системы становится верхней треугольной, т.е. все элементы, расположенные ниже ее главной диагонали, равны нулю. *На втором этапе* (обратный ход) последовательно определяются значения неизвестных от x_n до x_1.

Последовательность операций, выполняемых при прямом ходе:

На *первом шаге* исходной системе уравнений

$$\begin{aligned}
&a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1;\\
&a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2;\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n
\end{aligned}$$

новое уравнение делится на a_{11}. Далее x_1 исключается из всех последующих уравнений $(i=2,\ldots,n)$ путем умножения первого уравнения каждый раз на a_{i1} и вычитается из i-го уравнения. В результате этих операций получается система уравнений с матрицей коэффициентов $A^{(1)}$:

$$x_1 + a_{12}^{(1)}x_2 + \ldots + a_{1n}^{(1)}x_n = b_1^{(1)};$$

$$0 + a_{22}^{(1)}x_2 + ... + a_{2n}^{(1)}x_n = b_2^{(1)};$$

………………………..

$$0 + a_{n2}^{(1)}x_2 + ... + a_{nn}^{(1)}x_n = b_n^{(1)},$$

где

$$a_{1j}^{(1)} = a_{1j} / a_{11}; b_1^{(1)} = b_1 / a_{11};$$
$$a_{ij}^{(1)} = a_{ij} - a_{i1}a_{1j}^{(1)}; b_i^{(1)} = b_i - a_{i1}b_1^{(1)},$$
$$i, j = 2, ..., n.$$

Выполнение операций первого шага требует, чтобы элемент a_{11}, называемый *ведущим* был отличен от нуля.

Второй шаг состоит в исключении x_2 из уравнений $3, \ldots\ldots, n$, полученной на первом шаге системы путем выполнения аналогичных операций при использовании в качестве ведущего элемента $a_{22}^{(1)}$. В результате система приводится к виду $A^{(2)}x = b^{(2)}$.

Третий и последующий шаги выполняются аналогично. Формулы для расчета коэффициентов системы уравнений на произвольном (k-м) шаге запишутся как

$$a_{kj}^{(k)} = a_{kj}^{(k-1)} / a_{kk}^{(k-1)}, b_k^{(k)} = b_k^{(k-1)} / a_{kk}^{(k-1)},$$

$$a_{kij}^{(k)} = a_{ij}^{(k-1)} - a_{ik}^{(k-1)}a_{kj}^{(k)}, b_i^{(k)} = b_i^{(k-1)} - a_{ik}^{(k-1)}b_k^{(k)}, \quad (3.5)$$

$$i, j = k + 1, ..., n.$$

На последнем шаге ($k=n$) второе из выражений (3.5) определяет $b_n^{(n)}$. Т.о., при прямом ходе ведущими элементами последовательно выступают $a_{11}, a_{22}^{(1)}, a_{33}^{(2)}, ..., a_{nn}^{(n-1)}$ и их отличие от нуля является условием осуществимости процесса вычислений.

В общем виде формулы для обратного хода записываются

$$x_i = b_i^{(i)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}^{(i)} x_j, i = n - 1, ..., 1. \quad (3.6)$$

Итерационные методы решения систем линейных алгебраических уравнений позволяют получить значения искомых неизвестных в результате многократного выполнения единообразных шагов вычислений, называемых последовательными приближениями или итерациями. Рассмотрим два итерационных метода решения систем линейных алгебраических уравнений (метод простой итерации и метод Зейделя). Эти методы допускают простое обобщение на решение нелинейных уравнений установившегося режима, связывающих мощности и напряжения в узлах электрической системы.

Метод простой итерации. Исходная система линейных алгебраических уравнений

$$
\begin{aligned}
&a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1;\\
&a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2;\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n
\end{aligned}
$$

в предположении, что $a_{ji} \neq 0, i = 1,\ldots,n,$ приводится к виду:

$$
\left.
\begin{aligned}
&x_1 = \frac{1}{a_{11}}\left(b_1 - a_{12}x_2 - \ldots - a_{1n}x_n\right);\\
&x_2 = \frac{1}{a_{22}}\left(b_2 - a_{21}x_1 - a_{23}x_3 - a_{2n}x_n\right);\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&x_n = \frac{1}{a_{nn}}\left(b_n - a_{n1}x_1 - a_{n2}x_2 - \ldots - a_{n(n-1)}x_{n-1}\right)
\end{aligned}
\right\} \quad (3.7)
$$

Система уравнений (3.7) согласно методу простой итерации решается следующим образом:

1) задаются начальными (нулевыми) приближениями неизвестных $x_i^{(0)}, i = 1,\ldots,n;$

2) значения x_i^0 подставляются в правые части уравнений (3.7) и тем самым определяются следующие приближения неизвестных $x_i^{(1)}, i = 1,\ldots,n;$

3) подстановкой полученных значений $x_i^{(1)}$ находится следующее приближение и т.д.

Таким образом, на *k-м* шаге итерационного процесса система (3.7) запишется как

$$
\left.
\begin{aligned}
x_1^{(k)} &= \frac{1}{a_{11}}\left(b_1 - a_{12}x_2^{(k-1)} - \ldots - a_{1n}x_n^{(k-1)}\right),\\
x_2^{(k)} &= \frac{1}{a_{22}}\left(b_2 - a_{21}x_1^{(k-1)} - a_{23}x_3^{(k-1)} - a_{2n}x_n^{(k-1)}\right),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
x_n^{(k)} &= \frac{1}{a_{nn}}\left(b_n - a_{n1}x_1^{(k-1)} - a_{n2}x_2^{(k-1)} - \ldots - a_{n(n-1)}x_{n-1}^{(k-1)}\right)
\end{aligned}
\right\} \quad (3.8)
$$

Итерационный процесс продолжается до тех пор, пока значения x_i, полученные на двух смежных итерациях, не будут отличаться на величину, меньшую заданной погрешности решения ε, т.е. до выполнения условия

$$\left|x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)}\right| \langle \varepsilon, i = 1,\ldots,n. \quad (3.9)$$

Для выполнения условия (3.9) при любой заданной точности решения, т.е. при любом сколь малом значении ε, необходимо, чтобы

$$\lim_{k\to\infty} x_i^{(k)} = x_i^{*}, i = 1,\ldots\ldots,n, \quad (3.10)$$

где x_i^{*} - точные решения исходной системы уравнений.

При выполнении (3.10) для произвольного начального приближения $x_i^{(0)}, i = 1,\ldots,n$ итерационный процесс называется *сходящимся*. В противном случае итерационный процесс не приводит к решению и называется *расходящимся*.

Необходимые и достаточные условия сходимости итерационного процесса по методу простой итерации (3.13), так и только достаточные условия (3.14а) и (3.14б) определяются соотношением элементов матрицы коэффициентов ***A*** и не зависят ни от значений элементов столбца правых частей ***b***, ни от начального приближения $\boldsymbol{x}^{(0)}$**.**

Метод Зейделя. Этот метод, так же как и метод простой итерации, базируется на использовании уравнений, приведенных к виду (3.7). В отличие от метода простой итерации для вычисления *i-й* переменной на каждом *k-м* шаге итерационного процесса используются значения переменных, вычисленные как на предыдущем *(k-1)-м* шаге, так и на данном. При этом на *k-м* шаге итерационного процесса система (3.7) имеет вид:

$$
\left.
\begin{aligned}
x_1^{(k)} &= \frac{1}{a_{11}}\left(b_1 - a_{12}x_2^{(k-1)} - \ldots - a_{1n}x_n^{(k-1)}\right),\\
x_2^{(k)} &= \frac{1}{a_{22}}\left(b_2 - a_{21}x_1^{(k)} - a_{23}x_3^{(k-1)} - a_{2n}x_n^{(k-1)}\right),\\
x_3^{(k)} &= \frac{1}{a_{33}}\left(b_3 - a_{31}x_1^{(k)} - a_{32}x_2^{(k)} - a_{34}x_4^{(k-1)} - \ldots - a_{3n}x_n^{(k-1)}\right),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
x_{n-1}^{(k)} &= \frac{1}{a_{(n-1)(n-1)}}\left(b_{n-1} - a_{(n-1)1}x_1^{(k)} - \ldots - a_{(n-1)(n-2)}x_{n-2}^{(k)} - a_{(n-1)n}x_n^{(k-1)}\right),\\
x_n^{(k)} &= \frac{1}{a_{nn}}\left(b_n - a_{n1}x_1^{(k)} - \ldots - a_{n(n-1)}x_{n-1}^{(k)}\right)
\end{aligned}
\right\} \quad (3.16)
$$

Для выяснения условий, определяющих сходимость итерационного процесса по методу Зейделя, как и ранее, представим (3.7) в матричной форме записи:

$$x = B + C_x,$$

где ***B*** – столбец; ***C*** – квадратная матрица с нулевыми диагональными элементами.

Представим ***C*** в виде суммы верхней ($\boldsymbol{C_в}$) и нижней ($\boldsymbol{C_н}$) треугольных матриц, получим:

$$x = B + C_B x + C_H x.$$

В соответствии с этим представим итерационный процесс (3.16) в матричной форме:

$$x^{(k)} = B + C_B x^{(k-1)} - C_H x,$$

или $x^{(k)} = B' + C' x^{(k-1)},$ (3.17)

где $B' = (1 - C_H)^{-1} B; C' = (1 - C_H)^{-1} C_B.$

Выражение (3.17) аналогично выражению (3.11), полученному для метода простой итерации. Следовательно, для сходимости итерационного процесса по методу Зейделя, необходимо и достаточно, чтобы собственные значения матрицы $\boldsymbol{C'}$ по абсолютной величине были меньше единицы. Поскольку матрицы ***C*** и $\boldsymbol{C'}$ по-разному выражаются через компоненты матрицы ***A***, то условия сходимости метода Зейделя и метода простой итерации в общем случае различны, т.е. существуют такие матрицы ***A***, для которых итерационный процесс по методу Зейделя сходится, а по методу простой итерации не сходится, и наоборот.

Достаточные условия сходимости метода простой итерации являются достаточными и для метода Зейделя. Если эти условия выполняются, то процесс по методу Зейделя сходится.

Известно, что при *положительно-определенной матрице* ***A*** итерационный процесс по методу Зейделя всегда сходится. Следовательно, если матрица ***A*** – положительно-определенная, то сходимость гарантируется; если нет, то исходную систему можно привести к эквивалентной с положительно-определенной матрицей коэффициентов путем умножения слева на транспонированную матрицу ***A***, т.е. путем перехода от системы ***Ax=b*** к системе $A_t A x = A_t b$ или

$$A' x = b'$$

где $A' = A_t A; b' = A_t b.$

Если исходная система имеет решение, т.е. если ***A*** – неособенная, то матрица $\boldsymbol{A'}$ - положительно-определенная и итерационный процесс по методу Зейделя сходится к решению.