

## Практическое занятие № 21, 22

### Кривые индивидуального роста. Типы роста популяций

(Продолжительность практического занятия 4 часа)

**Цель практического занятия:** знакомство и анализ кривых индивидуального роста особи.

#### Рабочее задание:

1. Законспектировать теоретическую часть практического занятия;
2. Выполните задание по тексту практического занятия;
3. Освоить метод Державина, Мерфи на практике;
4. Оформить отчет по практическому занятию.

#### Теоретическая часть

Под ростом понимается изменение суммарной биомассы все возрастных групп популяции во времени. В результате изучения роста популяции предполагается: 1) знание закона изменения численности возрастных групп; 2) установление возрастной динамики биомассы поколения; 4) изучение закономерностей роста всей популяции. Знание закономерностей роста популяции позволяет подойти к оценке ее продуктивности.

#### Индивидуальный рост

Выделяет два показателя, характеризующие рост особи:

1) линейный рост  $dL/dt$ , который описывает скорость изменения длины рыбы во времени;

2) весовой рст  $dW/dt$ , определяющий изменение массы тела рыбы.

В отличие от скорости роста популяции (биомассы) индивидуальная скорость роста, как правило, не может принимать отрицательных значений (в особенности для линейного).

Между линейным и весовым ростом рыб существует четкая зависимость, которая характеризуется соотношением массы тела особи с ее длиной:

$$W = w_0 L^{w_l}$$

Эмпирические коэффициенты  $w_0$  и  $w_l$  являются видоспецифическими и определяются формой тела рыбы. Так степенной коэффициент измеряется от 2,0 у рыб с прогонистым телом до 3,2 у высокотелых и округлых рыб. Кроме того коэффициенты зависят от ряда физиологических особенностей. Так,  $w_l$  у самок обычно больше, чем у самцов.

Для большинства видов рыб коэффициент  $w_l$  близок к трем, это позволяет во многих случаях использовать кубическую зависимость массы тела рыбы от ее длины:

$$W = w_0 L^3$$

При этом незначительная ошибка данного уравнения по сравнению с компенсируется удобством его использования. Кубическая зависимость длина – масса применяются в уравнении Бергаланфи и промысловой модели Бивертон – Холта.

Логарифмируя выражения, приходим к линейной зависимости между логарифмом массы и логарифмом длины особи.

$$\ln W = \ln w_0 + w_l \ln L.$$

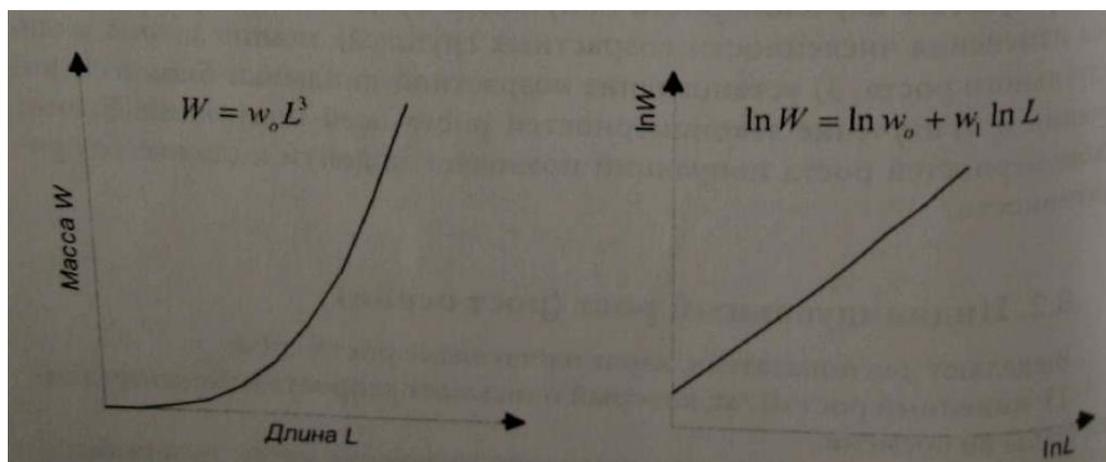


Рис.1. Зависимость длина-масса

Эмпирические коэффициенты легко находятся методом наименьших квадратов, и они известны для большинства видов рыб. Таким образом, зная длину, можно всегда определить соответствующую ей массу особи и наоборот. Это имеет важное значение при проведении полевых исследований. Измерение длины рыбы является значительно менее трудоемкой операцией, чем определение массы, поэтому в ряде случаев оказывается более выгодным проводить сбор данных по длине особей (массовые промеры, биологический анализ), а затем, зная параметры уравнения сделать пересчет на массу особей.

В целях математического описания собственно роста особи используя 5 видов функций: 1) линейная, 2) экспоненциальная, 3) степенная, 4) уравнение Форда - Уолфорда и 5) уравнение Берталанфи.

### Линейная функция

В основе линейной функции лежит допущение том, что скорость роста равна некоторой константе  $K$ :  $\frac{dL}{dt} = K_L$ ;

$$\frac{dW}{dt} = K_W.$$

Например, за один год, рыба прирастает на величину  $K = 5$  см. В этом случае закон индивидуального роста может быть описан простыми линейными уравнениями

$$L_t = L_0 + K_L t$$

$$W_t = W_0 + K_W t$$

где  $L_0$  и  $W_0$  – длина и масса особи в нулевом возрасте.

### **Задание:**

Постройте график роста при условиях, приведенных в таблице 1. Подумайте, чему будет равен тангенс угла наклона?

Исходные данные для построения графика роста особи

Время	L (см)	W (г)
0	0	0
1	12	150
2	20	300
3	30	400

На практике данная функция пригодна для линейного роста, но, как правило, неприемлема для описания весового роста.

### Экспоненциальная функция

Экспоненциальный закон роста исходит из предположения том, что увеличение длины или массы рыбы происходит с некоторой постоянной скоростью  $G$ , например, прирост длины и массы составляет 10% в год;

$$\frac{dL}{dt} = G_L L;$$

$$\frac{dW}{dt} = G_w W;$$

Интегрируя данные уравнения, получаем значение длины и массы особи в любой момент времени  $t$ :

$$L_t = L_0 e^{G_L t};$$

$$W_t = W_0 e^{G_w t};$$

Функция не имеет предела и поэтому может описывать рост только на коротких промежутках времени. Например, в промысловой модели Рикера коэффициент  $G_w$  описывает скорость роста для каждой возрастной группы (можно описывать рост месяцам, неделям или даже сутками для молоди).

Удобство данной функции заключается в том, что по форме она сходна с уравнением Баранова, поэтому легко можно описать динамику биомассы

**Задание:**

Постройте график экспоненциального роста при условиях, что  $L_0 = 0$ ;  $L_1 = 3$ ; скорость роста составляет 10 % в год.

Степенная функция

Степенное уравнение роста (параболическое) предполагает, что в процессе увеличения размеров тела (длины или массы) скорость роста не остается константой, а изменяется:

$$\frac{dL}{dt} = (aL^{b'})L$$
$$\frac{dW}{dt} = (aW^{b'})W$$

Здесь скорость роста будет равна  $aL^{b'}$  и  $aW^{b'}$  соответственно для линейного и весового роста. Интегрируя данные уравнение, получаем:

$$L_t = at^b$$

$$W_t = at^b$$

В зависимости от значения коэффициента  $b$  степенное уравнение роста будет иметь различную графическую форму. Если  $b > 1$ , то кривая роста будет иметь выпуклую форму (скорость роста с возрастом), а если  $b < 1$  – вогнутую форму (скорость роста с возрастом уменьшается). Если коэффициент  $b = 1$ , то мы получаем линейную функцию роста. Для рыб, как правило, коэффициент  $b$  оказывается меньше единицы. Коэффициент  $a$  численно равен длине или массе особи в возрасте 1 год.

**Задание:**

Постройте график степенного роста при условиях, что 1)  $b = 0,5$ ; 2)  $b = 1,2$ ; 3)  $b = 1$ . Коэффициент  $a$  взять из таблицы 1.

**Контрольные вопросы:**

1. Как Вы понимаете термин «рост» особи?

2. Как Вы понимаете график линейного, экспоненциального и степенного роста особи? В чем их отличия?

3. В чем заключается смысл изучения роста особи и популяции в целом?

4. Существует ли взаимосвязь, а если да, то как она выражается, между линейным и весовым ростом рыб?

5. Какая зависимость между длиной и массой рыбы в уравнении Бергаланфи?