

1. УЧЕТ ПОГРЕШНОСТЕЙ ПРИ ВЫЧИСЛЕНИЯХ.

§1.1. Источники и классификация погрешностей.

При всевозможных расчетах, в том числе и на ЭВМ, всегда получается некоторое приближенное значение истинной величины. Отличие приближенного значения от истинного характеризует ошибку вычислений (погрешность). Ошибки появляются за счет:

1) неточностей в исходных данных. Данная погрешность является неустранимой, и возникает за счет округления ($\pi = 3.14$ при расчетах, а в реальности $\pi = 3.14159\dots$) или при использовании экспериментальных данных.

2) использования итерационных методов для получения результата, где теоретически можно получить точное решение, совершая бесконечное число шагов вычислений. Так как число шагов ограничено искусственно, то в вычисления вносится погрешность.

3) погрешностей самих методов.

Существует следующая классификация погрешностей.

1) Погрешности задачи – погрешности, возникающие при постановке математической задачи. Математические модели задачи редко точно отображают реальные явления. При изучении тех или иных явлений природы принимают некоторые условия, которые упрощают задачу, но влекут появление погрешностей.

2) Погрешность метода – это погрешность, возникающая при замене точной задачи на близкую по результатам приближенную задачу.

3) Остаточная погрешность – погрешность, связанная с наличием бесконечных процессов в математическом анализе.

4) Начальная погрешность – это погрешность, связанная с наличием в формулах числовых параметров, значения которых могут быть определены лишь приближенно.

5) Погрешность округления – это погрешность, связанная с системой счисления. Например, $\frac{1}{3} = 0.333 = 0.(3)$.

6) Погрешность действий – это погрешность, связанная с действиями над приближенными числами. При решении конкретной задачи те или иные погрешности иногда отсутствуют или влияние их ничтожно мало. Для полного анализа погрешностей следует учитывать все их виды.

В предлагаемом курсе будут рассматриваться погрешности действий и погрешности методов.

§1.2. Основные понятия и определения теории погрешностей.

Обозначим через A, B, C, \dots, U, \dots - точные числа, a, b, c, \dots, u, \dots - при-

ближенные значения.

Определение 1.1.

Приближенным числом a называется число, незначительно отличающееся от точного числа A и заменяющее число A в вычислениях.

Если $a > A$, то a называется приближенным числом с избытком.

Если $a < A$, то a - приближенное число с недостатком.

Определение 1.2.

Под *погрешностью (ошибкой)* Δa приближенного числа a понимается разность между соответствующим точным числом A и данным приближенным, т.е.

$$\Delta a = A - a.$$

Чтобы получить точное число A , нужно к приближенному числу a прибавить его ошибку Δa , т.е. $A = a + \Delta a$.

Точное число A можно рассматривать как приближенное число с погрешностью, равной нулю.

Если $a > A$, то $\Delta a < 0$.

Если $a < A$, то $\Delta a > 0$.

Во многих случаях знак ошибки неизвестен. Поэтому целесообразно пользоваться абсолютной погрешностью приближенного числа $|\Delta a| = \Delta$.

Определение 1.3.

Абсолютной погрешностью приближенного числа a называется абсолютная величина разности между a и A , т.е. $|A - a| = |\Delta a| = \Delta$.

Абсолютная погрешность не достаточна для характеристики точности измерения при вычислениях.

Определение 1.4.

Относительной погрешностью приближенного числа a называется отношение абсолютной погрешности этого числа к модулю соответствующего точного числа A ($A \neq 0$):

$$\delta = \frac{|\Delta a|}{|A|} = \frac{\Delta}{|A|}.$$

Следовательно, $\Delta = |A| \cdot \delta$.

Как правило, число A не известно, следовательно нельзя определить и абсолютную погрешность Δ . Поэтому вместо неизвестной абсолютной погрешности $|\Delta a|$ используют ее оценку сверху, так называемую предельную абсолютную погрешность.

Определение 1.5.

Предельной абсолютной погрешностью Δ_a называется такое число, не меньшее абсолютной погрешности этого числа, т.е. удовлетворяющее неравенству: $|A - a| \leq \Delta_a$.

Определение 1.6.

Предельной относительной погрешностью δ_a приближенного числа

a , называется всякое число, не меньше относительной погрешности этого числа $\delta \leq \delta_a$, т.е. $\delta = \frac{|\Delta a|}{|A|} \leq \delta_a$, следовательно, $|\Delta a| \leq |A| \cdot \delta_a$.

За предельную абсолютную погрешность числа a можно принять:

$$\Delta_a = |A| \delta_a.$$

§1.3. Значащая и верная цифра приближенной величины. Округление чисел.

Определение 1.7.

Значащей цифрой приближенного числа называется всякая цифра в его десятичном изображении, отличная от нуля, и нуль, если он находится между значащими цифрами или является представителем сохраненного десятичного разряда. Все остальные нули не являются значащими цифрами.

Определение 1.8 (первое определение верной цифры).

Верной цифрой приближенной величины называется такая цифра, если абсолютная погрешность не превосходит единицы разряда этой цифры. Например, $a = 53.1412$, $\Delta a = 0.003$, 53.14 - верные цифры.

Приближенные числа принято записывать так, чтобы они содержали только верные цифры. В технических таблицах допускается одна сомнительная цифра. Во всех математических таблицах содержатся только верные цифры, соответствующие второму более строгому определению верной цифры.

Определение 1.9 (второе определение верной цифры).

Если абсолютная погрешность приближенного числа a не превышает половины единицы разряда, выражаемого n -ой значащей цифрой (считая слева направо), то говорят, что n первых значащих цифр приближенного числа a являются верными.

Любое положительное число может быть представлено в виде

$$a = \alpha_m 10^m + \alpha_{m-1} 10^{m-1} + \alpha_{m-2} 10^{m-2} + \dots + \alpha_{m-n+1} 10^{m-n+1}, \alpha_m \neq 0.$$

Если $|\Delta a| = |A - a| \leq \frac{1}{2} 10^{m-n+1}$, то $\alpha_m, \alpha_{m-1}, \alpha_{m-2}, \dots, \alpha_{m-n+1}$ являются верными.

Пример 1.1. Например, $a = 53.1412$, $|\Delta a| = 0.003$, $\frac{0.1}{2} = 0.05 > 0.003$,

$\frac{0.01}{2} = 0.005 > 0.003$, $\frac{0.001}{2} = 0.0005 < 0.003$, 53.14 - верные цифры.

Пример 1.2. $b = 10.1318$, $|\Delta b| = 0.001$.

По первому определению: $b = 10.131$ - верные цифры.

По второму определению: $b = 10.13$ - верные цифры.

Пример 1.3. $A = 10$, $a = 9.995$.

$|\Delta a| = |A - a| = 0.005 \leq 0.5 \cdot 10^{-2}$, тогда a имеет 4 значащих цифры, но толь-

ко 3 из них – верные.

Округление чисел.

Чтобы округлить приближенное число a до n значащих цифр, отбрасывают все цифры, стоящие справа от n -ой значащей цифры, или, если нужно для сохранения разрядов, заменяют их нулями. При этом, если первая из отброшенных цифр:

- 1) меньше 5, то оставшиеся десятичные знаки сохраняются без изменения;
- 2) больше 5, то к последней оставшейся цифре прибавляется единица;
- 3) равна 5 и среди остальных отброшенных есть неравные нулю, то последняя оставшаяся цифра увеличивается на единицу;
- 4) равна 5 и все остальные отброшенные цифры равны нулю, то последняя оставшаяся цифра остается неизменной, если она четная, и увеличивается на единицу, если она нечетная (правило четной цифры).

Пример 1.4: округлить до n значащих цифр число:

а) $\pi = 3,14159266535$.

$n = 3, a = 3.14$;

$n = 4, a = 3.142$;

$n = 6, a = 3.14159$.

б) $A = 1.2500$.

$n = 2, a = 1.2$.

с) $A = 2.3500$.

$n = 2, a = 2.4$.

Теорема 1.1 (устанавливает связь относительной погрешности приближенного числа с количеством верных знаков этого числа).

Если положительное приближенное число a имеет n верных десятичных знаков (в смысле определения 8), то относительная погрешность δ этого числа не превосходит одной десятой в степени $n-1$, деленной на первую значащую цифру числа a , т.е. $\delta \leq \frac{1}{\alpha_m} \frac{1}{10^{n-1}}$, где α_m – первая значащая цифра числа a .

Доказательство.

Пусть a является приближенным числом точного числа A . Для определенности будем считать $A > 0, a > 0$. Любое положительное число может быть представлено в виде:

$$0 < a = \alpha_m 10^m + \alpha_{m-1} 10^{m-1} + \dots + \alpha_{m-n+1} 10^{m-n+1} + \dots, (\alpha_m \geq 1).$$

Так как a имеет n верных знаков, то по определению $|\Delta a| = |A - a| \leq \frac{1}{2} 10^{m-n+1}$ или $a - \frac{1}{2} 10^{m-n+1} \leq A \leq a + \frac{1}{2} 10^{m-n+1}$. Следовательно,

$A \geq a - \frac{1}{2} 10^{m-n+1}$. Так как $a > \alpha_m 10^m$, то

$$A \geq \alpha_m 10^m - \frac{1}{2} 10^{m-n+1} = \frac{1}{2} 10^m \left(2\alpha_m - \frac{1}{10^{n-1}} \right) = \frac{1}{2} 10^m (2\alpha_m - 10^{1-n}).$$

Правая часть достигает наименьшего значения при $n = 1$. Следовательно, $A \geq \frac{1}{2} 10^m (2\alpha_m - 1)$. Так как $2\alpha_m - 1 = \alpha_m + (\alpha_m - 1) \geq \alpha_m$, в силу последнего соотношения $A \geq \frac{1}{2} 10^m \alpha_m$. Тогда для относительной погрешности справедливо соотношение:

$$\delta = \frac{|\Delta a|}{|A|} \leq \frac{\frac{1}{2} 10^{m-n+1}}{\frac{1}{2} 10^m \alpha_m} = \frac{10^{-n+1}}{\alpha_m},$$

т.е. $\delta \leq \frac{1}{\alpha_m} \left(\frac{1}{10} \right)^{n-1}$. Что и требовалось доказать.

Следствие.

За предельную относительную погрешность числа a можно принять:

$$\delta_a = \frac{1}{\alpha_m} \left(\frac{1}{10} \right)^{n-1},$$

где α_m - первая значащая цифра числа a .

§1.4. Погрешность алгебраической суммы.

Теорема 1.2.

Абсолютная погрешность алгебраической суммы нескольких приближенных чисел не превышает суммы абсолютных погрешностей этих чисел.

Доказательство.

Пусть a_1, a_2, \dots, a_n - приближенные числа. Рассмотрим их алгебраическую сумму

$$u = \pm a_1 \pm a_2 \pm \dots \pm a_n.$$

Очевидно, что

$$\Delta = \pm \Delta a_1 \pm \Delta a_2 \pm \dots \pm \Delta a_n$$

Следовательно

$$\Delta u = |\Delta| \leq |\Delta a_1| + |\Delta a_2| + \dots + |\Delta a_n| = \Delta_1 + \Delta_2 + \dots + \Delta_n.$$

Следствие.

За предельную абсолютную погрешность алгебраической суммы можно принять сумму предельных абсолютных погрешностей слагаемых:

$$\Delta_u = \Delta_{a_1} + \Delta_{a_2} + \dots + \Delta_{a_n}.$$

Правило сложения приближенных чисел.

Чтобы сложить числа различной абсолютной точности, следует:

1. выделить числа, десятичная запись которых обрывается раньше других, и оставить их без изменения;
2. остальные числа округлить по образцу выделенных, сохраняя один или два запасных десятичных знака;
3. произвести сложение чисел, учитывая все сохраненные знаки;
4. полученный результат округлить на один знак.

Пример 1.5.

$$\begin{aligned}a_1 &= 0.000354, \\ a_2 &= 0.0214, \\ a_3 &= 0.0849, \\ a_4 &= 9.27, \\ a_5 &= 11.75, \\ a_6 &= 235.2, \\ a_7 &= 345.4, \\ a_8 &= 0.1834, \\ a_9 &= 0.348.\end{aligned}$$

Числа наименьшей точности: a_6, a_7 , абсолютная погрешность которых может достигать 0.1. Округлим остальные числа до 0.01, получим:
 $u = 0.35 + 0.18 + 11.75 + 9.27 + 0.08 + 0.02 + 0.00 + 235.2 + 345.4 = 602.25 \approx 602.2$ (по правилу четной цифры).

Подсчитаем погрешность:

1) Сумма предельных погрешностей исходных данных:
 $\Delta_1 = 10^{-6} + 10^{-4} + 10^{-4} + 10^{-2} + 10^{-2} + 10^{-1} + 10^{-1} + 10^{-4} + 10^{-3} = 0.221301 < 0.222;$

2) Абсолютные величины суммы ошибок (с учетом знаков)
 $\Delta_2 = |0.000354 + 0.0014 + 0.0049 + 0.0034 - 0.002| = 0.008054 < 0.009;$

3) $\Delta_3 = 0.050$ - погрешность округления.
 $\Delta = \Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 \leq 0.222 + 0.009 + 0.050 = 0.281 < 0.3.$

Поэтому, в качестве абсолютной погрешности следует взять значение $|\Delta u| = 0.3$. Тогда искомая сумма $U = u \pm |\Delta u| = 602.2 \pm 0.3$.

Теорема 1.3.

Если слагаемые имеют один и тот же знак, то предельная относительная погрешность их суммы не превышает наибольшей из предельных относительных погрешностей слагаемых.

Доказательство.

Пусть a_1, a_2, \dots, a_n - приближенные числа, A_1, A_2, \dots, A_n - соответствующие точные числа, где $a_i > 0, A_i > 0, i = \overline{1, n}$.

Рассмотрим сумму приближенных $u = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ и точных чисел $U = A_1 + A_2 + \dots + A_n$. Тогда

$$\delta_u = \frac{\Delta u}{U} = \frac{\Delta_{a_1} + \Delta_{a_2} + \dots + \Delta_{a_n}}{A_1 + A_2 + \dots + A_n}.$$

Так как $\delta_{a_i} = \frac{\Delta_{a_i}}{A_i}$, то $\Delta_{a_i} = A_i \delta_{a_i}$.

$$\delta_u = \frac{A_1 \delta_{a_1} + A_2 \delta_{a_2} + \dots + A_n \delta_{a_n}}{A_1 + A_2 + \dots + A_n}.$$

Пусть $\bar{\delta} = \max(\delta_{a_1}, \delta_{a_2}, \dots, \delta_{a_n})$, тогда

$$\delta_u \leq \frac{\bar{\delta}(A_1 + A_2 + \dots + A_n)}{A_1 + A_2 + \dots + A_n} = \bar{\delta},$$

то есть $\delta_u \leq \max(\delta_{a_1}, \delta_{a_2}, \dots, \delta_{a_n})$, что и требовалось доказать.

§1.5. Погрешность произведения и частного.

Теорема 1.4.

Относительная погрешность произведения нескольких приближенных чисел, отличных от нуля, не превышает суммы относительных погрешностей этих чисел.

Доказательство:

Пусть a_1, a_2, \dots, a_n , – приближенные числа, причем $a_i > 0, i = \overline{1, n}$.

Рассмотрим произведение $u = a_1 a_2 \cdots a_n$.

$$\ln u = \ln a_1 + \ln a_2 + \dots + \ln a_n.$$

Так как $\Delta \ln x \approx d(\ln x) = \frac{\Delta x}{x}$, то

$$\frac{\Delta u}{u} = \frac{\Delta a_1}{a_1} + \frac{\Delta a_2}{a_2} + \dots + \frac{\Delta a_n}{a_n},$$

$$\left| \frac{\Delta u}{u} \right| \leq \left| \frac{\Delta a_1}{a_1} \right| + \left| \frac{\Delta a_2}{a_2} \right| + \dots + \left| \frac{\Delta a_n}{a_n} \right|.$$

Так как $A_i \approx a_i$ и $|\Delta a_i|$ малы по сравнению с a_i , то приближенно можно положить, что $\left| \frac{\Delta a_i}{a_i} \right| \approx \left| \frac{\Delta a_i}{A_i} \right| = \delta_i$ и $\left| \frac{\Delta u}{u} \right| \approx \left| \frac{\Delta u}{U} \right| = \delta$.

Тогда $\delta \leq \delta_1 + \delta_2 + \dots + \delta_n$, что и требовалось доказать.

Замечание. Соотношение $\delta \leq \delta_1 + \delta_2 + \dots + \delta_n$ остается верным, если сомножители $a_i, i = \overline{1, n}$ имеют различные знаки.

Следствие 1.

Предельная относительная погрешность произведения равна сумме предельных относительных погрешностей сомножителей, то есть

$$\delta_u = \delta_{a_1} + \delta_{a_2} + \dots + \delta_{a_n}.$$

Следствие 2.

При умножении приближенного числа a на точный множитель $k \neq 0$

предельная относительная погрешность не изменяется, а предельная абсолютная погрешность увеличивается в модуль k – раз.

Пусть $u = k \cdot a, k = \text{const}$. Тогда

$$\delta_u = \delta_a, \Delta_u = |k| \Delta_a.$$

Погрешность частного.

Теорема 1.5.

Относительная погрешность частного не превышает суммы относительных погрешностей делимого и делителя, т.е. $\delta \leq \delta_1 + \delta_2$.

Доказательство.

Пусть $u = \frac{x}{y}$, где x, y – приближенные числа, тогда $\ln u = \ln x - \ln y$,

$$\frac{\Delta u}{u} = \frac{\Delta x}{x} - \frac{\Delta y}{y}. \text{ Отсюда } \left| \frac{\Delta u}{u} \right| \leq \left| \frac{\Delta x}{x} \right| + \left| \frac{\Delta y}{y} \right|.$$

Следовательно, $\delta \leq \delta_1 + \delta_2$, где $\delta, \delta_1, \delta_2$ – относительные погрешности u, x, y соответственно.

Следствие.

Если $u = \frac{x}{y}$, то предельная относительная погрешность частного равна сумме предельных относительных погрешностей делимого и делителя $\delta_u = \delta_x + \delta_y$.

§1.6. Погрешность степени и корня.

Погрешность степени.

Теорема 1.6.

Предельная относительная погрешность k – той степени числа x в k раз больше предельной относительной погрешности самого этого числа.

Доказательство.

Пусть $u = x^k$, где k – натуральное число. Тогда $\ln u = k \ln x$,
 $\frac{\Delta u}{u} = k \frac{\Delta x}{x}$. Следовательно, $\left| \frac{\Delta u}{u} \right| = k \left| \frac{\Delta x}{x} \right|$, т.е. относительная погрешность k -й степени числа в k раз больше относительной погрешности самого числа. Тогда, в силу определения предельной относительной погрешности, получаем:

$$\delta_u = k \delta_x.$$

Погрешность корня.

Теорема 1.7.

Предельная относительная погрешность корня k -й степени числа x в k раз меньше предельной относительной погрешности самого числа x .

Доказательство.

Пусть $u = \sqrt[k]{x}$, где k – натуральное число. Тогда $\ln u = k \ln x$ и $\frac{\Delta u}{u} = \frac{1}{k} \frac{\Delta x}{x}$. Следовательно, $\left| \frac{\Delta u}{u} \right| = \frac{1}{k} \left| \frac{\Delta x}{x} \right|$, т.е. относительная погрешность корня k -й степени числа x в k раз меньше относительной погрешности самого числа x . Тогда, в силу определения предельной относительной погрешности, получим

$$\delta_u = \frac{1}{k} \delta_x.$$

§1.7. Погрешность функции.

Рассмотри частный случай функции одной переменной. Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и имеет на $[a, b]$ непрерывную первую производную. Выберем две точки на $[a, b]$: x , $x + \Delta x$ и вычислим разность $f(x + \Delta x) - f(x) = \Delta f = f'(\xi)(x + \Delta x - x) = f'(\xi)\Delta x$, где $x < \xi < x + \Delta x$, $\Delta x > 0$. Следовательно,

$$|\Delta f| = |f'(\xi)\Delta x| = |f'(\xi)| |\Delta x|.$$

Таким образом, абсолютная погрешность функции пропорциональна абсолютной погрешности аргумента с коэффициентом пропорциональности $|f'(\xi)|$.

Пример 1.8. Пусть задана функция $y = \sin x$ и известна $\Delta x > 0$. Тогда абсолютная погрешность $\Delta y = |\cos x| \Delta x$.

Пусть требуется определить относительную погрешность δ функции $y = f(x)$. По определению $\delta = \frac{\Delta y}{|y|}$. Так как $|dy| \approx \Delta y = |y'| \Delta x$, то $\Delta y = |f'(x)| \Delta x$ и $\delta_y = \frac{|f'(x)| \Delta x}{|f(x)|} = |(\ln f(x))'| \Delta x$. Таким образом, относительная погрешность функции пропорциональна абсолютной погрешности аргумента с коэффициентом пропорциональности $(\ln f(x))'$.

Обобщим сделанные выкладки на случай функции многих переменных.

Пусть $U = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ - дифференцируемая функция, $|\Delta x_i|$ - абсолютная погрешность аргумента $x_i, i = \overline{1, n}$, тогда

$$|\Delta U| = |f(x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2, \dots, x_n + \Delta x_n) - f(x_1, x_2, \dots, x_n)|.$$

Если Δx_i достаточно малы, то их произведениями, квадратами, кубами и т.д. можно пренебречь. Тогда

$$|\Delta U| \approx |df(x_1, \dots, x_n)| = \left| \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} \Delta x_i \right| \leq \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial f}{\partial x_i} \right| \cdot |\Delta x_i|.$$

Следовательно,

$$|\Delta U| \leq \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial f}{\partial x_i} \right| \cdot |\Delta x_i|. \quad (1.1)$$

Тогда

$$\Delta_U = \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial f}{\partial x_i} \right| \cdot \Delta_{x_i},$$

где Δ_U, Δ_{x_i} - предельные абсолютные погрешности. Обе части (1.1) поделим на $|U|$, получим

$$\delta = \frac{|\Delta U|}{|U|} \leq \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial f}{\partial x_i} \right| \cdot \frac{|\Delta x_i|}{|U|} = \sum_{i=1}^n \left| \frac{\frac{\partial U}{\partial x_i}}{U} \right| \cdot |\Delta x_i| = \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial \ln U}{\partial x_i} \right| \cdot |\Delta x_i|,$$

$$\delta \leq \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial \ln U}{\partial x_i} \right| \cdot |\Delta x_i|.$$

Окончательно получим

$$\delta_U = \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial \ln U}{\partial x_i} \right| \cdot \Delta_{x_i}.$$

§1.8. Обратная задача теории погрешностей.

Встречаются задачи, когда нужно определить абсолютные погрешности аргумента функции, чтобы абсолютная погрешность самой функции $U = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ не превышала заданной величины. При решении этих задач пользуются *принципом равных влияний*.

Предполагается, что частные дифференциалы $\frac{\partial f}{\partial x_i} \Delta_{x_i}$ одинаково влияют на образование предельной абсолютной погрешности Δ_U .

Так как $\Delta_U = \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial f}{\partial x_i} \right| \cdot \Delta_{x_i}$, то

$$\left| \frac{\partial U}{\partial x_1} \right| \Delta_{x_1} = \left| \frac{\partial U}{\partial x_2} \right| \Delta_{x_2} = \dots = \left| \frac{\partial U}{\partial x_n} \right| \Delta_{x_n} = \frac{\Delta_U}{n}$$

и тогда

$$\Delta_{x_i} = \frac{\Delta U}{n \left| \frac{\partial U}{\partial x_i} \right|}.$$

Замечание 1.

Если требуется получить результат с m верными знаками, то исходные данные при вычислениях должны содержать $(m+1)$ или $(m+2)$ знака. Зная теорию погрешностей можно решать две задачи:

1) с какой точностью должны быть заданы исходные данные, чтобы получить заданную точность результатов вычислений;

2) с какой точностью получен результат вычислений, если известны погрешности исходных данных.

Замечание 2.

Если в исходных данных есть ошибка, то в результате вычислений она распространится на все действия и накопится в результате погрешностей округлений и вычислений и в силу ограниченности разрядной сетки ЭВМ. Особенно эта ошибка распространяется, если используются табличные разности.

2. ИТЕРАЦИОННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ.

§2.1. Основные этапы решения нелинейных уравнений.

Определение 2.1.

Нелинейным уравнением называется уравнение вида

$$f(x) = 0, \quad (2.1)$$

где $f(x)$ - нелинейная функция вида:

– нелинейная алгебраическая функция (полином или многочлен)
 $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$;

– трансцендентная функция – тригонометрическая, обратная тригонометрическая, логарифмическая, показательная и гиперболическая функция;

– комбинирование этих функций, например $(x^2 + \sin x)$.

Определение 2.2.

Решением нелинейного уравнения (2.1) называется такое значение x^{**} , которое при подстановке в уравнение (2.1) обращает его в тождество.

На практике не всегда удается найти точное решение. В этом случае решение уравнения (2.1) находят с применением приближенных (численных) методов.

Определение 2.3.

Приближенным решением нелинейного уравнения (2.1) называется такое значение x^* , при подстановке которого в уравнение (2.1) последнее

будет выполняться с определенной степенью точности, т.е. $|f(x^*)| \leq \varepsilon$, где ε - малая положительная величина.

Нахождение приближенных решений и составляет основу численных методов и вычислительной математики.

Решение нелинейных уравнений распадается на два этапа: отделение корней уравнений и уточнение корней нелинейных уравнений.

На первом этапе необходимо исследовать уравнение и выяснить, имеются корни или нет. Если корни имеются, то необходимо определить их количество, и затем найти интервалы, в каждом из которых находится только один корень, т.е. отделить корни.

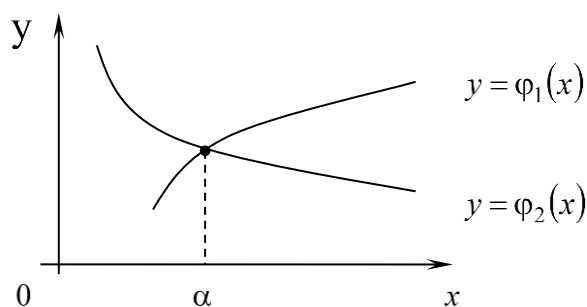


Рис.2.1

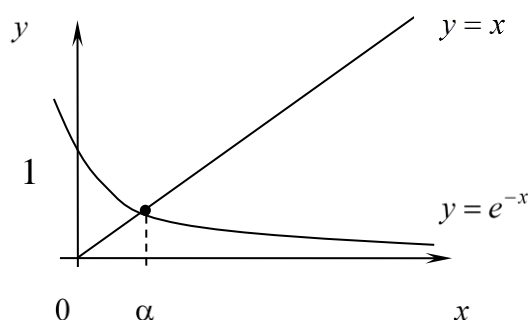


Рис.2.2.

нелинейного уравнения (2.1) сводится к поиску абсцисс точек пересечения двух графиков, которые и будут являться приближенными значениями корней уравнения (2.1).

Пример 2.1. Пусть дано нелинейное уравнение вида $x - e^{-x} = 0$. Для решения его графическим методом представим уравнение (2.1) в виде $\varphi_1(x) - \varphi_2(x) = 0$, где $\varphi_1(x) = x$; $\varphi_2(x) = e^{-x}$. Графики функций $y = x$; $y = e^{-x}$ представлены на Рис.2.2, из которого видно, что исходное уравнение имеет единственный корень α .

Первый способ отделения корней – графический. Данный метод позволяет определить количество корней на отрезке, но не единственность корня. Если $f(x)$ имеет простой аналитический вид, то, исходя из уравнения (2.1), можно построить график функции $y = f(x)$. Тогда точки пересечения графика функции с осью абсцисс будут являться приближенными значениями корней исходного нелинейного уравнения. Если $f(x)$ имеет сложный аналитический вид, то можно представить ее в виде разности двух более простых функций $f(x) = \varphi_1(x) - \varphi_2(x)$. Так как $f(x) = 0$, то выполняется равенство $\varphi_1(x) = \varphi_2(x)$. Построим два графика $y_1 = \varphi_1(x)$, $y_2 = \varphi_2(x)$ (Рис.2.1.). Тогда задача решения нели-

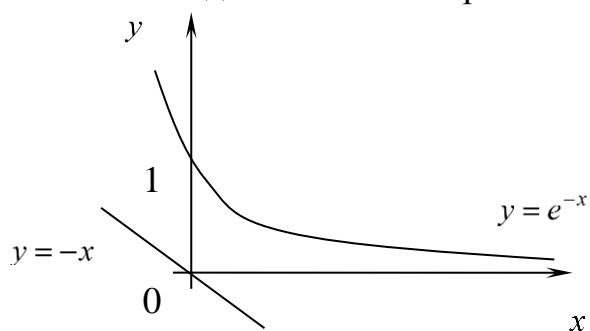


Рис.2.3

Пример 2.2. Пусть задано нелинейное уравнение вида $e^{-x} + x = 0$ или $-x = e^{-x}$. Построив два графика функций $y = -x$ и $y = e^{-x}$, нетрудно заметить, что исходное уравнение не имеет

корней (Рис.2.3).

Пример 2.3. Для нелинейного уравнения вида $x - \sin 2x = 0$ с помощью аналогичных преобразований получим, что исходное уравнение имеет несколько (три) корней (Рис.2.4).

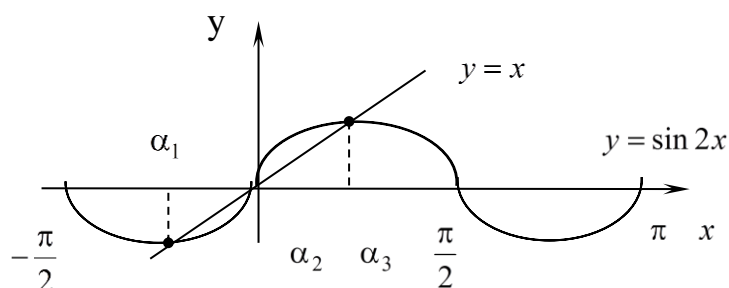


Рис.2.4

Второй способ отделения корней нелинейных уравнений – аналитический. Процесс отделения корней здесь основывается на следующих теоремах.

Теорема 2.1.

Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и на концах отрезка принимает значения разных знаков (т.е. $f(a)f(b) < 0$), то на $[a, b]$ содержится хотя бы один корень.

Теорема 2.2.

Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, выполняется условие вида $f(a)f(b) < 0$ и производная $f'(x)$ сохраняет знак на $[a, b]$, то на отрезке имеется единственный корень.

Теорема 2.3.

Если функция $f(x)$ является многочленом n -й степени и на концах отрезка $[a, b]$ принимает значения разных знаков, то на $[a, b]$ имеется нечетное количество корней. Если на концах отрезка $[a, b]$ функция не меняет знак, то уравнение (2.1) либо не имеет корней на $[a, b]$, либо имеет четное количество корней.

При аналитическом методе исследований необходимо выявить интервалы монотонности функции $f(x)$. Для этого необходимо вычислить критические точки $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$, т.е. точки, в которых первая производная $f'(\xi_i)$ равна нулю или не существует. Тогда вся числовая ось разбивается на интервалы монотонности (ξ_i, ξ_{i+1}) , на каждом из которых определяется знак производной $f'(x_i)$, где $x_i \in (\xi_i, \xi_{i+1})$. Затем выделяются те интервалы монотонности, на которых функция $f(x)$ меняет знак. На каждом из этих интервалов для поиска корня используются методы уточнения корней.

Наиболее распространенными методами уточнения корня на отрезке являются итерационные (приближенные) методы: метод половинного деления (метод дихотомии), метод простых итераций, метод Ньютона (метод касательных) и его модификация.

§2.2. Метод половинного деления.

Для уточнения корня нелинейного уравнения (2.1) на отрезке $[a, b]$, где $f(a)f(b) < 0$, а производная сохраняет знак, разделим отрезок $[a, b]$ пополам и исследуем знак функции в полученной точке c , где $c = \frac{a+b}{2}$. Из двух отрезков $[a, c]$ и $[c, b]$ выбираем тот, на котором функция меняет знак. Уменьшая новый отрезок в два раза, повторяем процесс и т.д. Получим последовательность отрезков $[a_1, b_1], [a_2, b_2], \dots, [a_n, b_n], \dots$, на концах которых выполняется неравенство

$$f(a_n)f(b_n) < 0 \quad (2.2)$$

и длины этих отрезков равны

$$b_n - a_n = \frac{1}{2^n}(b - a). \quad (2.3)$$

Последовательность $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ является монотонной неубывающей ограниченной последовательностью; а $b_1, b_2, \dots, b_n, \dots$ - монотонной невозрастающей ограниченной последовательностью. Следовательно, эти последовательности сходятся. Перейдем к пределу при $n \rightarrow \infty$ в левой и правой частях соотношения (2.3), получим

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n}(b - a) = 0.$$

Тогда $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \xi$. С другой стороны, из (2.2) следует, что $\lim_{n \rightarrow \infty} f(b_n)f(a_n) = (f(\xi))^2 \leq 0$. Последнее неравенство возможно только тогда, когда $f(\xi) = 0$. Следовательно, ξ является корнем исходного уравнения (2.1).

§2.3. Метод простых итераций.

Пусть известно, что нелинейное уравнение $f(x) = 0$, где $f(x)$ - непрерывная функция, имеет на отрезке $[a, b]$ единственный вещественный корень $\xi \in [a, b]$. Требуется найти этот корень с заданной точностью ε . Применяя тождественные преобразования, приведем уравнение (2.1) к виду

$$x = \varphi(x) \quad (2.4)$$

Выберем произвольно приближенное значение корня (начальное приближение) $x_0 \in [a, b]$ и вычислим первое приближение $\varphi(x_0) = x_1$. Найден-

ное значение x_1 подставим в правую часть соотношения (2.4) и вычислим $\varphi(x_1) = x_2$. Продолжая процесс вычислений дальше, получим числовую последовательность x_0, x_1, x_2, \dots . Если существует предел этой последовательности, то он и является приближенным значением корня уравнения (2.4). В самом деле, пусть $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \xi$. Тогда, переходя к пределу в равенстве (2.4) $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1}$ и учитывая непрерывность функции $\varphi(x_n)$ на отрезке $[a, b]$, получим $\varphi\left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1}$ или $\xi = \varphi(\xi)$. Следовательно, предел последовательности $\{x_n\}$ является корнем уравнения (2.4).

Таким образом, корень можно вычислить с заданной точностью по следующей итерационной формуле

$$x_{n+1} = \varphi(x_n), n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.5)$$

Геометрическая интерпретация метода простых итераций.

Геометрически способ итерации может быть пояснен следующим образом. Построим на плоскости $ХОУ$ графики функций $y = x$ и $y = \varphi(x)$. Действительный корень ξ уравнения (2.4) является абсциссой точки

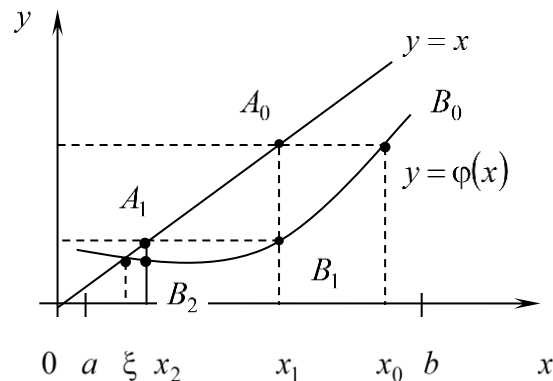


Рис.2.5

пересечения кривой $y = \varphi(x)$ с прямой $y = x$ (Рис.2.5).

Начиная процесс с некоторой точки $B_0(x_0, \varphi(x_0))$, строим ломаную линию $B_0A_0B_1A_1B_2\dots$ («лестница»), звенья которой попеременно параллельны оси OX и оси OY , вершины $B_0, B_1, B_2\dots$ лежат на кривой $y = \varphi(x)$, а вершины $A_0, A_1, A_2\dots$ - на прямой $y = x$. Общие абсциссы точек A_0 и B_1, A_1 и B_2, \dots , представляют собой соответственно последовательные приближения x_1, x_2, \dots корня ξ . В рассмотренном случае кривая $y = \varphi(x)$ пологая, $\varphi'(x) > 0$ и $|\varphi'(x)| < 1$.

Возможен другой вид ломаной $B_0A_0B_1A_1B_2\dots$ («спираль») (Рис.2.6). В этом случае последовательные приближения x_1, x_2, \dots стремятся к корню ξ то с одной, то с другой стороны. В этом случае $\varphi'(x) < 0$, но $|\varphi'(x)| < 1$.

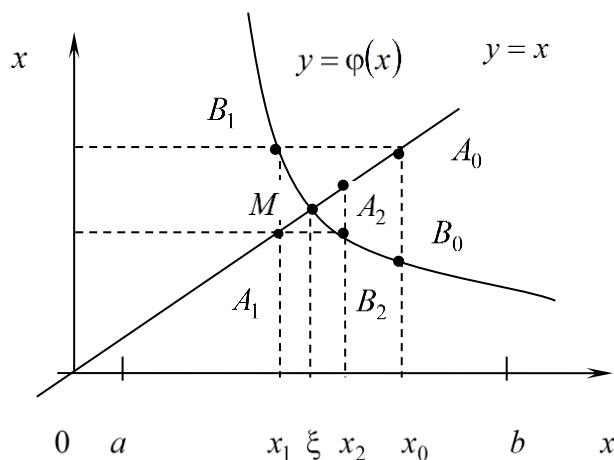


Рис.2.6

Однако, если рассмотреть случай, где $|\varphi'(x)| > 1$ (Рис.2.7), то процесс итераций расходится, т.е. последовательные приближения x_0, x_1, x_2, \dots все дальше удаляются от корня ξ и в какой то момент могут выйти за пределы отрезка $[a, b]$.

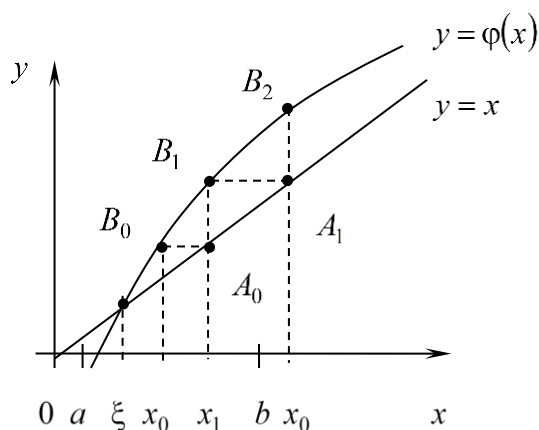


Рис.2.7

Поэтому для практического применения метода простых итераций нужно проверить достаточные условия сходимости итерационного процесса.

На основании этого можно сделать два вывода:

1. Если итерационный процесс сходится для любой начальной точки из отрезка, то он сходится на всем отрезке.
2. Если итерационный процесс расходится хотя бы для одной начальной точки из отрезка, то он расходится на всем отрезке.

Достаточное условие, при котором итерационный процесс (2.5) схо-

дится, определяет следующая теорема.

Теорема 2.4.

Пусть функция $\varphi(x)$ определена и дифференцируема на отрезке $[a, b]$, причем все ее значения $\varphi(x) \in [a, b]$ и выполняется условие

$$|\varphi'(x)| \leq q < 1, \text{ при } a < x < b, \quad (2.6)$$

тогда процесс итераций, определяемый формулой (2.5), сходится независимо от выбора начального приближения $x_0 \in [a, b]$ и предельное значение $\xi = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ является единственным корнем уравнения (2.4) на отрезке $[a, b]$.

Доказательство.

Рассмотрим два последовательных приближения $x_n = \varphi(x_{n-1})$ и $x_{n+1} = \varphi(x_n)$. По условию теоремы x_n, x_{n-1} принадлежат отрезку $[a, b]$. Применяя теорему Лагранжа, получим:

$$x_{n+1} - x_n = \varphi(x_n) - \varphi(x_{n-1}) = (x_n - x_{n-1}) \cdot \varphi'(c),$$

где точка c лежит между x_{n-1} и x_n . В силу условия (2.6)

$$|x_{n+1} - x_n| \leq q |x_n - x_{n-1}|. \quad (2.7)$$

Придавая значения $n = 1, 2, 3, \dots$, получим

$$\begin{aligned} |x_2 - x_1| &\leq q |x_1 - x_0|, \\ |x_3 - x_2| &\leq q |x_2 - x_1| \leq q^2 |x_1 - x_0|, \\ &\dots\dots\dots \\ |x_{n+1} - x_n| &\leq q |x_n - x_{n-1}| \leq \dots \leq q^n |x_1 - x_0|. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Рассмотрим ряд

$$x_0 + |x_1 - x_0| + |x_2 - x_1| + \dots + |x_n - x_{n-1}|, \quad (2.9)$$

для частичных сумм которого выполняется соотношение $S_{n+1} = x_n$. Если докажем, что ряд (2.9) сходится, то тем самым будет доказана сходимость последовательности $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$.

Сравним два ряда:

$$|x_0| + |x_1 - x_0| + |x_2 - x_1| + \dots + |x_n - x_{n-1}| + \dots, \quad (2.10)$$

$$|x_0| + |x_1 - x_0| + q|x_1 - x_0| + \dots + q^{n-1}|x_1 - x_0| + \dots \quad (2.11)$$

В силу соотношений (2.8) члены ряда (2.10) не превышают соответствующих членов ряда (2.11), которые являются членами геометрической прогрессии со знаменателем $q < 1$. Следовательно, ряд (2.10) сходится, а ряд (2.9) сходится абсолютно. Таким образом существует

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \xi,$$

причем $\xi \in [a, b]$.

Переходя к пределу в равенстве (2.5), в силу непрерывности функции $\varphi(x)$, получим

$$\xi = \varphi(\xi).$$

Следовательно, ξ - корень уравнения (2.4).

Докажем, что этот корень единственный. Предположим, что на отрезке $[a, b]$ существует еще один корень $\bar{\xi}$ уравнения (2.4) $\bar{\xi} = \varphi(\bar{\xi})$. Тогда в

силу теоремы Лагранжа

$$\xi - \bar{\xi} = \varphi(\xi) - \varphi(\bar{\xi}) = (\xi - \bar{\xi}) \cdot \varphi'(\bar{c}),$$

где \bar{c} находится между ξ и $\bar{\xi}$. Отсюда $(\xi - \bar{\xi}) \cdot [1 - \varphi'(\bar{c})] = 0$. Но $|\varphi'(\bar{c})| < 1$, поэтому выражение в квадратных скобках не равно нулю. Следовательно, $\xi = \bar{\xi}$, т.е. $\bar{\xi}$ - единственный корень уравнения (2.4).

Точка $\bar{\xi}$ при этом называется неподвижной точкой для уравнения (2.4).

Приведение нелинейного уравнения $f(x) = 0$ к виду $x = \varphi(x)$, допускающему сходящиеся итерации.

Выполнения достаточного условия сходимости можно добиться путем перехода от исходного уравнения $f(x) = 0$ к эквивалентному виду $x = \varphi(x)$ следующим образом: умножим обе части уравнения (2.1) на неизвестную постоянную $c = const \neq 0$, $|c| < 1$, затем прибавим к обеим частям переменную x , тогда получим $x + cf(x) = x$. Обозначим через $\varphi(x) = x + cf(x)$, тогда $\varphi(x) = x$. Константа c выбирается так, чтобы выполнялось достаточное условие сходимости итерационного процесса (2.6), т.е. $|\varphi'(x)| = |1 + cf'(x)| < 1$ для всех $x \in [a, b]$. Это условие равносильно условию $-1 < 1 + cf'(x) < 1$, откуда:

- 1) $\frac{-2}{f'(x)} < c < 0$ при $f'(x) > 0, \forall x \in [a, b]$;
- 2) $0 < c < \frac{-2}{f'(x)}$ при $f'(x) < 0, \forall x \in [a, b]$.

Оценка приближения.

Из формулы (2.8) имеем:

$$\begin{aligned} |x_{n+k} - x_n| &= |x_{n+k} - x_{n+k-1} + x_{n+k-1} - x_{n+k-2} + x_{n+k-2} - \dots + x_{n+1} - x_n| \leq \\ &\leq |x_{n+k} - x_{n+k-1}| + |x_{n+k-1} - x_{n+k-2}| + \dots + |x_{n+1} - x_n| \leq \\ &\leq q^{n+k-1}|x_1 - x_0| + q^{n+k-2}|x_1 - x_0| + \dots + q^n|x_1 - x_0| = q^n|x_1 - x_0| \cdot (1 + q + \dots + q^{k-1}) = \\ &= q^n|x_1 - x_0| \cdot \frac{1 - q^k}{1 - q} < \frac{q^k}{1 - q} \cdot |x_1 - x_0|. \end{aligned}$$

Устремляя k к бесконечности и учитывая, что $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n+k} = \xi$, окончательно получим:

$$|\xi - x_n| \leq \frac{q^n}{1-q} \cdot |x_1 - x_0|. \quad (2.12)$$

Отсюда видно, что чем меньше q , тем больше скорость сходимости итерационного процесса (2.5).

Для оценки приближения можно использовать и другую формулу.

Пусть $f(x) = x - \varphi(x)$. Очевидно, что $f'(x) = 1 - \varphi'(x) \geq 1 - q$. Учитывая, что $f(\xi) = 0$, получим:

$$|x_n - \varphi(x_n)| = |f(x_n) - f(\xi)| = |x_n - \xi| \cdot |f'(c_n)| \geq (1 - q) \cdot |x_n - \xi|,$$

где c_n находится между x_n и ξ . Следовательно, $|x_n - \xi| \leq \frac{|x_n - \varphi(x_n)|}{1 - q}$, т.е.

$$|\xi - x_n| \leq \frac{|x_{n+1} - x_n|}{1 - q}.$$

Используя формулу (2.7), получим:

$$|\xi - x_n| \leq \frac{q}{1 - q} |x_n - x_{n-1}|. \quad (2.13)$$

Если $q \leq \frac{1}{2}$, то $|\xi - x_n| \leq |x_n - x_{n-1}|$. В этом случае из неравенства $|x_n - x_{n-1}| < \varepsilon$ вытекает неравенство $|\xi - x_n| < \varepsilon$, где ε - заданная точность.

Условия окончания итерационного процесса.

Процесс итераций заканчивается при одновременном выполнении двух условий:

1) Если два последующих приближения отличаются между собой по модулю на величину, не превышающую заданной точности ε , т.е. $|x_{n+1} - x_n| \leq \varepsilon$. Отдельно этого критерия недостаточно, так как в случае крутизны графика, данное условие будет выполнено, но x_{n+1} может находиться далеко от корня.

2) Мера удовлетворения уравнению (2.1) последнего приближения корня: $|f(x_{n+1})| \leq \delta$. Отдельно данного критерия недостаточно, так как при пологой функции $f(x)$ это условие может быть выполнено, но x_{n+1} может находиться далеко от корня.

Метод простых итераций имеет два достоинства:

- является универсальным, простым для реализации на ЭВМ и самоисправляющимся, то есть любая неточность на каком – либо шаге итераций не отразится на конечном результате, а отразится лишь на количестве итераций. Подобные ошибки устойчивы даже по отношению к грубым ошибкам (сбоям ЭВМ), если только ошибка не выбрасывает очередное приближение за пределы области сходимости.

- позволяет достигнуть любой заданной точности при любом начальном приближении $x_0 \in [a, b]$.

Недостатки метода:

- трудоемкость процесса приведения уравнения (2.1) к виду (2.4).
- если начальное приближение x_0 выбрано достаточно далеко от корня, то число итераций, необходимых для достижения заданной точности, будет достаточно большое и объем вычислений возрастет.

Пример 2.4. Доказать графическим и аналитическим методами существование единственного корня нелинейного уравнения

$$f(x) = e^x + x = 0 \quad (2.14)$$

на отрезке $x \in [-1, 0]$ и построить рабочие формулы метода простых итераций для поиска корня.

1. Докажем графическим методом единственность корня нелинейного уравнения (2.14). Из графика функции $f(x) = e^x + x$ на рисунке 2.8 видно, что функция $f(x)$ пересекает ось Ox в одной точке, являющейся приближенным значением корня нелинейного уравнения (2.14). Но так как данная функция имеет сложный аналитический вид, то преобразуем уравнение (2.14) к виду $e^x = -x$ и построим два графика $y = e^x$ и $y = -x$, имеющих более простой аналитический вид (Рис.2.9). Абсцисса точки пересечения графиков является приближенным значением корня.

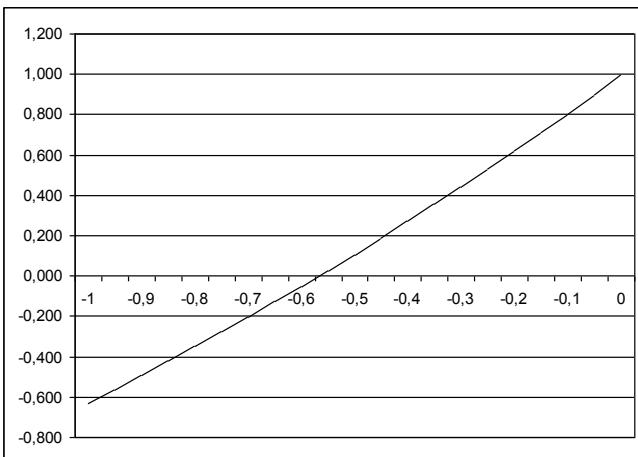


Рис.2.8

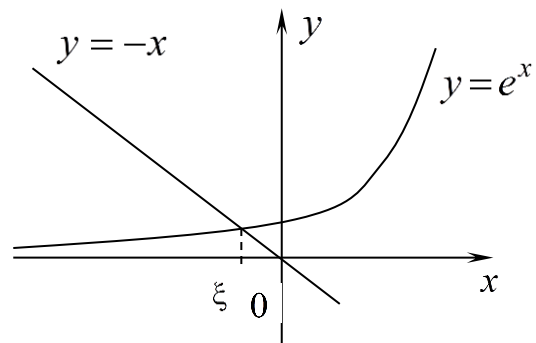


Рис.2.9

Для доказательства единственности корня на отрезке воспользуемся аналитическим методом. Функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[-1, 0]$, имеет на концах отрезка разные знаки ($f(-1) = -0.632$; $f(0) = 1$), а производная функции $f(x)$ не меняет знак на отрезке ($f'(x) = e^x + 1 > 0 \forall x \in [-1, 0]$). Следовательно, нелинейное уравнение (2.14) имеет на указанном отрезке единственный корень.

2. Для построения рабочей формулы переписем уравнение (2.14) в виде: $x = -e^x = \varphi(x)$. Проверим, выполняется ли достаточное условие сходимости (2.6). Заметим, что в точке $x = 0$ из отрезка $[-1, 0]$, значение

$|\varphi'(x)| = e^x = 1$, т.е. условие не выполняется. Построим функцию $\varphi(x) = x + cf(x)$. Так как $f'(x)$ всюду положительна на отрезке, то, конкретизируя значение производной в любой точке отрезка в неравенстве $\frac{-2}{f'(x)} < c < 0$, значение c определяется из интервала $-1 < c < 0$. Выбрав значение $c = -0.1$, запишем рабочую формулу метода простых итераций:

$$x_{n+1} = x_n - 0,1 \cdot (e^{x_n} + x_n), n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.15)$$

Итерационный процесс (2.15) можно начать, задав произвольное начальное приближение $x_0 \in [-1, 0]$.

§2.4. Метод Ньютона (метод касательных).

Пусть известно, что нелинейное уравнение $f(x) = 0$ имеет на отрезке $[a, b]$ единственный вещественный корень $\xi \in [a, b]$. Причем, производные $f'(x), f''(x)$ – непрерывны и сохраняют определенные знаки на отрезке $[a, b]$. Требуется найти этот корень с заданной точностью ε . Найдем какое-либо n -е приближенное значение корня $x_n \approx \xi$ ($a \leq x_n \leq b$) и уточним его методом Ньютона следующим образом.

Пусть

$$\xi = x_n + \alpha_n \quad (2.16)$$

По формуле Тейлора получим

$$0 = f(\xi) = f(x_n + \alpha_n) = f(x_n) + \alpha_n f'(x_n).$$

$$\text{Следовательно, } \alpha_n = -\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

Внося эту правку в формулу (2.16), получим рабочую формулу метода Ньютона вида:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, n = 0, 1, \dots \quad (2.17)$$

Геометрически метод Ньютона эквивалентен замене небольшой дуги кривой касательной, проведенной в некоторой точке $(x_n, f(x_n))$ этой кривой.

Для определенности положим $f''(x) > 0$ и $f(b) > 0$. Выберем начальное приближение $x_0 = b$, для которого $f(b) > 0$. Проведем касательную к кривой

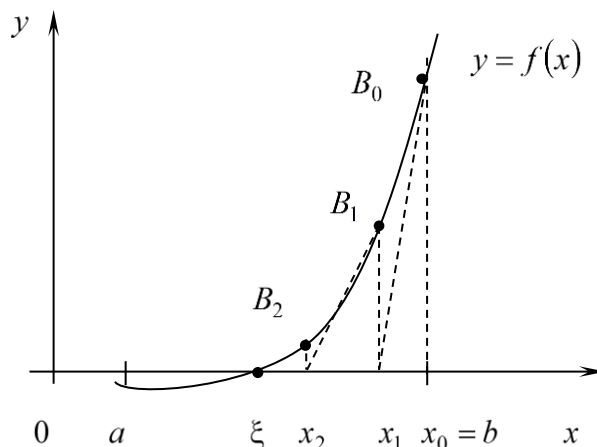


Рис.2.10

$y = f(x)$ в точке $B_0(x_0, f(x_0))$. За первое приближение x_1 берем точку пересечения касательной с осью OX . На кривой определим точку $B_1(x_1, f(x_1))$ и проведем касательную к кривой $y = f(x)$ в этой точке. Найдем следующее приближение x_2 и т.д. (Рис.2.10).

Составим уравнение касательной в точке $B_n(x_n, f(x_n))$:

$$y - f(x_n) = f'(x_n)(x - x_n).$$

Полагая $y = 0, x = x_{n+1}$, из уравнения касательной получим итерационную формулу метода Ньютона (2.17).

Если в качестве начального приближения взять другой конец отрезка $[a, b]$ $\tilde{x}_0 = a$, то следующее приближение $\tilde{x}_1 \notin [a, b]$.

Теорема 2.5.

Если $f(a)f(b) < 0$ и производные $f'(x), f''(x)$ не равны нулю и сохраняют определенные знаки на отрезке $[a, b]$, то исходя из начального приближения x_0 , удовлетворяющего неравенству $f(x_0)f''(x_0) > 0$, по методу Ньютона, заданного формулой (2.17), можно вычислить единственный корень ξ уравнения (2.1) с любой степенью точности.

Доказательство.

Пусть для определенности $f(a) < 0, f(b) > 0, f'(x) > 0, f''(x) > 0$ при $a \leq x \leq b$ (остальные случаи рассматриваются аналогично).

Из неравенства $f(x_0)f''(x_0) > 0$ следует, что $f(x_0) > 0$, т.е. $x_0 = b$.

Докажем, что все приближения x_n расположены правее ξ , т.е. $x_n > \xi$, а значит $f(x_n) > 0$.

Доказательство проведем методом индукции:

а) $x_0 > \xi$.

б) предположим, что $x_n > \xi$.

с) докажем, что $x_{n+1} > \xi$.

Точное решение уравнения (2.1) можно представить в виде

$$\xi = x_n + (\xi - x_n).$$

Применяя формулу Тейлора, получим:

$$0 = f(\xi) = f(x_n + (\xi - x_n)) = f(x_n) + f'(x_n)(\xi - x_n) + \frac{1}{2}f''(c_n)(\xi - x_n)^2, \quad (2.18)$$

где $\xi < c_n < x_n$.

Так как по условию теоремы $f''(x) > 0$, то последнее слагаемое в (2.18) положительное, следовательно,

$$f(x_n) + f'(x_n)(\xi - x_n) < 0.$$

Отсюда, в силу того, что $f'(x_n) > 0$, получим:

$$\xi < x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \equiv x_{n+1}.$$

Таким образом доказали, что все последовательные приближения

$x_{n+1} > \xi$, т.е. находятся правее ξ , и, следовательно, $f(x_{n+1}) > 0$.

Из соотношения (2.17), учитывая знаки $f(x_n)$ и $f'(x_n)$, следует, что $x_{n+1} < x_n$, т.е. последовательные приближения $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ образуют ограниченную монотонно убывающую последовательность. Т.е. эта последовательность имеет конечный предел, обозначим $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \bar{\xi}$. Перейдем к пределу при $n \rightarrow \infty$ в левой и правой частях соотношения (2.17), получим:

$$\bar{\xi} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \right] = \bar{\xi} - \frac{f(\bar{\xi})}{f'(\bar{\xi})}.$$

$\bar{\xi} = \bar{\xi} - \frac{f(\bar{\xi})}{f'(\bar{\xi})}$, отсюда следует, что $f(\bar{\xi}) = 0$, т.е. $\xi = \bar{\xi}$. А это означает,

что последовательные приближения x_n сходятся к корню уравнения (2.1), что и требовалось доказать.

Вывод: в методе Ньютона в качестве начального приближения x_0 выбирается тот конец отрезка $[a, b]$, которому отвечает ордината того же знака, что и $f''(x)$, т.е. выполняется достаточное условие сходимости

$$f(x_0)f''(x_0) > 0. \quad (2.19)$$

Замечание. Чем больше числовое значение $f'(x)$ в окрестности корня ξ , тем меньше правка α_n . Поэтому методом Ньютона удобно пользоваться, когда в окрестности искомого корня ξ график функции $y = f(x)$ имеет большую крутизну (т.е. $f'(x_n) \xrightarrow{n} \infty$, тогда $\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \xrightarrow{n} 0$). Если кривая $y = f(x)$ вблизи точки пересечения с осью Ox почти горизонтальная (т.е. $f'(x_n) \xrightarrow{n} 0$, тогда $\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \xrightarrow{n} \infty$), то применять метода Ньютона для решения уравнения (2.1) не рекомендуется.

Метод Ньютона можно рассматривать как частный случай метода простых итераций, если положить $\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$. Тогда достаточное условие сходимости метода простых итераций примет вид:

$$|\varphi'(x)| = \left| \frac{f(x)f''(x)}{(f'(x))^2} \right| < 1 \text{ для всех } x \in [a, b]. \quad (2.20)$$

Если выполнено условие (2.20), то итерационный процесс, заданный формулой (2.17), будет сходиться при произвольном выборе начального приближения x_0 .

Достоинства метода:

- метод Ньютона обладает достаточно большой скоростью сходимости, близкой к квадратичной;
- достаточно простое получение итерационной формулы (2.17).

Недостатки метода:

- метод Ньютона сходится не при любом выборе начального приближения x_0 ;
- метод Ньютона применим только, когда $f'(x) \neq 0 \forall x \in [a, b]$.

§2.5. Модифицированный метод Ньютона.

Если производная $f'(x)$ мало изменяется на отрезке $[a, b]$, то можно считать, что $f'(x_n) \approx f'(x_0)$. Заменяв в формуле (2.17) $f'(x_n)$ на $f'(x_0)$, получим рабочую формулу модифицированного метода Ньютона:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_0)}. \quad (2.21)$$

В отличие от метода Ньютона, в модифицированном методе касательная заменяется на прямые, параллельные касательной, проведенной в

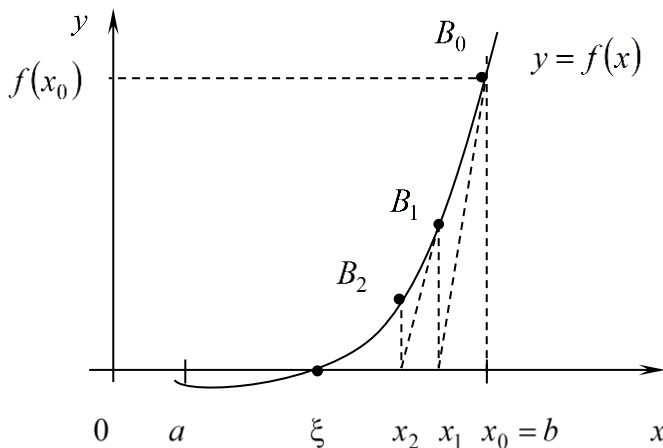


Рис.2.11

точке $B_0(x_0, f(x_0))$ (Рис.2.11).

Пример 2.5. Запишем рабочие формулы метода Ньютона и модифицированного метода Ньютона для нелинейного уравнения из примера 2.4. В качестве начального приближения x_0 здесь выбирается правый или левый конец отрезка, в зависимости от того, где выполняется достаточное условие сходимости метода Ньютона вида (2.19). Заметим, что в точке $x = -1$ условие не выполняется, а в точке $x = 0$ - выполняется. Следовательно, в качестве начального приближения выбирается точка $x_0 = 0$. Рабочая формула метода Ньютона (2.17) для данной задачи запишется так:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{e^{x_n} + x_n}{e^{x_n} + 1}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Рабочая формула модифицированного метода Ньютона (2.21) для данной задачи запишется в виде:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{e^{x_n} + x_n}{e^{x_0} + 1}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

§2.6. Непрерывные схемы решения нелинейных уравнений.

Итерационные методы решения нелинейных уравнений (2.1) можно разбить на две группы:

- * дискретные схемы решения,
- * непрерывные схемы решения.

Дискретные схемы решения были рассмотрены выше. Заметим, что основными недостатками вышеперечисленных методов являются:

- зависимость от начальных условий или от интервала нахождения корня;
- сравнительно низкая скорость сходимости;
- нет правил перехода от корня к корню уравнения (2.1) в случае, если их несколько.

При применении непрерывных схем для решения уравнения (2.1) процесс нахождения корней осуществляется путем решения соответствующего обыкновенного дифференциального уравнения

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= \Phi(f(x), f'(x)), \\ x(0) &= x_0.\end{aligned}\tag{2.22}$$

Пусть $f(x)$ определена и монотонна при $x > 0$ и существует конечная производная $f'(x)$. Задачу нахождения корней уравнения (2.1), являющуюся непрерывным аналогом метода простых итераций, можно рассматривать как предел при $t \rightarrow \infty$ решения задачи Коши

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= -f(x), \\ x(0) &= x_0,\end{aligned}\tag{2.23}$$

если этот предел существует. Обозначим через $x = x(t)$ решение задачи Коши (2.12), x^* - искомое решение уравнения (2.1). Тогда должно иметь место тождество $\frac{dx^*}{dt} = -f(x^*)$. Вводя обозначение для отклонения $z(t) = x(t) - x^*$ и, вычитая из (2.23) последнее уравнение, имеем

$$\frac{dz}{dt} = -(f(x) - f(x^*)).\tag{2.24}$$

Разлагая $f(x)$ в ряд Тейлора в окрестности точки x^* с сохранением линейных членов $f(x) = f(x^*) + f'(x^*)(x - x^*)$ и подставляя полученное выражение в (2.24), получаем дифференциальное уравнение в отклонениях $\frac{dz}{dt} = -f'(x^*)z$, решение которого имеет вид

$$z(t) = Ce^{-f'(x^*)t}\tag{2.25}$$

Видим, что условием сходимости $x(t)$ к корню x^* является требова-

ние $f'(x^*) > 0$, так как в этом случае $z(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$, и, следовательно, $x(t) \rightarrow x^*$. Считая, что $f(x)$ монотонна при $x > 0$, последнее уравнение можно распространить на всю рассматриваемую выше область. Таким образом, условием применения непрерывной схемы метода простых итераций (2.23) является

$$f'(x) > 0 \quad (2.26)$$

Непрерывные схемы решения обладают более высокой скоростью сходимости и более высокой точностью решения по сравнению с соответствующими дискретными схемами. Но проблема зависимости от начальных условий и отсутствие правил перехода от корня к корню в случае, когда уравнение (2.1) имеет более одного решения, остается открытой.

Как видно из дифференциального уравнения (2.23) и уравнения (2.1) левая часть последнего заменяется производной $\frac{dx}{dt}$. Данная замена является грубым приближением решения задачи (2.23) к решению задачи (2.1). Это влечёт за собой не только большую погрешность при вычислениях, но и к снижению скорости расчётов.

Перепишем уравнение (2.1) в виде

$$\mu \frac{dx}{dt} = -f(x), \quad (2.27)$$

где μ - малый параметр, $0 < \mu \ll 1$.

Переход от задачи (2.1) к задаче (2.27) теоретически обоснован, так как интегральные кривые, являющиеся решением уравнения с малым параметром (2.27), проходят через все решения уравнения (2.1). Задачу нахождения корней этого уравнения непрерывным сингулярным аналогом метода простых итераций можно рассматривать как предел при $t \rightarrow \infty$ и $\mu \rightarrow 0$ решения задачи Коши вида

$$\begin{aligned} \mu \frac{dx}{dt} &= -f(x), \\ x(0) &= x_0, \end{aligned} \quad (2.28)$$

если этот предел существует.

Проводя рассуждения, аналогичные рассуждениям, приведенным выше, получим, что решение уравнения (2.27) в точке x^* будет иметь вид:

$$z(t, \mu) = C e^{-\frac{f'(x^*)}{\mu} t} \quad (2.29)$$

При этом, в силу того, что $\mu > 0$, то условие сходимости (2.26) останется прежним.

Полученная модификация классических схем решения не зависит от начальных условий и обладает более высокой точностью решения. Для доказательства более быстрой скорости сходимости предположим, что применение итерационных методов никогда не дает точного решения и введем точность решения ε . Моменты нахождения решений с точностью ε клас-

сическими и модифицированными методами обозначим как t_1 и t_2 . Используя решения (2.24) и (2.29), запишем неравенства вида

$$z(t) = Ce^{-f'(x^*)t} \leq \varepsilon,$$

$$z(t, \mu) = Ce^{-\frac{f'(x^*)}{\mu}t} \leq \varepsilon.$$

Из соотношений видно, что $t_1 = t \leq \frac{\ln\left(\frac{\varepsilon}{C}\right)}{f'(x^*)}$ и $t_2 = t \leq \frac{\mu \ln\left(\frac{\varepsilon}{C}\right)}{f'(x^*)}$. Сопоставляя полученные значения t_1 и t_2 , видим, что $\frac{t_1}{t_2} = \frac{1}{\mu}$, т.е. скорость сходимости при решении задачи модифицированными методами в $\frac{1}{\mu}$ раз выше, чем классическими.

3. ИТЕРАЦИОННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ СИСТЕМ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ.

Определение 3.1.

Системами нелинейных уравнений (СНУ) называются системы вида:

$$\begin{cases} f_1(x_1, \dots, x_n) = 0; \\ \dots \\ f_n(x_1, \dots, x_n) = 0, \end{cases} \quad (3.1)$$

если хотя бы одна из функций $f_i(x_1, \dots, x_n)$ нелинейна. Здесь x_1, \dots, x_n - неизвестные переменные.

Решение систем нелинейных уравнений – одна из трудных задач вычислительной математики. Трудность состоит в том, чтобы определить: имеет ли система решение, и, если – да, то сколько. Уточнение решений в заданной области – более простая задача.

Пусть функции f_i определены в областях $\Omega_i, i = \overline{1, n}$. Тогда область $\Omega = \bigcap_{i=1}^n \Omega_i$ и будет той областью, где можно найти решение.

Наиболее распространенными методами уточнения решения являются метод простых итераций, метод Ньютона и его модификация.

§1. Метод простых итераций.

Из исходной системы (3.1) путем эквивалентных преобразований переходим к системе вида:

$$\begin{cases} x_1 = \Phi_1(x_1, \dots, x_n) \\ \dots \\ x_n = \Phi_n(x_1, \dots, x_n) \end{cases} \quad (3.2)$$

Итерационный процесс, определяемый формулами

$$\begin{cases} x_1^{k+1} = \Phi_1(x_1^{(k)}, \dots, x_n^{(k)}) \\ \dots \\ x_n^{k+1} = \Phi_n(x_1^{(k)}, \dots, x_n^{(k)}) \end{cases}, \quad k = 0, 1, \dots$$

можно начать, задав начальное приближение $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}) \in \bar{\Omega} \subset \Omega$.

Достаточными условиями сходимости итерационного процесса являются одно из двух следующих условий:

$$\sum_{j=1}^n \left| \frac{\partial \Phi_i}{\partial x_j} \right| < 1, \forall i = \overline{1, n} \quad \text{или} \quad \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial \Phi_i}{\partial x_j} \right| < 1, \forall j = \overline{1, n}.$$

Распишем первое условие:

$$\left| \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_1} \right| + \left| \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_2} \right| + \dots + \left| \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_n} \right| < 1 \quad \text{при} \quad i = 1,$$

.....

$$\left| \frac{\partial \Phi_n}{\partial x_1} \right| + \left| \frac{\partial \Phi_n}{\partial x_2} \right| + \dots + \left| \frac{\partial \Phi_n}{\partial x_n} \right| < 1 \quad \text{при} \quad i = n.$$

Распишем второе условие:

$$\left| \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_1} \right| + \left| \frac{\partial \Phi_2}{\partial x_1} \right| + \dots + \left| \frac{\partial \Phi_n}{\partial x_1} \right| < 1 \quad \text{при} \quad j = 1,$$

.....

$$\left| \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_n} \right| + \left| \frac{\partial \Phi_2}{\partial x_n} \right| + \dots + \left| \frac{\partial \Phi_n}{\partial x_n} \right| < 1 \quad \text{при} \quad j = n.$$

Рассмотрим один из способов приведения системы (3.1) к виду (3.2), допускающему сходящиеся итерации.

Пусть задана система второго порядка вида:

$$\begin{cases} f_1(x, y) = 0 \\ f_2(x, y) = 0 \end{cases}.$$

Требуется привести ее к виду:

$$\begin{cases} x = \Phi_1(x, y) \\ y = \Phi_2(x, y) \end{cases}.$$

Умножим первое уравнение системы на неизвестную постоянную α , второе - на β , затем сложим их и добавим в обе части уравнения x . Получим первое уравнение преобразованной системы

$$x + \alpha f_1(x, y) + \beta f_2(x, y) = x;$$

где $\Phi_1(x, y) = x + \alpha f_1(x, y) + \beta f_2(x, y)$.

Далее, умножим первое уравнение системы на неизвестную постоянную γ , второе - на δ , затем сложим их и добавим в обе части уравнения y . Тогда второе уравнение преобразованной системы будет иметь вид

$$y + \gamma f_1(x, y) + \delta f_2(x, y) = y;$$

где $\Phi_2(x, y) = y + \gamma f_1(x, y) + \delta f_2(x, y)$.

Неизвестные постоянные $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ определим из достаточных условий сходимости

$$\left| \frac{\partial \Phi_1}{\partial x} \right| + \left| \frac{\partial \Phi_2}{\partial x} \right| < 1 \text{ и } \left| \frac{\partial \Phi_1}{\partial y} \right| + \left| \frac{\partial \Phi_2}{\partial y} \right| < 1. \quad (3.3)$$

Запишем эти условия более подробно:

$$\begin{cases} \left| 1 + \alpha \frac{\partial f_1}{\partial x} + \beta \frac{\partial f_2}{\partial x} \right| + \left| \gamma \frac{\partial f_1}{\partial x} + \delta \frac{\partial f_2}{\partial x} \right| < 1 \\ \left| \alpha \frac{\partial f_1}{\partial y} + \beta \frac{\partial f_2}{\partial y} \right| + \left| 1 + \gamma \frac{\partial f_1}{\partial y} + \delta \frac{\partial f_2}{\partial y} \right| < 1 \end{cases}$$

Полагая равными нулю выражения под знаком модуля, получим систему линейных алгебраических уравнений 4 порядка с четырьмя неизвестными для определения постоянных $\alpha, \beta, \gamma, \delta$:

$$\begin{cases} 1 + \alpha \frac{\partial f_1}{\partial x} + \beta \frac{\partial f_2}{\partial x} = 0 \\ \gamma \frac{\partial f_1}{\partial x} + \delta \frac{\partial f_2}{\partial x} = 0 \\ \alpha \frac{\partial f_1}{\partial y} + \beta \frac{\partial f_2}{\partial y} = 0 \\ 1 + \gamma \frac{\partial f_1}{\partial y} + \delta \frac{\partial f_2}{\partial y} = 0 \end{cases}. \quad (3.4)$$

При таком выборе параметров условия сходимости будут соблюдены, если частные производные функций $f_1(x, y)$ и $f_2(x, y)$ будут изменяться не очень быстро в окрестности точки $(x^{(0)}, y^{(0)}) \in \bar{\Omega} \subset \Omega$. Тогда, для того, чтобы решить систему (3.1), нужно задать начальное приближение $(x^{(0)}, y^{(0)}) \in \bar{\Omega} \subset \Omega$ и вычислить значения производных $\frac{\partial f_i}{\partial x} \Big|_{(x^{(0)}, y^{(0)})}$ и $\frac{\partial f_i}{\partial y} \Big|_{(x^{(0)}, y^{(0)})}$,

$i = \overline{1, 2}$ в этой точке. В противном случае, вычисление $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ осуществляется на каждом k шаге итераций, при этом $\frac{\partial f_i}{\partial x} \Big|_{(x^{(k)}, y^{(k)})}$, $\frac{\partial f_i}{\partial y} \Big|_{(x^{(k)}, y^{(k)})}$, $i = \overline{1, 2}$.

Метод простых итераций является самоисправляющимся, универсальным и простым для реализации на ЭВМ. Если система имеет большой порядок, то применение данного метода, имеющего медленную скорость сходимости, не рекомендуется. В этом случае, используют метод Ньютона, который имеет более быструю сходимость.

Пример 3.1. Построить рабочие формулы метода простых итераций для численного решения СЛУ вида:

$$\begin{cases} f_1(x, y) = x + y - 5 = 0; \\ f_2(x, y) = xy - 6 = 0. \end{cases} \quad (3.5)$$

при начальном приближении

$$(x^{(0)}, y^{(0)}) = (2, 1). \quad (3.6)$$

Заметим, что аналитическим решением СЧУ (3.5) являются точки (2;3) и (3;2).

Для построения рабочих формул МПИ для численного решения системы необходимо решить СЛАУ (3.4). Для ее решения необходимо вычислить частные производные $\frac{\partial f_1}{\partial x}, \frac{\partial f_2}{\partial x}, \frac{\partial f_1}{\partial y}, \frac{\partial f_2}{\partial y}$ при начальном условии (3.6):

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} = \frac{\partial f_1}{\partial y} = 1, \frac{\partial f_2}{\partial x} = y|_{(2;1)}, \frac{\partial f_2}{\partial y} = x|_{(2;1)} = 2.$$

Тогда СЛАУ (3.5) запишется так:

$$\begin{cases} 1 + \alpha + \beta = 0; \\ \gamma + \delta = 0; \\ \alpha + 2\beta = 0; \\ 1 + \gamma + 2\delta = 0. \end{cases}$$

Решением этой системы являются точки $\alpha = -2, \beta = \gamma = 1, \delta = -1$. Тогда рабочие формулы метода простых итераций для решения СЧУ (3.5) примут вид:

$$\begin{aligned} x &= x - 2(x + y - 5) + (xy - 6), \\ y &= y - (x + y - 5) - (xy - 6). \end{aligned}$$

Для реализации на ЭВМ рабочие формулы можно переписать так:

$$\begin{aligned} x^{(k+1)} &= x^{(k)} - 2(x^{(k)} + y^{(k)} - 5) + (x^{(k)}y^{(k)} - 6), \\ y^{(k+1)} &= y^{(k)} - (x^{(k)} + y^{(k)} - 5) - (x^{(k)}y^{(k)} - 6), k = 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

§2. Метод Ньютона и его модификация.

Пусть требуется решить систему нелинейных уравнений вида (3.1). Предположим, что решение существует в некоторой области $\bar{\Omega}$, в которой все функции $f_i(x_1, \dots, x_n), i = \overline{1, n}$ непрерывны и имеют, по крайней мере, первую производную. Метод Ньютона представляет собой итерационный процесс, который осуществляется по определенной формуле следующего вида:

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - W^{-1}(x^{(k)}) f(x^{(k)}) \quad (3.7)$$

$$\text{где } W(x^{(k)}) = \begin{pmatrix} (f_1)'_{x_1}, \dots, (f_1)'_{x_n} \\ \dots \\ (f_n)'_{x_1}, \dots, (f_n)'_{x_n} \end{pmatrix} \Big|_{(x_1^{(k)}, \dots, x_n^{(k)})}$$

Трудности при использовании метода Ньютона:

- нахождение обратной матрицы $W^{-1}(x^{(k)})$ на каждом итерационном шаге;
- возможность выхода приближения $x^{(k+1)}$ за пределы области $\bar{\Omega}$ и связанная с этим расходимость итерационного процесса.

Модифицированный метод Ньютона решает первую задачу. Если матрица $W^{-1}(x^{(k)})$ непрерывна в окрестности искомого решения $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ и начальное приближение $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$ близко к ξ , то приближенно можно положить $W^{-1}(x^{(k)}) \approx W^{-1}(x^{(0)})$. Тогда формула (3.3) принимает вид:

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - W^{-1}(x^{(0)})f(x^{(k)}) \quad (3.8)$$

Формула (3.8) является рабочей формулой модифицированного метода Ньютона.

Достоинством данного метода является то, что обратная матрица W^{-1} вычисляется один раз. Но ответа на второй вопрос модифицированный метод Ньютона не дает.

Пример 3.2. Построить рабочие формулы метода Ньютона для численного решения СНУ (3.5) при начальном приближении (3.6).

Для нахождения обратной матрицы в формуле (3.7) необходимо:

$$1. \text{ Найти матрицу частных производных } f'(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ y & x \end{pmatrix}.$$

2. Найти определитель этой матрицы:

$$\det f'(x, y) = x - y.$$

3. Определить обратную матрицу:

$$(f'(x, y))^{-1} = \frac{1}{\det f'(x, y)} \begin{pmatrix} x & -y \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^T = \frac{1}{x - y} \begin{pmatrix} x & -1 \\ -y & 1 \end{pmatrix}.$$

Проведя несложные преобразования получим рабочую формулу метода Ньютона (3.7) в виде:

$$x^{(k+1)} = \frac{-x^{(k)}y^{(k)} + 5x^{(k)} - 6}{x^{(k)} - y^{(k)}},$$

$$y^{(k+1)} = \frac{x^{(k)}y^{(k)} - 5y^{(k)} + 6}{x^{(k)} - y^{(k)}}, \quad k = 0, 1, \dots$$

4. ИТЕРАЦИОННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ.

Пусть дана система линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) ви-

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \quad (4.1)$$

Вводя в рассмотрение матрицы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix} \quad (4.2)$$

систему (4.1) можно записать в виде матричного уравнения

$$Ax = B. \quad (4.3)$$

Для решения систем линейных алгебраических уравнений существуют точные методы: метод Гаусса, с помощью обратной матрицы (матричный метод), по формулам Крамера. Однако, при большом числе неизвестных применение точных методов решения затруднено. В этом случае для нахождения корней системы (4.1) целесообразнее пользоваться приближенными (численными) методами, которые и будут рассмотрены в данной главе.

§4.1. Метод простых итераций для решения систем линейных алгебраических уравнений.

Пусть дана система линейных алгебраических уравнений вида (4.1).

Предположим, что диагональные элементы матрицы A не равны нулю, т.е. $a_{ii} \neq 0, i = \overline{1, n}$ (в случае равенства одного или нескольких из них нулю, с помощью перестановки уравнений или других эквивалентных преобразований можно добиться, чтобы они были отличны от нуля). Разделив i -ое уравнение системы на a_{ii} , получим:

$$\begin{cases} x_1 = \beta_1 + \alpha_{12}x_2 + \alpha_{13}x_3 + \dots + \alpha_{1n}x_n, \\ x_2 = \beta_2 + \alpha_{21}x_1 + \alpha_{23}x_3 + \dots + \alpha_{2n}x_n, \\ \dots \\ x_n = \beta_n + \alpha_{n1}x_1 + \alpha_{n2}x_2 + \dots + \alpha_{nn}x_n. \end{cases} \quad (4.4)$$

где коэффициенты $\beta_i = \frac{b_i}{a_{ii}}, \alpha_{ij} = -\frac{a_{ij}}{a_{ii}}$ при $i \neq j, \alpha_{ii} = 0$.

Введем обозначения:

$$\beta = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \dots \\ \beta_n \end{pmatrix}, \quad \alpha = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix} \quad (4.5)$$

Тогда система (4.4) примет вид:

$$x = \beta + \alpha x \quad (4.6)$$

Систему (4.6) будем решать методом последовательных приближений. Выбираем начальное приближение $x^{(0)} = \beta$; далее вычисляем следующие приближения:

$$x^{(1)} = \beta + \alpha x^{(0)}, \quad x^{(2)} = \beta + \alpha x^{(1)}, \dots, \quad x^{(k+1)} = \beta + \alpha x^{(k)}, \dots \quad (4.7)$$

Если последовательность приближений $x^{(0)}, x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(k)}, \dots$ является сходящейся, т.е. у нее существует предел $\xi = \lim_{k \rightarrow \infty} x^{(k)}$, то этот предел ξ является решением системы (4.6). Действительно,

$$\xi = \lim_{k \rightarrow \infty} x^{(k+1)} = \lim_{k \rightarrow \infty} (\beta + \alpha x^{(k)}) = \beta + \alpha \xi.$$

Получили $\xi = \beta + \alpha \xi$, т.е. ξ – является решением системы (4.6), а система (4.6) получена из системы (4.1), следовательно, ξ будет являться решением исходной системы (4.1).

Теорема 4.1 (достаточное условие сходимости итерационного процесса).

Если для приведенной системы $x = \beta + \alpha x$ выполнено хотя бы одно из условий:

а) $\sum_{j=1}^n |\alpha_{ij}| < 1, i = \overline{1, n};$

б) $\sum_{i=1}^n |\alpha_{ij}| < 1, j = \overline{1, n},$

то процесс итерации, заданный формулой $x^{(k+1)} = \beta + \alpha x^{(k)}$, сходится к единственному решению этой системы, независимо от выбора начального приближения.

В частности процесс итерации заведомо сходится, если элементы α приведенной системы (4.4) удовлетворяют неравенству $|\alpha_{ij}| < \frac{1}{n}$, где n - число неизвестных системы.

Следствие.

Для исходной системы (4.1) итерационный процесс сходится, если выполнены неравенства $|a_{ii}| > \sum_{i \neq j=1}^n |a_{ij}|, i = \overline{1, n}$ (то есть модули диагональных коэффициентов для каждого уравнения системы больше суммы модулей всех остальных коэффициентов, не считая свободных членов).

Теорема 4.2 (необходимое и достаточное условие сходимости процесса итерации для системы линейных уравнений).

Для сходимости процесса итераций: $x^{(k+1)} = \beta + \alpha x^{(k)}$ при любом выборе начального приближения $x^{(0)}$ и любом свободном члене β необходимо и достаточно, чтобы собственные значения матрицы α (т.е. корни характеристического уравнения $\det(\alpha - \lambda E) = 0$) были по модулю меньше единицы.

Приведение исходной системы к виду, удобному для применения сходящегося итерационного процесса.

Теорема сходимости итерационного процесса накладывает жесткие условия на коэффициенты системы (4.3). Однако, если $\det A \neq 0$, то с помощью элементарных преобразований системы (4.3) ее можно заменить эк-

вивалентной системой $x = \beta + \alpha x$, такой, что условия теоремы сходимости будут выполнены.

Умножим левую и правую часть соотношения (4.3) слева на матрицу $(A^{-1} - \gamma)$, где $\gamma = (\gamma_{ij})$, $i, j = \overline{1, n}$ - матрица с малыми по модулю элементами.

Проведем преобразования:

$$(A^{-1} - \gamma)Ax = (A^{-1} - \gamma)B,$$

$$x - \gamma Ax = (A^{-1} - \gamma)B,$$

$$x = (A^{-1} - \gamma)B + \gamma Ax.$$

Если обозначить $\beta = (A^{-1} - \gamma)B$, $\alpha = \gamma A$, то получим $x = \beta + \alpha x$.

Если элементы матрицы γ достаточно малы по модулю, т.е. $|\gamma_{ii}| \rightarrow 0$, то элементы матрицы α будут удовлетворять достаточному условию сходимости итерационного процесса.

Итерационный процесс заканчивается, если для двух приближений $x^{(k+1)}$ и $x^{(k)}$ выполнено условие $\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\| = \sum_{j=1}^n |x_j^{(k+1)} - x_j^{(k)}| \leq \varepsilon$, где ε - заданная точность.

§4.2. Метод Зейделя.

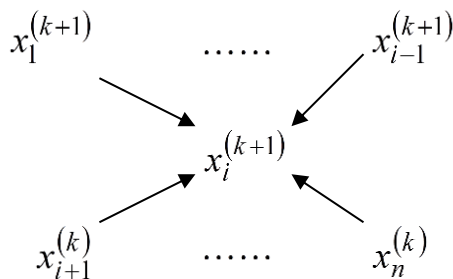


Рис.4.1

Метод Зейделя представляет собой некоторую модификацию метода простых итераций. Основная его идея состоит в том, что при вычислении $(k+1)$ -го приближения неизвестной x_i учитываются уже вычисленные ранее $(k+1)$ -е приближения неизвестных x_0, x_1, \dots, x_{i-1} . Т.е. найденное $(k+1)$ -е приближение сразу же используется для получения $(k+1)$ -го приближения последующих координат (Рис.4.1).

Предполагая, что k -е приближения $x_i^{(k)}$ корней системы (4.4) известны, $(k+1)$ -е приближения корней будут находиться по следующим итерационным формулам метода Зейделя:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1^{(k+1)} = \beta_1 + \sum_{j=1}^n \alpha_{1j} x_j^{(k)}, \\ x_2^{(k+1)} = \beta_2 + \alpha_{21} x_1^{(k+1)} + \sum_{j=2}^n \alpha_{2j} x_j^{(k)}, \\ \dots \\ x_i^{(k+1)} = \beta_i + \sum_{j=1}^{i-1} \alpha_{ij} x_j^{(k+1)} + \sum_{j=i}^n \alpha_{ij} x_j^{(k)}, \\ \dots \\ x_n^{(k+1)} = \beta_n + \sum_{j=1}^{n-1} \alpha_{nj} x_j^{(k+1)} + \alpha_{nn} x_n^{(k)}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \end{array} \right. \quad (4.8)$$

Теорема 4.3 (достаточное условие сходимости метода Зейделя).

Если для приведенной системы $x = \beta + \alpha x$ выполнено хотя бы одно из условий:

- 1) $\|\alpha\|_m < 1$, где $\|\alpha\|_m = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |\alpha_{ij}|$;
- 2) $\|\alpha\|_l < 1$, где $\|\alpha\|_l = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^n |\alpha_{ij}|$;
- 3) $\|\alpha\|_k < 1$, где $\|\alpha\|_k = \sqrt{\sum_{i,j=1}^n |\alpha_{ij}|^2}$,

то процесс Зейделя сходится к единственному решению системы при любом выборе начального вектора.

Запишем систему (4.8) в сокращенном виде:

$$x_i^{(k+1)} = \beta_i + \sum_{j=1}^{i-1} \alpha_{ij} x_j^{(k+1)} + \sum_{j=i}^n \alpha_{ij} x_j^{(k)}, \quad i = \overline{1, n} \quad (4.9)$$

Введем обозначения:

$$\alpha = (\alpha_{ij}) = B + C,$$

где

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \alpha_{21} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & 0 & 0 \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn-1} & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & 0 & \alpha_{1n} \\ 0 & \alpha_{22} & \dots & 0 & \alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \alpha_{nn} \end{pmatrix}.$$

Тогда формулу (4.9) можем переписать в матричном виде:

$$x^{(k+1)} = \beta + Bx^{(k+1)} + Cx^{(k)}, \quad (4.10)$$

где

$$\beta = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \dots \\ \beta_n \end{pmatrix}, \quad x^{(k)} = \begin{pmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \\ \dots \\ x_n^{(k)} \end{pmatrix}, \quad x^{(k+1)} = \begin{pmatrix} x_1^{(k+1)} \\ x_2^{(k+1)} \\ \dots \\ x_n^{(k+1)} \end{pmatrix}.$$

Теорема 4.4 (необходимые и достаточные условия сходимости метода Зейделя).

Для сходимости процесса Зейделя, заданного формулой (4.9), для приведенной системы линейных уравнений (4.4) при любом выборе свободного члена β и начального вектора $x^{(0)}$ необходимо и достаточно, чтобы все корни $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ уравнения $\det(C - (E - B)\lambda) = 0$ были по модулю меньше единицы.

Пример 4.1. Построить рабочие формулы метода простых итераций и метода Зейделя для численного решения СЛАУ вида:

$$\begin{cases} 8x - 5y + z = 1; \\ x + 6y - 2z = 7; \\ -x - y + 4z = 9. \end{cases} \quad (4.11)$$

Решение.

Заметим, что система (4.11) имеет точное решение
 $x = 1; y = 2; z = 3.$

Из системы (4.11) видно, что модули диагональных коэффициентов в каждом уравнении отличны от нуля и больше суммы модулей всех остальных коэффициентов, не считая столбца свободных членов. Тогда, разделим каждое уравнение системы (4.11) на соответствующий диагональный коэффициент, сформируем столбец $x = (x_1, \dots, x_n)$ в левой части и перенесем остальные слагаемые в правую часть и получим рабочие формулы метода простых итераций вида:

$$\begin{cases} x^{(k+1)} = \frac{1}{8} + \frac{5}{8}y^{(k)} - \frac{1}{8}z^{(k)}; \\ y^{(k+1)} = \frac{7}{6} - \frac{1}{6}x^{(k)} + \frac{1}{3}z^{(k)}; \\ z^{(k+1)} = \frac{9}{4} + \frac{1}{4}x^{(k)} + \frac{1}{4}y^{(k)}, k = 0, 1, 2, \dots \end{cases}$$

Начальное приближение обычно выбирают равным столбцу свободных членов преобразованной системы $(x^{(0)}, y^{(0)}, z^{(0)}) = \left(\frac{1}{8}, \frac{7}{6}, \frac{9}{4}\right).$

Рабочие формулы метода Зейделя запишутся так:

$$\begin{cases} x^{(k+1)} = \frac{1}{8} + \frac{5}{8}y^{(k)} - \frac{1}{8}z^{(k)}; \\ y^{(k+1)} = \frac{7}{6} - \frac{1}{6}x^{(k+1)} + \frac{1}{3}z^{(k)}; \\ z^{(k+1)} = \frac{9}{4} + \frac{1}{4}x^{(k+1)} + \frac{1}{4}y^{(k+1)}, k = 0, 1, 2, \dots \end{cases}$$

§4.3. Метод релаксации.

Рассмотрим систему линейных алгебраических уравнений (4.1), в которой $a_{ii} \neq 0, i = \overline{1, n}.$

Сделаем преобразования: для этого свободные члены перенесем в

каждом шаге обращают в нуль максимальную по модулю невязку путем изменения значения соответствующей компоненты приближения. Процесс заканчивается, когда все невязки последней преобразованной системы будут равны нулю с заданной точностью.

Пример 4.2. Решить систему методом релаксации, производя вычисления с двумя десятичными знаками.

$$\begin{cases} 10x_1 - 2x_2 - 2x_3 = 6, \\ -x_1 + 10x_2 - 2x_3 = 7, \\ -x_1 - x_2 + 10x_3 = 8. \end{cases} \quad (4.14)$$

Решение.

Приведем систему (4.14) к виду, удобному для релаксации

$$\begin{cases} -x_1 + 0.2x_2 + 0.2x_3 + 0.6 = 0, \\ 0.1x_1 - x_2 + 0.2x_3 + 0.7 = 0, \\ 0.1x_1 + 0.1x_2 - x_3 + 0.8 = 0. \end{cases} \quad (4.15)$$

В качестве начального приближения выбираем

$$x_1^{(0)} = x_2^{(0)} = x_3^{(0)} = 0.$$

Находим соответствующие невязки: $R_1^{(0)} = 0.60$, $R_2^{(0)} = 0.70$, $R_3^{(0)} = 0.80$.

Выбираем максимальную невязку и полагаем $\Delta x_3^{(0)} = 0.80$, тогда

$$R_3^{(1)} = 0,$$

$$R_1^{(1)} = R_1^{(0)} + b_{13}\Delta x_3^{(0)} = 0.6 + 0.2 \cdot 0.80 = 0.76,$$

$$R_2^{(1)} = R_2^{(0)} + b_{23}\Delta x_3^{(0)} = 0.7 + 0.2 \cdot 0.80 = 0.86.$$

Опять выбираем максимальную невязку и полагаем $\Delta x_2^{(1)} = 0.86$, тогда

$$R_2^{(2)} = 0,$$

$$R_1^{(2)} = R_1^{(1)} + b_{12}\Delta x_2^{(1)} = 0.76 + 0.2 \cdot 0.86 = 0.93,$$

$$R_3^{(2)} = R_3^{(1)} + b_{32}\Delta x_2^{(1)} = 0 + 0.1 \cdot 0.86 = 0.09.$$

Далее $\Delta x_1^{(2)} = 0.93$ и

$$R_1^{(3)} = 0,$$

$$R_2^{(3)} = R_2^{(2)} + b_{21}\Delta x_1^{(2)} = 0 + 0.1 \cdot 0.93 = 0.09,$$

$$R_3^{(3)} = R_3^{(2)} + b_{31}\Delta x_1^{(2)} = 0.09 + 0.1 \cdot 0.93 = 0.18.$$

$$\Delta x_3^{(3)} = 0.18,$$

$$R_3^{(4)} = 0,$$

$$R_1^{(4)} = R_1^{(3)} + b_{13}\Delta x_3^{(3)} = 0 + 0.2 \cdot 0.18 = 0.04,$$

$$R_2^{(4)} = R_2^{(3)} + b_{23}\Delta x_3^{(3)} = 0.09 + 0.2 \cdot 0.18 = 0.13.$$

$$\Delta x_2^{(4)} = 0.13,$$

$$\begin{aligned}
R_2^{(5)} &= 0, \\
R_1^{(5)} &= R_1^{(4)} + b_{12}\Delta x_2^{(4)} = 0.04 + 0.2 \cdot 0.13 = 0.07, \\
R_3^{(5)} &= R_3^{(4)} + b_{32}\Delta x_2^{(4)} = 0 + 0.1 \cdot 0.13 = 0.01. \\
\Delta x_1^{(5)} &= 0.07, \\
R_1^{(6)} &= 0, \\
R_2^{(6)} &= 0 + 0.1 \cdot 0.07 = 0.01, \\
R_3^{(6)} &= 0.1 + 0.1 \cdot 0.07 = 0.02. \\
\Delta x_3^{(6)} &= 0.02, \\
R_3^{(7)} &= 0, \\
R_1^{(7)} &= 0 + 0.2 \cdot 0.02 = 0.004 \approx 0.00, \\
R_2^{(7)} &= 0.01 + 0.2 \cdot 0.02 = 0.01. \\
\Delta x_2^{(7)} &= 0.01, \\
R_2^{(8)} &= 0, \\
R_1^{(8)} &= 0 + 0.2 \cdot 0.01 = 0.00, \\
R_3^{(8)} &= 0 + 0.1 \cdot 0.01 = 0.00.
\end{aligned}$$

Окончательно получим:

$$\begin{aligned}
x_1 &= x_1^{(0)} + \Delta x_1^{(2)} + \Delta x_1^{(5)} = 0 + 0.93 + 0.07 = 1.00, \\
x_2 &= x_2^{(0)} + \Delta x_2^{(1)} + \Delta x_2^{(4)} + \Delta x_2^{(7)} = 0 + 0.86 + 0.13 + 0.01 = 1.00, \\
x_3 &= x_3^{(0)} + \Delta x_3^{(0)} + \Delta x_3^{(3)} + \Delta x_3^{(6)} = 0 + 0.80 + 0.18 + 0.02 = 1.00.
\end{aligned}$$

ТЕМА 5. МЕТОДЫ ПРИБЛИЖЕНИЯ ФУНКЦИЙ.

§5.1. Постановка задачи аппроксимации и интерполяции функций.

В вычислительной математике нередки случаи, когда одну функцию приходится заменять другой, более простой и удобной для дальнейшей работы. Такую задачу называют аппроксимацией функции.

Поводом для аппроксимации функции может послужить, в частности, табличный способ ее задания. Предположим, что в результате некоторого эксперимента для конечного набора значений x_i величины x из отрезка $[a, b]$

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$$

получен набор значений $y_i, i = \overline{1, n}$ величины y . Если допустить, что между x и y существует функциональная зависимость $y = f(x)$, можно поставить вопрос о поиске аналитического представления функции $f(x)$.

Повод для аппроксимации может возникнуть даже тогда, когда аналитическое выражение некоторой функции $y = f(x)$ имеется, однако оно оказывается мало пригодным для решения поставленной задачи, потому

что операция, которую требуется осуществить над этой функцией, трудно-выполнима или невыполнима совсем. Например, вычисление значения трансцендентной функции «вручную». Действительно, чтобы вычислить $\ln 3.3256$ проще всего воспользоваться степенным разложением функции, т.е. заменить трансцендентную функцию степенным рядом. При этом получается приближенное значение функции.

Другая ситуация, когда может потребоваться аппроксимация аналитически заданной функции – дифференцирование функции, вычисление определенных и неопределенных интегралов. Если аналитическое выражение функции достаточно сложное, то поставленная задача трудно выполнима, а иногда и невыполнима с помощью элементарных приемов. Например, интеграл $\int_1^2 \frac{\sin x}{x} dx$ существует, но по формуле Ньютона-Лейбница

практически вычислен быть не может, т.к. первообразная $\int \frac{\sin x}{x} dx$ не выражается в элементарных функциях. Аппроксимация подынтегральной функции – один из возможных приемов.

Классический подход к численному решению подобных задач заключается в том, чтобы, опираясь на информацию о функции $f(x)$, по некоторому алгоритму подобрать аппроксимирующую функцию $F(x)$, в определенном смысле «близкую» к $f(x)$.

Для оценки «близости» функций выбирают тот или иной критерий согласия. Эти критерии основаны на использовании той или иной метрики, т.е. способа введения расстояния между функциями, принадлежащими тому или иному классу: $\rho(f(x), F(x))$. Например, для функций, ограниченных на отрезке $[a, b]$, расстояние может быть введено следующим образом: $\rho(f(x), F(x)) = \max_{[a, b]} |f(x) - F(x)|$; для функций, непрерывных на отрезке $[a, b]$, по формуле $\rho(f(x), F(x)) = \int_a^b |f(x) - F(x)| dx$.

Часто процедура аппроксимации связана с другим критерием согласия:

$$\rho(f(x), F(x)) = \min \sum_{i=0}^n [f(x_i) - F(x_i)]^2.$$

Применяемый на его основе способ аппроксимации получил название метода наименьших квадратов.

Для функций, заданных таблично, достаточно распространенным критерием согласия является критерий Чебышева, который определяет расстояние ρ между аппроксимируемой и аппроксимирующей функциями как максимум величины отклонения между этими функциями в узлах сетки:

$$\rho(f(x), F(x)) = \max_{0 \leq i \leq n} |f(x_i) - F(x_i)|.$$

Если $\rho(f(x), F(x))=0$, т.е. $f(x_i)=F(x_i)=y_i$, то соответствующий способ аппроксимации называют интерполяцией, а процедуру вычисления значений $f(x)$ с помощью $F(x)$ в точках, не являющихся узлами сетки - интерполированием.

Задача интерполирования состоит в следующем.

На отрезке $[a, b]$ заданы $(n+1)$ точки x_0, x_1, \dots, x_n , которые называются узлами интерполяции, и значения некоторой функции $f(x)$ в этих точках:

$$f(x_0)=y_0, f(x_1)=y_1, \dots, f(x_n)=y_n. \quad (5.1)$$

Необходимо построить функцию $F(x)$ - интерполирующую функцию, принадлежащую некоторому классу и принимающую в узлах интерполяции заданные значения (5.1), т.е.

$$F(x_i)=y_i, i=\overline{0, n}. \quad (5.2)$$

Геометрически это означает, что нужно найти кривую $y=F(x)$ определенного типа, проходящую через заданные точки $M_i(x_i, y_i)$.

В такой общей постановке задача может иметь бесконечное множество решений или совсем их не иметь.

Сформулированная задача становится однозначной, если вместо произвольной функции $F(x)$ искать полином $P_n(x)$ степени не выше n , удовлетворяющего условиям (5.2), т.е.

$$P_n(x_0)=y_0, P_n(x_1)=y_1, \dots, P_n(x_n)=y_n.$$

Полученную интерполяционную функцию $y=F(x)$ используют для приближенного вычисления значений данной функции $f(x)$ в точках, отличных от узлов интерполяции. Такая операция называется интерполированием функции.

Различают интерполирование в узком смысле, т.е. когда $x \in [x_0, x_n]$, и экстраполирование, т.е. когда $x \notin [x_0, x_n]$. В дальнейшем, под термином интерполирование будет пониматься как первая, так и вторая операции.

§5.2. Конечные разности. Обобщенная степень.

Пусть задана функция $y=f(x)$. Обозначим через $\Delta x=h$ фиксированную величину приращения аргумента (шаг). Тогда выражение

$$\Delta y = \Delta f(x) = f(x+\Delta x) - f(x) \quad (5.3)$$

называется первой конечной разностью функции $y=f(x)$. Аналогично определяются конечные разности высших порядков $\Delta^n y = \Delta(\Delta^{n-1} y)$, $n=2, 3, \dots$

Например:

$$\begin{aligned} \Delta^2 y &= \Delta(\Delta f(x)) = \Delta(f(x+\Delta x) - f(x)) = [f(x+2\Delta x) - f(x+\Delta x)] - \\ &- [f(x+\Delta x) - f(x)] = f(x+2\Delta x) - 2f(x+\Delta x) + f(x). \end{aligned} \quad (5.4)$$

Символ Δ (дельта) можно рассматривать как оператор, ставящий в

соответствие функции $y = f(x)$ функцию $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$.

Легко проверить основные свойства оператора Δ :

$$1) \Delta(U + V) = \Delta U + \Delta V;$$

$$2) \Delta(cU) = c(\Delta U), c - const;$$

3) $\Delta^m(\Delta^n y) = \Delta^{n+m} y$, где $m, n \in \mathbb{Z}^+$ (целые неотрицательные числа), причем $\Delta^0 y = y$.

Из формулы (5.3) имеем:

$$f(x + \Delta x) = f(x) + \Delta f(x).$$

Отсюда, рассматривая Δ как символический множитель, получим:

$$f(x + \Delta x) = (1 + \Delta)f(x). \quad (5.5)$$

Из формулы (5.4):

$$f(x + 2\Delta x) = \Delta^2 f(x) + 2f(x + \Delta x) - f(x) = f(x) + 2\Delta f(x) + \Delta^2 f(x) = (1 + \Delta)^2 f(x); \quad (5.6)$$

и т.д. Окончательно получим:

$$f(x + n \cdot \Delta x) = (1 + \Delta)^n f(x). \quad (5.7)$$

В дальнейшем нам понадобится понятие обобщенной степени.

Определение.

Обобщенной n -степенью числа x называется произведение n сомножителей, первый из которых равен x , а каждый следующий на h меньше предыдущего:

$$x^{[n]} = x(x-h)(x-2h)\dots[x-(n-1)h], \quad (5.8)$$

где $h - const$. Полагают, что $x^{[0]} = 1$. При $h = 0$ обобщенная степень совпадает с обычной: $x^{[n]} = x^n$.

Вычислим конечные разности для обобщенной степени, полагая $\Delta x = h$. Для первой конечной разности имеем:

$$\begin{aligned} \Delta x^{[n]} &= (x+h)^{[n]} - x^{[n]} = (x+h)x(x-h)\dots[x-(n-2)h] - \\ &- x(x-h)\dots[x-(n-1)h] = \\ &= x(x-h)\dots[x-(n-2)h] \cdot \{(x+h) - [x-(n-1)h]\} = \\ &= x(x-h)\dots[x-(n-2)h] \cdot n \cdot h = n \cdot h \cdot x^{[n-1]}, \end{aligned}$$

то есть

$$\Delta x^{[n]} = h \cdot n \cdot x^{[n-1]}. \quad (5.9)$$

Для второй конечной разности:

$$\Delta^2 x^{[n]} = \Delta(\Delta x^{[n]}) = \Delta(nhx^{[n-1]}) = nh(n-1)hx^{[n-2]} = h^2 n(n-1)x^{[n-2]},$$

то есть

$$\Delta^2 x^{[n]} = h^2 n(n-1)x^{[n-2]}. \quad (5.10)$$

Аналогично,

$$\Delta^3 x^{[n]} = h^3 n(n-1)(n-2)x^{[n-3]},$$

и так далее.

Окончательно будем иметь:

$$\Delta^k x^{[n]} = h^k n(n-1)\dots(n-(k-1))x^{[n-k]}, k = \overline{1, n}, \quad (5.11)$$

$$\Delta^k x^{[n]} = 0, \text{ если } k > n. \quad (5.12)$$

§5.3. Первая интерполяционная формула Ньютона.

Пусть для функции $y = f(x)$ заданы значения $y_i = f(x_i)$ для равноотстоящих значений независимой переменной $x_i = x_0 + ih, i = \overline{0, n}$, где h - шаг интерполяции. Требуется подобрать полином $P_n(x)$ степени не выше n , принимающий в точках x_i значения

$$P_n(x_i) = y_i, i = \overline{0, n}. \quad (5.13)$$

Условия (5.13) эквивалентны тому, что

$$\Delta^m P_n(x_0) = \Delta^m y_0, m = \overline{0, n}. \quad (5.14)$$

Будем искать полином в виде

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + \dots + a_n(x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_{n-1}). \quad (5.15)$$

Используя понятие обобщенной степени, запишем выражение (5.15) в виде:

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0)^{[1]} + a_2(x - x_0)^{[2]} + \dots + a_n(x - x_0)^{[n]}. \quad (5.16)$$

Чтобы полином был определен, нужно найти коэффициенты $a_i, i = \overline{0, n}$. Полагая $x = x_0$ в выражении (5.16), получим

$$P_n(x_0) = y_0 = a_0. \quad (5.17)$$

Чтобы найти коэффициент a_1 , составим первую конечную разность:

$$\Delta P_n(x) = a_1 h + 2a_2 h(x - x_0)^{[1]} + \dots + n h a_n (x - x_0)^{[n-1]}.$$

Полагая $x = x_0$, получим:

$$\Delta P_n(x_0) = \Delta y_0 = a_1 h,$$

откуда

$$a_1 = \frac{\Delta y_0}{h}. \quad (5.18)$$

Для определения коэффициента a_2 составим вторую конечную разность:

$$\Delta^2 P_n(x) = 2! h^2 a_2 + 2 \cdot 3 \cdot h^2 a_3 (x - x_0)^{[1]} + \dots + n(n-1) h^2 a_n (x - x_0)^{[n-2]}.$$

Положив $x = x_0$, получим:

$$\Delta^2 P_n(x_0) = \Delta^2 y_0 = 2! h^2 a_2,$$

откуда

$$a_2 = \frac{\Delta^2 y_0}{2! h^2}. \quad (5.19)$$

Продолжая процесс, получим:

$$a_k = \frac{\Delta^k y_0}{k! h^k}, k = \overline{0, n}, \quad (5.20)$$

причем $0! = 1, \Delta^0 y = y$.

Подставляя найденные значения коэффициентов a_k в выражение (5.16), получим интерполяционный полином Ньютона:

$$P_n(x) = y_0 + \frac{\Delta y_0}{1!h} (x - x_0)^{[1]} + \frac{\Delta^2 y_0}{2!h^2} (x - x_0)^{[2]} + \dots + \frac{\Delta^n y_0}{n!h^n} (x - x_0)^{[n]}. \quad (5.21)$$

Этот полином полностью удовлетворяет требованиям поставленной задачи. Действительно, степень полинома $P_n(x)$ не выше n ; $P_n(x_0) = y_0$;

$$\begin{aligned} P_n(x_k) &= y_0 + \frac{\Delta y_0}{h} (x_k - x_0) + \frac{\Delta^2 y_0}{2!h^2} (x_k - x_0)(x_k - x_1) + \dots + \\ &+ \frac{\Delta^k y_0}{k!h^k} (x_k - x_0)(x_k - x_1) \dots (x_k - x_{k-1}) = y_0 + k\Delta y_0 + \frac{k(k-1)}{2!} \Delta^2 y_0 + \dots + \\ &+ \frac{k(k-1) \dots 1}{k!} \Delta^k y_0 = (1 + \Delta)^k y_0 = y_k, \quad k = \overline{1, n}. \end{aligned}$$

Для практического использования первую интерполяционную формулу Ньютона записывают в несколько преобразованном виде. Для этого введем новую переменную

$$q = \frac{x - x_0}{h}. \quad (5.22)$$

Тогда

$$\begin{aligned} \frac{(x - x_0)^{[k]}}{h^k} &= \frac{(x - x_0)}{h} \cdot \frac{(x - x_0 - h)}{h} \cdot \dots \cdot \frac{(x - x_0 - (k-1)h)}{h} = \\ &= q(q-1) \dots (q-k+1), \quad k = \overline{1, n}. \end{aligned} \quad (5.23)$$

Подставляя (5.23) в (5.21), получим окончательный вид первой интерполяционной формулы Ньютона:

$$P_n(x) = y_0 + q\Delta y_0 + \frac{q(q-1)}{2!} \Delta^2 y_0 + \dots + \frac{q(q-1) \dots (q-n+1)}{n!} \Delta^n y_0. \quad (5.24)$$

Если в формуле (5.24) положить $n = 1$, то получим формулу линейного интерполирования:

$$P_n(x) = y_0 + q\Delta y_0. \quad (5.25)$$

При $n = 2$ получим формулу параболического или квадратичного интерполирования:

$$P_n(x) = y_0 + q\Delta y_0 + \frac{q(q-1)}{2!} \Delta^2 y_0. \quad (5.26)$$

Первую интерполяционную формулу Ньютона используют для интерполирования функции в окрестности начальной точки x_0 , где $q = \frac{x - x_0}{h}$ мало по абсолютной величине и представляет собой число шагов, необходимых для достижения точки x , исходя из точки x_0 .

Остаточный член первой интерполяционной формулы Ньютона:

$$R_n(x) = h^{n+1} \frac{q(q-1) \dots (q-n)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi), \quad (5.27)$$

где ξ - некоторое промежуточное значение между узлами интерполирования x_0, x_1, \dots, x_n и рассматриваемой точкой x .

Учитывая, что $f^{(n+1)}(x) = \lim_{h \rightarrow \infty} \frac{\Delta^{n+1} y}{h^{n+1}}$, приближенно можно положить:

$$f^{(n+1)}(x) \approx \frac{\Delta^{n+1} y_0}{h^{n+1}}.$$

В этом случае соотношение (5.27) примет вид:

$$R_n(x) \approx \frac{q(q-1)\dots(q-n)}{(n+1)!} \Delta^{n+1} y_0. \quad (5.28)$$

§5.4. Вторая интерполяционная формула Ньютона.

Вторая интерполяционная формула Ньютона применяется для интерполирования в окрестности конечного значения x_k .

Пусть для функции $y = f(x)$ заданы значения $y_i = f(x_i)$ для равноотстоящих значений независимой переменной $x_i = x_0 + ih, i = \overline{0, n}$. Построим полином следующего вида:

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x - x_n) + a_2(x - x_n)(x - x_{n-1}) + \dots + a_n(x - x_n)(x - x_{n-1})\dots(x - x_1). \quad (5.29)$$

Используя обобщенную степень, получим:

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x - x_n)^{[1]} + a_2(x - x_{n-1})^{[2]} + \dots + a_n(x - x_1)^{[n]}. \quad (5.30)$$

Найдем коэффициенты a_i из условий $P_n(x_i) = y_i, i = \overline{0, n}$. Эти условия равносильны

$$\Delta^i P_n(x_{n-i}) = \Delta^i y_{n-i}, i = \overline{0, n}. \quad (5.31)$$

Полагая $x = x_n$ в выражении (5.30), получим

$$P_n(x_n) = y_n = a_0. \quad (5.32)$$

Чтобы найти коэффициент a_1 , составим первую конечную разность:

$$\Delta P_n(x) = a_1 h + 2a_2 h(x - x_{n-1})^{[1]} + 3a_3 h(x - x_{n-2})^{[2]} + \dots + n h a_n (x - x_1)^{[n-1]}.$$

Полагая $x = x_{n-1}$, получим:

$$\Delta P_n(x_{n-1}) = \Delta y_{n-1} = a_1 h.$$

Отсюда

$$a_1 = \frac{\Delta y_{n-1}}{h}. \quad (5.33)$$

Из второй конечной разности

$$\Delta^2 P_n(x) = 2! h^2 a_2 + 3 \cdot 2 \cdot h^2 a_3 (x - x_{n-2})^{[1]} + \dots + n(n-1) h^2 a_n (x - x_1)^{[n-2]}$$

при $x = x_{n-2}$ находим:

$$\Delta^2 P_n(x_{n-2}) = \Delta^2 y_{n-2} = 2! h^2 a_2.$$

Следовательно,

$$a_2 = \frac{\Delta^2 y_{n-2}}{2! h^2}. \quad (5.34)$$

Продолжая дальнейшее вычисление конечных разностей, получим:

$$a_k = \frac{\Delta^k y_{n-k}}{k! h^k}, k = \overline{0, n}. \quad (5.35)$$

Подставляя найденные значения коэффициентов a_k в выражение (5.29), получим вторую интерполяционную формулу Ньютона:

$$P_n(x) = y_n + \frac{\Delta y_{n-1}}{1! h} (x - x_n) + \frac{\Delta^2 y_{n-2}}{2! h^2} (x - x_n)(x - x_{n-1}) + \dots + \frac{\Delta^n y_0}{n! h^n} (x - x_n) \dots (x - x_1). \quad (5.36)$$

Введем новую переменную

$$t = \frac{x - x_0}{h}, \quad (5.37)$$

тогда

$$\frac{x - x_{n-k}}{h} = \frac{x - (x_n - kh)}{h} = t + k, k = \overline{0, n-1}. \quad (5.38)$$

С учетом (5.38) вторая интерполяционная формула Ньютона примет вид:

$$P_n(x) = y_n + t \Delta y_{n-1} + \frac{t(t+1)}{2!} \Delta^2 y_{n-2} + \frac{t(t+1)(t+2)}{3!} + \dots + \frac{t(t+1) \dots (t+n-1)}{n!} \Delta^n y_0. \quad (5.39)$$

Остаточный член второй интерполяционной формулы Ньютона:

$$R_n(x) = h^{n+1} \frac{t(t+1) \dots (t+n)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi) \approx h^{n+1} \frac{t(t+1) \dots (t+n)}{(n+1)!} \Delta^{n+1} y_0, \quad (5.40)$$

где ξ - промежуточное значение между узлами интерполирования x_0, x_1, \dots, x_n и точкой x .

§5.5. Интерполяционная формула Лагранжа.

Пусть на отрезке $[a, b]$ задана произвольная система точек $x_i, i = \overline{0, n}$, в которых известны значения функции $y_i = f(x_i), i = \overline{0, n}$. То есть, задана следующая таблица

Таблица 5.1.

	x_i	x_0	x_1		x_n
	y_i	y_0	y_1		y_n

Установим зависимость $y(x)$ одного ряда чисел от другого и построим новую функцию, которая с определенной степенью точности будет приближена к заданной.

Построим многочлен $P_n(x)$ таким образом, чтобы его значения совпали со значениями функции, заданными в таблице, для тех же аргументов,

то есть

$$P_n(x_i) = y_i, i = \overline{0, n}. \quad (5.41)$$

Лагранж предложил строить многочлен n -й степени в виде:

$$P_n(x) = a_0(x-x_1)\dots(x-x_n) + a_1(x-x_0)(x-x_2)\dots(x-x_n) + \dots + a_n(x-x_0)\dots(x-x_{n-1}). \quad (5.42)$$

Здесь в каждом слагаемом отсутствует скобка $(x-x_i)$, которой соответствует коэффициент a_i .

Найдем неизвестные коэффициенты $a_i, i = \overline{0, n}$, называемые коэффициентами Лагранжа, используя условие (5.40).

При $x = x_0$: $P_n(x_0) = y_0$.

$$P_n(x_0) = a_0(x_0-x_1)(x_0-x_2)\dots(x_0-x_n) = y_0.$$

Следовательно, коэффициент a_0 вычисляется по следующей формуле:

$$a_0 = \frac{y_0}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\dots(x_0-x_n)}.$$

При $x = x_1$: $P_n(x_1) = y_1$.

$$P_n(x_1) = a_1(x_1-x_0)(x_1-x_2)\dots(x_1-x_n) = y_1.$$

Следовательно, коэффициент a_1 вычисляется по следующей формуле:

$$a_1 = \frac{y_1}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)\dots(x_1-x_n)}.$$

Таким образом, коэффициенты $a_i, i = \overline{0, n}$ вычисляются по формулам:

$$a_i = \frac{y_i}{(x_i-x_0)\dots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\dots(x_i-x_n)}.$$

С учетом найденных коэффициентов интерполяционный полином Лагранжа запишется в виде

$$P_n(x) = y_0 \frac{(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n)}{(x_0-x_1)\dots(x_0-x_n)} + \dots + y_n \frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{n-1})}{(x_n-x_0)\dots(x_n-x_{n-1})}. \quad (5.43)$$

Для интерполяционной формулы Лагранжа справедлива оценка погрешности:

$$|R_n(x)| = |f(x) - P_n(x)| \leq \max_{a \leq x \leq b} |f^{(n+1)}(x)| \cdot \frac{|\Pi_{n+1}(x)|}{(n+1)!}, \quad (5.44)$$

где $\Pi_{n+1}(x) = (x-x_0)\dots(x-x_i)\dots(x-x_n)$.

Пример 5.1. По заданной системе точек

Таблица 5.2.

x_i	$\frac{\pi}{6} = 0.524$	$\frac{\pi}{4} = 0.785$	$\frac{\pi}{2} = 1.571$
y_i	0.5	0.707	1.0

--	--	--	--

построить интерполяционный многочлен Лагранжа второго порядка вида:

$$P_2(x) = a_0(x - x_1)(x - x_2) + a_1(x - x_0)(x - x_2) + a_2(x - x_0)(x - x_1).$$

Коэффициенты этого многочлена будут вычислены по следующим формулам:

$$a_0 = \frac{y_0}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} = \frac{0.5}{(0.524 - 0.785)(0.524 - 1.571)} = 1.824,$$

$$a_1 = \frac{y_1}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} = \frac{0.707}{(0.785 - 0.524)(0.785 - 1.571)} = -3.439,$$

$$a_2 = \frac{y_2}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} = \frac{1}{(1.571 - 0.524)(1.571 - 0.785)} = 1.216.$$

Тогда многочлен Лагранжа второго порядка будет иметь вид:

$$P_2(x) = 1.824(x - x_1)(x - x_2) - 3.439(x - x_0)(x - x_2) + 1.216(x - x_0)(x - x_1) = -0.4x^2 + 1.32x - 0.08.$$

Учитывая, что таблица приведена для функции $y = \sin(x)$, вычисленной в узловых точках $\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}$, сравним погрешность вычислений данной

функции и построенного многочлена в контрольной точке $\frac{\pi}{3}$:

$$y\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \cong 0.866 \text{ и } P_2\left(\frac{\pi}{3}\right) = 0.859.$$

Погрешность вычислений равна

$$\left| \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) - P_2\left(\frac{\pi}{3}\right) \right| = |0.866 - 0.859| = 0.007.$$

Ниже приведены графики функции $y = \sin(x)$ и построенного полинома Лагранжа на заданном интервале. Из рисунка 5.1 видно, что многочлена второго порядка достаточно для обеспечения необходимой точности воспроизводимой синусоиды.

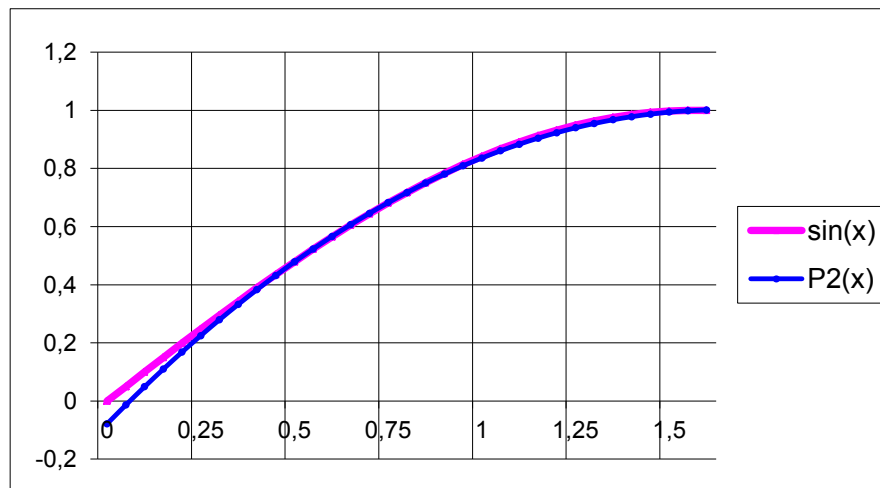


Рис.5.1.

Если таблица 5.1, для которой построена формула Лагранжа, задана для равноотстоящих узлов $x_{i+1} = x_i + h, i = \overline{0, n-1}$, то формула Лагранжа упрощается. Обозначим через $q = \frac{x-x_0}{h}$. Тогда

$$\begin{aligned} \frac{x-x_1}{h} &= \frac{x-(x_0+h)}{h} = \frac{x-x_0}{h} - 1 = q-1, \\ \frac{x-x_2}{h} &= q-2, \dots, \\ \frac{x-x_i}{h} &= q-i, i = \overline{0, n}. \end{aligned}$$

С учетом введенных обозначений формула Лагранжа запишется так:

$$\begin{aligned} P_n(q) &= y_0 \frac{(q-1)(q-2)\dots(q-n)}{(-1)(-2)\dots(-n)} + y_1 \frac{q(q-2)\dots(q-n)}{(-1)(-2)\dots(-(n-1))} + \\ &+ \dots + y_n \frac{q(q-1)\dots(q-(n-1))}{n(n-1)\dots 1}. \end{aligned}$$

Запишем формулу Лагранжа в случае, если $n = 1$:

$$\begin{aligned} P_1(q) &= y_0 \frac{x-x_1}{x_0-x_1} + y_1 \frac{x-x_0}{x_1-x_0} = -y_0(q-1) + y_1 q = \\ &= y_0 - y_0 q + y_1 q = y_0 + q(y_1 - y_0) = y_0 + q\Delta y_0 \end{aligned}$$

Получили формулу линейной интерполяции (5.25):

$$P_1(q) = y_0 + q\Delta y_0.$$

Здесь $\Delta y_i = y_i - y_{i-1}, i = 1, 2, \dots$ - табличные разности первого порядка.

При $n = 2$ получаем формулу квадратичной интерполяции (5.26):

$$P_2(q) = y_0 + q\Delta y_0 + \frac{q(q-1)}{2} \Delta^2 y_0.$$

Здесь $\Delta^2 y_i = \Delta y_{i+1} - \Delta y_i, i = 1, 2, \dots$ - табличные разности второго порядка, и так далее. Продолжая этот процесс, окончательно получим:

$$P_n(q) = y_0 + q\Delta y_0 + \frac{q(q-1)}{2!} \Delta^2 y_0 + \dots + \frac{q(q-1)\dots(q-(n-1))}{n!} \Delta^n y_0.$$

Эта формула называется первой интерполяционной формулой Ньютона (сравните с формулой (5.24)). Для нее справедлива оценка остаточного члена (5.27).

Если обозначить через $t = \frac{x-x_n}{h}$, то с учетом введенного обозначения, получим:

$$\begin{aligned} \frac{x-x_{n-1}}{h} &= \frac{x-(x_n-h)}{h} = \frac{x-x_n}{h} + 1 = t+1, \dots, \\ \frac{x-x_{n-i}}{h} &= t+i, i = \overline{0, n}. \end{aligned}$$

Тогда формула (5.43) примет вид:

$$P_n(t) = y_n + t\Delta y_{n-1} + \frac{t(t+1)}{2!} \Delta^2 y_{n-2} + \dots + \frac{t(t+1)\dots(t+n-1)}{n!} \Delta^n y_0.$$

Эта формула называется второй интерполяционной формулой Ньютона (сравните с формулой (5.39)). Для нее справедлива оценка остаточного члена (5.40).

§5.6. Метод наименьших квадратов для обработки результатов экспериментов.

Данный метод относится к классу аппроксимационных методов. Идея метода состоит в том, чтобы по данным эксперимента построить приближенно функцию, отображающую зависимость ее от x , в виде многочлена с тем расчетом, чтобы сумма квадратов отклонений построенной функции от экспериментальной в узловых точках была минимальна. Будем строить функцию в виде многочлена

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0.$$

Используем для построения результаты эксперимента:

Таблица 5.3

	x_i	x_0	x_1		x_m
	y_i	y_0	y_1		y_m

Построить многочлен, значит, определить его коэффициенты $a_i, i = \overline{0, n}$. Для этого введем функцию $S = \sum_{i=0}^m \delta_i^2$ и потребуем, чтобы $\min S = \min \sum_{i=0}^m \delta_i^2$, где $\delta_i = f(x_i) - y_i$ - отклонение функции от экспериментальной в узлах $x_i, i = \overline{0, m}$.

Используя вид $f(x)$, получим:

$$\min_{a_0, a_1, \dots, a_n} S = \min_{a_0, \dots, a_n} \left\{ \sum_{i=0}^m (a_n x_i^n + a_{n-1} x_i^{n-1} + \dots + a_0 - y_i)^2 \right\}.$$

Необходимыми условиями экстремума функции S является равенство нулю ее первой производной по всем переменным $\frac{\partial S}{\partial a_0} = 0; \frac{\partial S}{\partial a_1} = 0; \dots; \frac{\partial S}{\partial a_n} = 0$. Расписав эти условия, получим СЛАУ вида:

$$\begin{cases} \frac{\partial S}{\partial a_0} = 2 \sum_{i=0}^m (a_n x_i^n + a_{n-1} x_i^{n-1} + \dots + a_0 - y_i) = 0, \\ \frac{\partial S}{\partial a_1} = 2 \sum_{i=0}^m (a_n x_i^n + a_{n-1} x_i^{n-1} + \dots + a_0 - y_i) x_i = 0, \\ \dots \\ \frac{\partial S}{\partial a_n} = 2 \sum_{i=0}^m (a_n x_i^n + a_{n-1} x_i^{n-1} + \dots + a_0 - y_i) x_i^n = 0. \end{cases}$$

Запишем систему для определения a_0, \dots, a_n в нормальной форме:

$$\begin{cases} (m+1)a_0 + \sum_{i=0}^m x_i a_1 + \sum_{i=0}^m x_i^2 a_2 + \dots + \sum_{i=0}^m x_i^n a_n = \sum_{i=0}^m y_i, \\ \sum_{i=0}^m x_i a_0 + \sum_{i=0}^m x_i^2 a_1 + \dots + \sum_{i=0}^m x_i^{n+1} a_n = \sum_{i=0}^m x_i y_i, \\ \dots \\ \sum_{i=0}^m x_i^n a_0 + \sum_{i=0}^m x_i^{n+1} a_1 + \dots + \sum_{i=0}^m x_i^{2n} a_n = \sum_{i=0}^m x_i^n y_i. \end{cases}$$

Решим систему одним из известных методов и найдем коэффициенты a_0, \dots, a_n , которые затем подставим в искомый многочлен.

Запишем алгоритм метода наименьших квадратов.

1. Вводим таблицу чисел $x_i, y_i, i = \overline{0, m}$.

2. Вычисляем $\sum_{i=0}^m x_i, \sum_{i=0}^m x_i^2, \sum_{i=0}^m x_i^3, \dots, \sum_{i=0}^m x_i^{2n}, \sum_{i=0}^m y_i, \sum_{i=0}^m x_i y_i, \dots, \sum_{i=0}^m x_i^n y_i$.

3. Решая любым известным методом полученную систему линейных алгебраических уравнений, находим a_0, \dots, a_n - коэффициенты искомого многочлена.

Пример 5.2. По заданной системе точек (см. Табл.5.3) из примера 5.1 построить аппроксимационные многочлены первого $P_1(x) = a_1 x + a_0$ и второго порядков $P_2(x) = a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ методом наименьших квадратов.

Для построения необходимо вычислить следующие суммы

$$\sum_{i=0}^2 x_i = 2.88; \quad \sum_{i=0}^2 x_i^2 = 3.358; \quad \sum_{i=0}^2 y_i = 2.207; \quad \sum_{i=0}^2 x_i y_i = 2.388,$$

и решить СЛАУ относительно неизвестных коэффициентов a_0, a_1 вида:

$$\begin{cases} 3a_0 + 2.88a_1 = 2.207; \\ 2.88a_0 + 3.358a_1 = 2.388. \end{cases}$$

Значения неизвестных коэффициентов равны:

$$a_0 = 0.03; \quad a_1 = 0.454.$$

Тогда искомый многочлен первого порядка будет иметь вид:

$$P_2(x) = 0.03x + 0.454.$$

Погрешность вычислений по данной формуле в контрольной точке $\frac{\pi}{3}$ составляет

$$\left| \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) - P_1\left(\frac{\pi}{3}\right) \right| = |0.866 - 0.775| = 0.091.$$

Для построения многочлена второго порядка дополнительно необходимо вычислить следующие суммы

$$\sum_{i=0}^2 x_i^3 = 4.504; \quad \sum_{i=0}^2 x_i^4 = 6.544; \quad \sum_{i=0}^2 x_i^2 y_i = 3.041,$$

и решить СЛАУ относительно неизвестных коэффициентов a_0, a_1, a_2 вида:

$$\begin{cases} 3a_0 + 2.88a_1 + 3.358a_2 = 2.207; \\ 2.88a_0 + 3.358a_1 + 4.504a_2 = 2.388; \\ 3.358a_0 + 4.504a_1 + 6.544a_2 = 3.041. \end{cases}$$

Значения неизвестных коэффициентов равны:

$$a_0 = -0.004; a_1 = 1.146; a_2 = -0.323.$$

Тогда искомый многочлен второго порядка будет иметь вид:

$$P_2(x) = -0.323x^2 + 1.146x - 0.004.$$

Нетрудно заметить, что в узловых точках значения многочлена и табличной функции не совпадают (Рис.5.2). Погрешность вычислений по данной формуле в контрольной точке равна:

$$\left| \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) - P_2\left(\frac{\pi}{3}\right) \right| = |0.866 - 0.844| = 0.022.$$

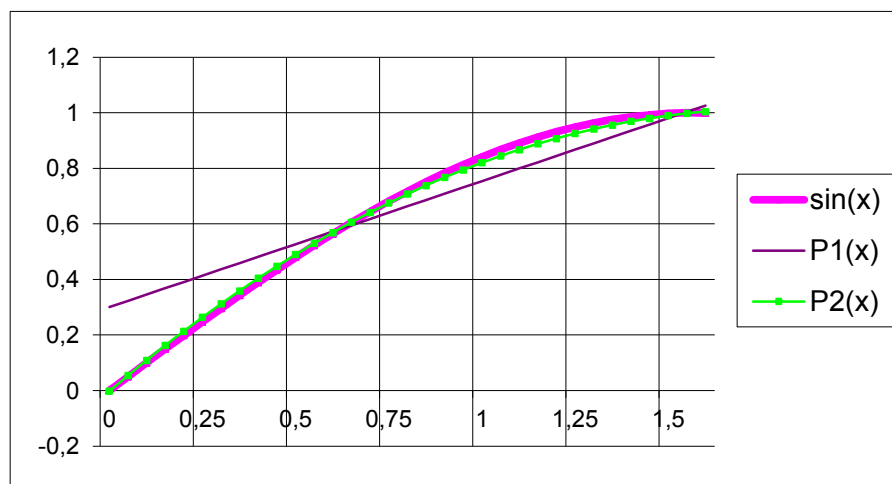


Рис.5.2.

§5.7. Обработка экспериментальных данных некоторыми другими функциями.

Во многих случаях экспериментальные данные могут быть аппроксимированы не только полиномами различных порядков. Это обусловлено физическими, экономическими и другими законами исследуемых процессов, а также опытом испытателя. Если, например, испытатель уверен, что параметры какого-либо прибора, снятые с испытательного стенда, по своим физическим характеристикам являются близкими к экспоненциальным, то нет смысла аппроксимировать их полиномами. Также экспериментальные данные могут быть аппроксимированы показательными, логарифмическими, тригонометрическими и другими функциями.

В качестве примера рассмотрим аппроксимацию экспериментальных данных, приведенных в таблице 5.3, экспоненциальной функцией $y = ae^{bx}$, где a и b - параметры искомой функции, которые требуется определить.

Сформулированную задачу будем решать методом наименьших квадратов. Функция S в этом случае запишется так:

$$S = \sum_{i=0}^m (ae^{bx_i} - y_i)^2.$$

Расписав необходимые условия экстремума этой функции по переменным a и b , и, сделав несложные преобразования, получим СЛАУ второго порядка вида:

$$\begin{cases} (m+1)a + \sum_{i=0}^m x_i b = \sum_{i=0}^m \ln y_i, \\ \sum_{i=0}^m x_i a + \sum_{i=0}^m x_i^2 b = \sum_{i=0}^m x_i \ln y_i. \end{cases}$$

Решая эту систему любым известным методом, определим коэффициенты экспоненциальной функции a и b .

Пример 5.3. По заданной в таблице 5.3 системе точек

Таблица 5.4.

x_i	0	0,7	1,39	1,65	1,93	2,2	2,45	2,79
y_i	0,05	0,07	0,24	0,42	0,66	0,78	0,89	1,07

методом наименьших квадратов построить аппроксимационную экспоненциальную функцию вида:

$$y = ae^{bx}.$$

Для этого необходимо вычислить следующее суммы:

$$\sum_{i=0}^7 x_i = 13.11, \quad \sum_{i=0}^7 x_i^2 = 27.5, \quad \sum_{i=0}^7 \ln y_i = -8.68, \quad \sum_{i=0}^7 x_i \ln y_i = -6.8,$$

и решить СЛАУ второго порядка относительно неизвестных коэффициентов a и b :

$$\begin{cases} 8a + 13.11b = -8.68, \\ 13.11a + 27.5b = -6.8. \end{cases}$$

Значения неизвестных коэффициентов равны: $a = 0.04$, $b = 1.24$.

Тогда искомая экспоненциальная функция будет иметь вид:

$$y = 0.04e^{1.24x}.$$

График этой функции, а также экспериментальные данные в таблице 5.4, приведены на рисунке 5.3.

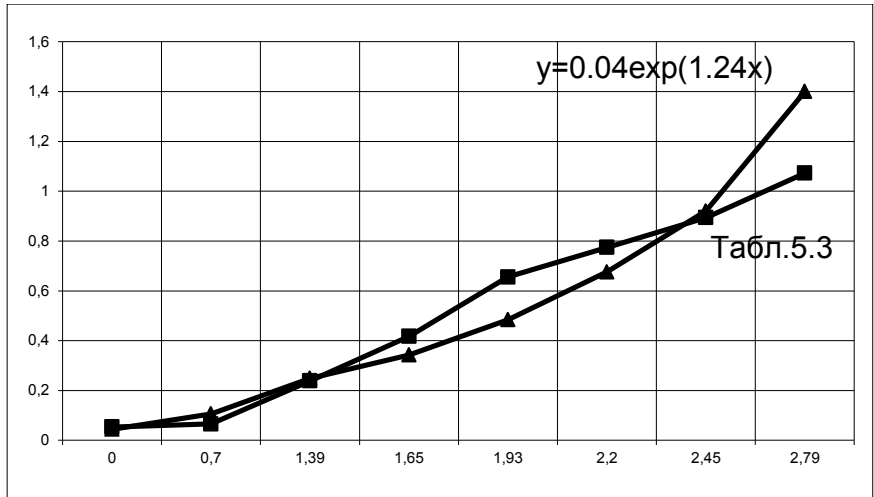


Рис.5.3.

6. ОСНОВНЫЕ ПРИЛОЖЕНИЯ ТЕОРИИ ИНТЕРПОЛИРОВАНИЯ.

§6.1. Численное дифференцирование.

6.1.1. Постановка вопроса.

При решении практических задач часто требуется найти производные указанных порядков от функции $y = f(x)$, заданной таблично, или, в силу сложности аналитического выражения функции $y = f(x)$, непосредственное ее дифференцирование затруднено. В этих случаях прибегают к приближенному дифференцированию.

Для этого на отрезке $[a, b]$ функцию $y = f(x)$ заменяют интерполирующей функцией $F(x)$ (чаще всего интерполирующим полиномом $P_n(x)$), затем полагают $f'(x) = F'(x)$ при $a \leq x \leq b$. Аналогично поступают при нахождении производных высших порядков от функции $y = f(x)$.

Если для интерполирующей функции известна погрешность

$$R(x) = f(x) - F(x),$$

то погрешность производной

$$r(x) = f'(x) - F'(x) = R'(x),$$

т.е. погрешность производной интерполирующей функции равна производной от погрешности этой функции. То же справедливо для производных высших порядков.

Приближенное дифференцирование является менее точной операцией, чем интерполирование. Близость друг к другу ординат двух кривых $y = f(x)$ и $Y = F(x)$ на отрезке $[a, b]$ еще не гарантирует близости на этом отрезке их производных $f'(x)$ и $F'(x)$, то есть малого расхождения угловых коэффициентов касательных к рассматриваемым кривым при одинаковых значениях аргумента.

6.1.2. Формулы приближенного дифференцирования, основанные на первой интерполяционной формуле Ньютона.

Пусть на отрезке $[a, b]$ заданы равноотстоящие точки x_i : $x_i = x_0 + ih, i = \overline{0, n}$, $h = \frac{b-a}{n}$, и известны значения функции в этих точках $y_i = f(x_i), i = \overline{0, n}$. Требуется найти производные $f'(x), f''(x), \dots$ на отрезке $[a, b]$ (заранее известно, что эти производные существуют).

Заменим функцию $y = f(x)$ интерполяционным полиномом Ньютона, построенным для узлов $x_i, i = \overline{0, n}$, воспользовавшись первой интерполяционной формулой Ньютона:

$$y(x) = P_n(x) = y_0 + q\Delta y_0 + \frac{q(q-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \frac{q(q-1)(q-2)}{3!}\Delta^3 y_0 + \frac{q(q-1)(q-2)(q-3)}{4!}\Delta^4 y_0 + \dots + \frac{q(q-1)\dots(q-(n-1))}{n!}\Delta^n y_0, \quad (6.1)$$

где $q = \frac{x-x_0}{h}$.

Произведя перемножение биномов и приведя подобные, получим:

$$y(x) = y_0 + q\Delta y_0 + \frac{q^2 - q}{2!}\Delta^2 y_0 + \frac{q^3 - 3q^2 + 2q}{3!}\Delta^3 y_0 + \frac{q^4 - 6q^3 + 11q^2 - 6q}{4!}\Delta^4 y_0 + \dots \quad (6.2)$$

Так как

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dq} \cdot \frac{dq}{dx} = \frac{1}{h} \cdot \frac{dy}{dq},$$

то

$$y'(x) = \frac{1}{h} \left[\Delta y_0 + \frac{2q-1}{2}\Delta^2 y_0 + \frac{3q^2-6q+2}{6}\Delta^3 y_0 + \frac{2q^3-9q^2+11q-3}{12}\Delta^4 y_0 + \dots \right] \quad (6.3)$$

Аналогично, так как

$$y''(x) = \frac{d(y'(x))}{dx} = \frac{d(y'(x))}{dq} \cdot \frac{dq}{dx},$$

то

$$y''(x) = \frac{1}{h^2} \left[\Delta^2 y_0 + (q-1)\Delta^3 y_0 + \frac{6q^2-18q+11}{12}\Delta^4 y_0 + \dots \right]. \quad (6.4)$$

Таким образом можно вычислить производную любого порядка.

При нахождении производных $f'(x), f''(x), \dots$ в фиксированной точке x в качестве x_0 следует брать ближайшее к x табличное значение аргумента.

Формулы (6.3) и (6.4) упрощаются, если нужно подсчитать производные в узлах интерполяции. Полагая $x = x_0, q = 0$, получаем:

$$y'(x) = \frac{1}{h} \left[\Delta y_0 - \frac{1}{2}\Delta^2 y_0 + \frac{1}{3}\Delta^3 y_0 - \frac{1}{4}\Delta^4 y_0 + \dots \right], \quad (6.5)$$

$$y''(x) = \frac{1}{h^2} \left[\Delta^2 y_0 - \Delta^3 y_0 + \frac{11}{12} \Delta^4 y_0 + \dots \right]. \quad (6.6)$$

Пусть $P_n(x)$ - интерполяционный полином Ньютона, содержащий конечные разности $\Delta y_0, \Delta^2 y_0, \dots, \Delta^n y_0$ и $R_n(x) = f(x) - P_n(x)$, тогда $R'_n(x) = f'(x) - P'_n(x)$. Но $R_n(x) = h^{n+1} \cdot \frac{q(q-1)\dots(q-n)}{(n+1)!} y^{(n+1)}(\xi)$. Тогда, если $y(x) \in C^{(n+2)}$, то

$$R'_n(x) = \frac{dR_n}{dq} \cdot \frac{dq}{dx} = \frac{h^n}{(n+1)!} \times \left\{ y^{(n+1)}(\xi) \cdot \frac{d}{dq} [q(q-1)\dots(q-n)] + q(q-1)\dots(q-n) \frac{dy^{(n+1)}(\xi)}{dq} \right\}. \quad (6.7)$$

Полагая $\frac{dy^{(n+1)}(\xi)}{dq}$ - ограниченной и учитывая, что $\frac{d}{dq} [q(q-1)\dots(q-n)]_{q=0} = (-1)^n \cdot n!$, получаем при $x = x_0, q = 0$:

$$R'_n(x_0) = (-1)^n \cdot \frac{h^n \cdot n!}{(n+1)!} y^{(n+1)}(\xi) = (-1)^n \cdot \frac{h^n}{n+1} y^{(n+1)}(\xi). \quad (6.8)$$

Так как $y^{(n+1)}(\xi)$ сложно определить, то при малом шаге h принято считать $y^{(n+1)}(\xi) \approx \frac{\Delta^{n+1} y_0}{h^{n+1}}$. Тогда (6.8) примет вид:

$$R'_n(x_0) = (-1)^n \cdot \frac{h^n}{n+1} \cdot \frac{\Delta^{n+1} y_0}{h^{n+1}} = \frac{(-1)^n}{h} \cdot \frac{\Delta^{n+1} y_0}{n+1}. \quad (6.9)$$

Аналогично находится $R''_n(x_0)$ и так далее.

Формулы приближенного дифференцирования аналогичным образом можно получить, используя вторую интерполяционную формулу Ньютона.

6.1.3. Формулы численного дифференцирования для равноотстоящих точек, основанные на интерполяционной формуле Лагранжа.

Пусть даны равноотстоящие точки $x_i, i = \overline{0, n}$, такие, что $x_i = x_0 + ih, i = \overline{0, n}$, и известны значения функции в этих точках $y_i = f(x_i), i = \overline{0, n}$. Для данной системы узлов $y_i = f(x_i)$ построим интерполяционный полином Лагранжа:

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^n y_i \cdot \frac{(x-x_0)\dots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\dots(x-x_n)}{(x_i-x_0)\dots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\dots(x_i-x_n)} = \sum_{i=0}^n \frac{\Pi_{n+1}(x) \cdot y_i}{(x-x_i) \cdot \Pi'_{n+1}(x_i)}, \quad (6.10)$$

где $\Pi_{n+1}(x) = (x-x_0)\dots(x-x_i)\dots(x-x_n)$.

Для $L_n(x)$ справедливо соотношение

$$L_n(x_i) = y_i.$$

Введем новую переменную $q = \frac{x-x_0}{h}$, тогда

$$\Pi_{n+1}(x) = h^{n+1} \cdot q \cdot (q-1) \dots (q-n) = h^{n+1} q^{[n+1]}, \quad (6.11)$$

$$\begin{aligned} \Pi'_{n+1}(x_i) &= (x_i - x_0) \dots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \dots (x_i - x_n) = \\ &= h^n \cdot i \cdot (i-1) \dots 1 \cdot (-1) \dots [-(n-i)] = (-1)^{n-i} \cdot h^n \cdot i!(n-i)! \end{aligned} \quad (6.12)$$

Подставив (6.11), (6.12) в (6.10), получим:

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^n \frac{(-1)^{n-i} \cdot y_i \cdot q^{[n+1]}}{i!(n-i)! \cdot q-i}. \quad (6.13)$$

Заменяв функцию $y(x)$ интерполяционным полиномом Лагранжа $L_n(x)$, и, учитывая, что $\frac{dL_n(x)}{dx} = \frac{dL_n(x)}{dq} \cdot \frac{dq}{dx} = \frac{1}{h} \cdot \frac{dL_n(x)}{dq}$, из соотношения (6.13)

получим:

$$y'(x) \approx L'_n(x) = \frac{1}{h} \sum_{i=0}^n \frac{(-1)^{n-i} \cdot y_i}{i!(n-i)!} \cdot \frac{d}{dq} \left(\frac{q^{[n+1]}}{q-i} \right). \quad (6.14)$$

Аналогично можно найти $y''(x)$ и так далее.

Для оценки погрешности $r_n(x) = y'(x) - L'_n(x) = R'_n(x)$ воспользуемся формулой погрешности интерполяционной формулы Лагранжа:

$$R_n(x) = y(x) - L_n(x) = \frac{y^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \Pi_{n+1}(x),$$

где ξ - промежуточное значение между x и узлами интерполяции x_0, x_1, \dots, x_n .

Предположим, что $y(x) \in C^{(n+2)}$, тогда

$$r_n(x) = R'_n(x) = \frac{1}{(n+1)!} \left\{ y^{(n+1)}(\xi) \cdot \Pi'_{n+1}(x) + \Pi_{n+1}(x) \cdot \frac{dy^{(n+1)}(x)}{dx} \right\}. \quad (6.15)$$

Учитывая соотношение (6.12) и предполагая $\frac{dy^{(n+1)}(\xi)}{dx}$ - ограниченной, из соотношения (6.15) получим оценку погрешности в узлах интерполяции:

$$r_n(x_i) = (-1)^{n-i} \cdot h^n \cdot \frac{i!(n-i)!}{(n+1)!} \cdot y^{(n+1)}(\xi). \quad (6.16)$$

§5.2. Численное интегрирование. Квадратурная формула Ньютона-Котеса.

Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и известна ее первообразная $F(x)$, то определенный интеграл от этой функции в пределах от a до b может быть вычислен по формуле Ньютона-Лейбница:

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) \quad (6.1)$$

где $F'(x) = f(x)$. Однако, во многих случаях $F(x)$ не может быть найдена с помощью элементарных средств или является слишком сложной; вследствие этого вычисление определенного интеграла по формуле (6.1) может

быть затруднено или быть практически невыполнимым. Поэтому, важное значение приобретают численные методы вычисления определенных интегралов, использующие ряд значений подынтегральной функции в точках $x_i \in [a, b]$.

Определение 6.1.

Вычисление однократного интеграла называется *механической квадратурой*, двойного - *механической кубатурой*. Соответствующие формулы будем называть квадратурными и кубатурными формулами.

Рассмотрим один из способов вычисления однократных интегралов.

Если воспользоваться, например, интерполяционным полиномом Лагранжа, то, заменяя функцию $f(x)$ полиномом $P_n(x)$, получим равенство

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b P_n(x)dx + R_n[f] \quad (6.2)$$

где $R_n[f]$ - ошибка этой интерполяционной формулы.

Пусть требуется вычислить интеграл $\int_a^b ydx$, где

$y = f(x), y_i = f(x_i), i = \overline{0, n}$. Выбрав шаг $h = \frac{b-a}{n}$, разобьем отрезок $[a, b]$ на n равных частей с помощью равноотстоящих точек $x_0 = a, x_i = x_0 + ih, i = \overline{1, n-1}, x_n = b$. Заменяем подынтегральную функцию интерполяционным полиномом Лагранжа $P_n(x) = \sum_{i=0}^n a_i(x)y_i$ и получим приближенную

квадратурную формулу

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b ydx \cong \int_a^b P_n(x)dx = \int_{x_0}^{x_n} \sum_{i=0}^n a_i(x)y_i dx = \sum_{i=0}^n A_i y_i \quad (6.3)$$

Выведем явные выражения для коэффициентов A_i формулы (6.3).

Многочлен Лагранжа $P_n(x) = \sum_{i=0}^n a_i(x)y_i$ имеет коэффициенты

$$a_i(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\dots(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\dots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\dots(x_i-x_n)}, i = \overline{0, n}.$$

Вводим обозначения $q = \frac{x-x_0}{h}$ и $q^{[n+1]} = q(q-1)\dots(q-n)$ и с учетом

этих обозначений многочлен Лагранжа запишем в виде:

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^n \frac{(-1)^{n-i}}{i!(n-i)!} \cdot \frac{q^{[n+1]}}{q-i} y_i \quad (6.4)$$

Заменяя в формуле (6.3) функцию $f(x)$ полиномом $P_n(x)$ в виде (6.4), получим:

$$\int_{x_0}^{x_n} \sum_{i=0}^n \frac{(-1)^{n-i}}{i!(n-i)!} \cdot \frac{q^{[n+1]}}{q-i} y_i dx = \sum_{i=0}^n A_i y_i,$$

где $A_i = \int_{x_0}^{x_n} \frac{(-1)^{n-i}}{i!(n-i)!} \cdot \frac{q^{[n+1]}}{q-i} dx.$

Так как $q = \frac{x - x_0}{h}$ и $dq = \frac{dx}{h}$, то сделав замену переменных в определенном интеграле, будем иметь:

$$A_i = h \frac{(-1)^{n-i}}{i!(n-i)!} \int_0^1 \frac{q^{[n+1]}}{q-i} dq, \quad i = \overline{0, n}.$$

Так как $h = \frac{b-a}{n}$, то можно записать коэффициенты Котеса:

$$H_i = \frac{1}{n} \cdot \frac{(-1)^{n-i}}{i!(n-i)!} \cdot \int_0^1 \frac{q^{[n+1]}}{q-i} dq, \quad i = \overline{0, n} \quad (6.5)$$

Квадратурная формула при этом принимает вид:

$$\int_a^b y dx = (b-a) \sum_{i=0}^n H_i y_i \quad (6.6)$$

Формула (6.6) называется квадратурной формулой Ньютона-Котеса. Рассмотрим частные случаи.

По формуле (6.5) при $n = 1$ вычислим:

$$H_0 = -\int_0^1 (q-1) dq = \frac{1}{2},$$

$$H_1 = \int_0^1 q dq = \frac{1}{2},$$

$$\int_{x_0}^{x_1} y dx = \frac{h}{2} (y_0 + y_1). \quad (6.7)$$

Полученная формула (6.7) называется формулой трапеций для приближенного вычисления определенного интеграла (Рис.6.1).

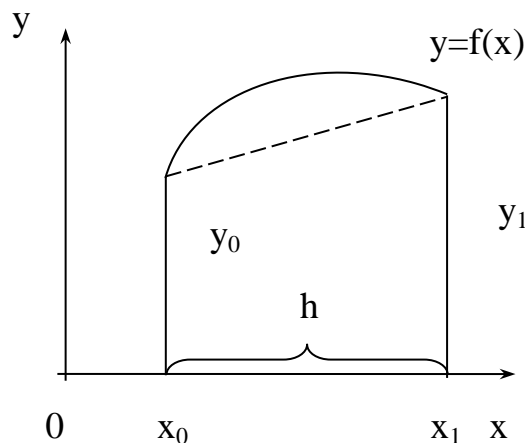


Рис.6.1

По формуле (6.5) при $n = 2$ вычислим коэффициенты Котеса:

$$H_0 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \int_0^2 (q-1)(q-2) dq = \frac{1}{4} \left(\frac{8}{3} - 6 + 4 \right) = \frac{1}{6}, i = 0,$$

$$H_1 = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1} \int_0^2 q(q-2) dq = \frac{2}{3}, i = 1;$$

$$H_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \int_0^2 q(q-1) dq = \frac{1}{6}, i = 2.$$

Так как $x_2 - x_0 = 2h$, то квадратурная формула для вычисления интеграла примет вид

$$\int_{x_0}^{x_2} y dx = \frac{h}{3} (y_0 + 4y_1 + y_2). \quad (6.8)$$

Формула (6.8) называется квадратурной формулой Симпсона. Геометрическая интерпретация формулы состоит в том, что происходит замена данной кривой $y = f(x)$ параболой $y = L_2(x)$, проходящей через три точки M_0, M_1, M_2 (Рис.6.2).

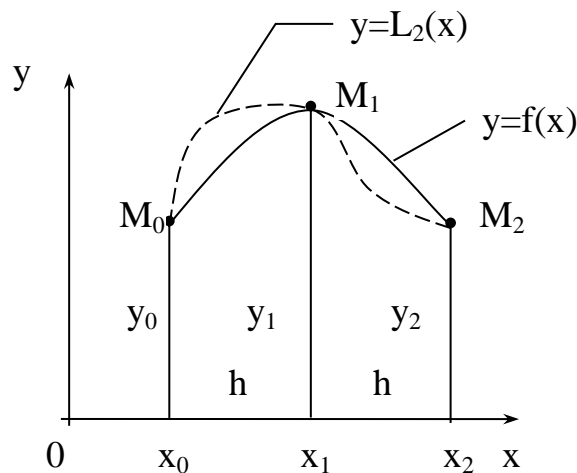


Рис.6.2

§6.3. Приближенное вычисление несобственных интегралов.

Определение 6.2.

Интеграл

$$\int_a^b f(x) dx \quad (6.9)$$

называется собственным, если

1. промежуток интегрирования конечен;

2. подынтегральная функция $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$.

В противном случае, интеграл (6.9) называется несобственным.

I. Рассмотрим приближенное вычисление несобственного интеграла

$$\int_a^{\infty} f(x) dx \quad (6.10)$$

с бесконечным промежутком интегрирования, где функция $f(x)$ непрерывна при $a \leq x < \infty$.

Определение 6.3.

Интеграл (6.10) называется сходящимся (Рис.6.3), если существует конечный предел

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) dx \quad (6.11)$$

и по определению полагают

$$\int_a^{\infty} f(x) dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) dx \quad (6.12)$$

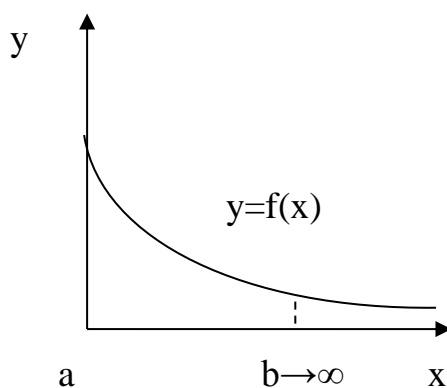


Рис.6.3

Если предел (6.11) не существует, то интеграл (6.10) называется расходящимся (Рис.6.4), и такой интеграл считается лишенным смысла. Поэтому, прежде чем приступить к вычислению несобственного интеграла, нужно предварительно убедиться, что этот интеграл сходится.

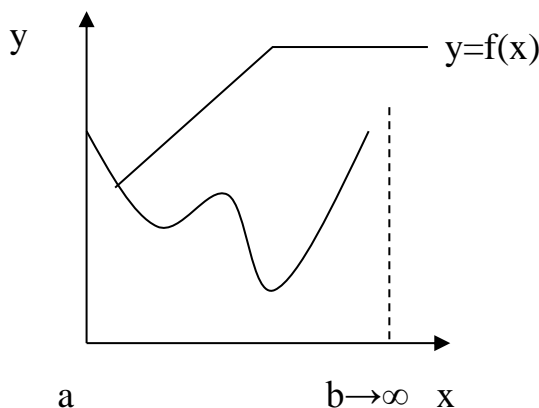


Рис.6.4

Чтобы вычислить сходящийся несобственный интеграл (6.10) с заданной точностью ε , представим его в виде

$$\int_a^{\infty} f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^{\infty} f(x)dx \quad (6.13)$$

В силу сходимости интеграла число b можно выбрать столь большим, чтобы имело место неравенство

$$\left| \int_b^{\infty} f(x)dx \right| < \frac{\varepsilon}{2} \quad (6.14)$$

Собственный интеграл $\int_a^b f(x)dx$ можно вычислить по одной из квадратурных формул. Пусть S - приближенное значение этого интеграла с точностью до $\frac{\varepsilon}{2}$, т.е.

$$\left| \int_a^b f(x)dx - S \right| < \frac{\varepsilon}{2} \quad (6.15)$$

Из формул (6.13)-(6.15) имеем

$$\left| \int_a^{\infty} f(x)dx - S \right| < \varepsilon$$

т.е. поставленная задача будет решена.

II. Допустим теперь, что отрезок $[a, b]$ конечен, а функция $f(x)$ имеет конечное число точек разрыва на $[a, b]$. Эти точки назовем «особыми» и обозначим c_1, c_2, \dots . Такими особыми точками могут быть или один из концов отрезка (Рис.6.5), или оба конца отрезка (Рис.6.6), либо одна или несколько точек внутри отрезка (Рис.6.7).

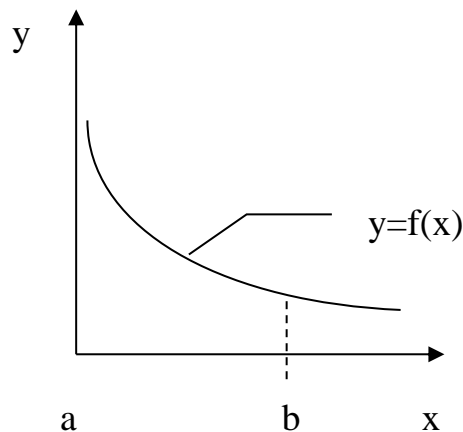


Рис.6.5

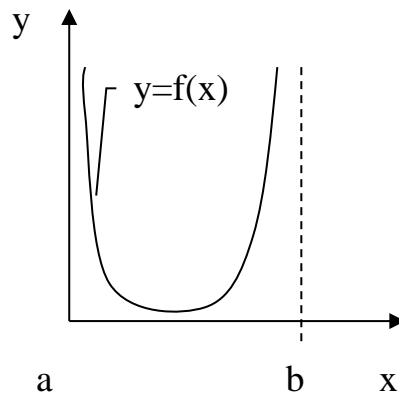


Рис.6.6

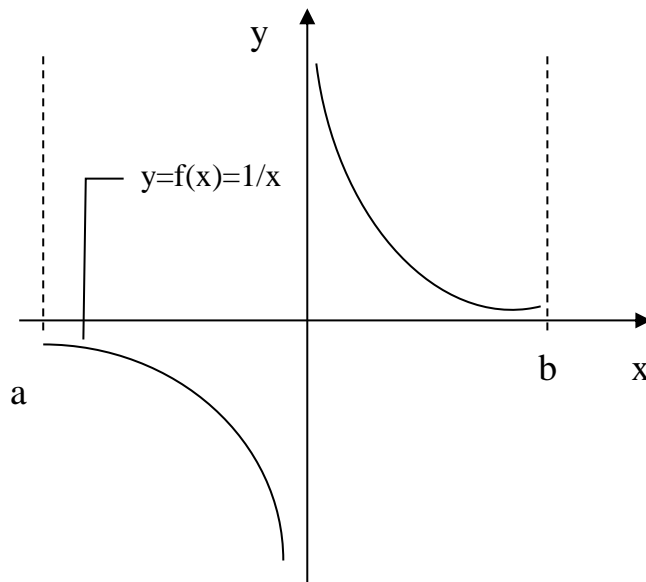


Рис.6.7

Рассмотрим случай, когда имеется только одна особая точка, например, левый конец отрезка $x = a$. Во всех остальных точках отрезка $[a, b]$ функцию $f(x)$ считаем непрерывной, а при $x \rightarrow a$ пусть $f(x) \rightarrow \infty$. Выбираем произвольно точку c внутри отрезка. На отрезке $[c, b]$ функция $f(x)$ непрерывна. Тогда, если предел $\lim_{c \rightarrow a+0} \int_a^c f(x) dx$ существует и конечен, то интеграл $\int_a^b f(x) dx$ сходится. Аналогично рассматриваются остальные случаи.

На основе данного подхода разработано множество численных методов вычисления несобственных интегралов вида (6.10), в том числе метод

Канторовича выделения особенностей.

§6.4. Кубатурные формулы типа Симпсона.

Рассмотрим один из методов приближенного вычисления двойного интеграла.

Так как двойной интеграл вычисляется через повторный, то при приближенном вычислении двойного интеграла используется квадратурная формула Симпсона.

1) Вычислим $\iint_D f(x, y) dx dy$, где область D – это прямоугольник вида:

$$D = \{a \leq x \leq A, b \leq y \leq B\}.$$

Каждый отрезок $[a, A]$, $[b, B]$ разобьем пополам точками

$$x_0 = a, x_1 = a + h, x_2 = a + 2h = A,$$

$$y_0 = b, y_1 = b + k, y_2 = b + 2k = B,$$

где $h = \frac{A - a}{2}$, $k = \frac{B - b}{2}$.

Получим девять точек с координатами (x_i, y_i) (Рис.6.8).

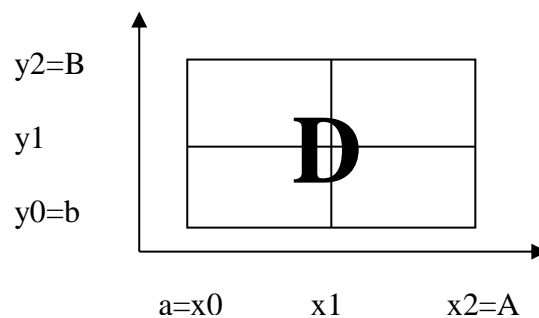


Рис.6.8

Расписав двойной интеграл через повторный и применив два раза квадратурную формулу Симпсона, получим:

$$\begin{aligned}
\iint_D f(x, y) dx dy &= \int_a^A dx \int_b^B f(x, y) dy = \frac{k}{3} \int_a^A [f(x, y_0) + 4f(x, y_1) + f(x, y_2)] dx = \\
&= \frac{k}{3} \left[\int_a^A f(x, y_0) dx + 4 \int_a^A f(x, y_1) dx + \int_a^A f(x, y_2) dx \right] = \\
&= \frac{hk}{9} [f(x_0, y_0) + 4f(x_1, y_0) + f(x_2, y_0) + \\
&+ 4(f(x_0, y_1) + 4f(x_1, y_1) + f(x_2, y_1)) + f(x_0, y_2) + 4f(x_1, y_2) + \\
&+ f(x_2, y_2)] = \frac{hk}{9} \{ f(x_0, y_0) + f(x_2, y_0) + f(x_0, y_2) + f(x_2, y_2) + \\
&+ 4[f(x_1, y_0) + f(x_1, y_2) + f(x_0, y_1) + f(x_2, y_1)] + 16f(x_1, y_1) \}.
\end{aligned} \tag{6.16}$$

Формула (6.16) называется *кубатурной формулой Симпсона*.

2) Пусть теперь область D представляет собой прямоугольник, стороны которого достаточно велики. Тогда отрезок $[a, A]$ разобьем на $2n$ равных частей, отрезок $[b, B]$ – на $2m$ равных частей. Выбирая шаги $h = \frac{A - a}{2n}$ и $k = \frac{B - b}{2m}$, делим прямоугольник на четное число прямоугольников (Рис.6.9).

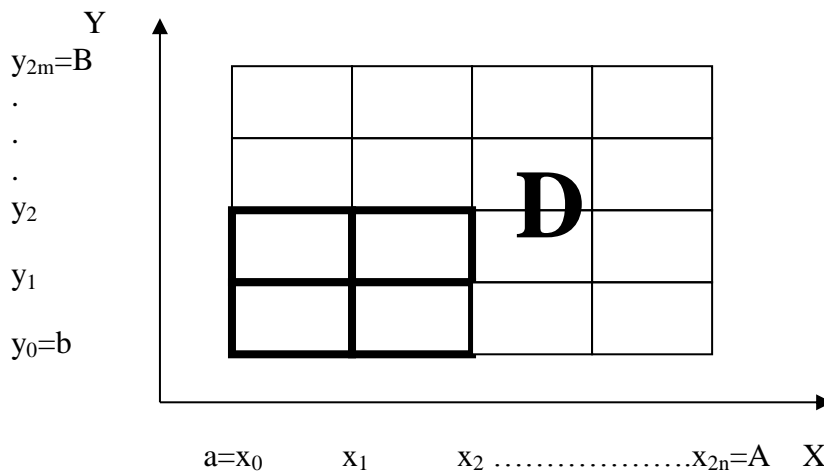


Рис.6.9

Введем обозначения $x_i = x_0 + ih, i = \overline{0, 2n}, y_j = y_0 + jk, j = \overline{0, 2m}, f(x_i, y_j) = f_{ij}$. Применяя формулу (6.16) к каждому четверем соседним прямоугольникам, получим:

$$\begin{aligned}
& \iint_D f(x, y) dx dy = \\
& = \frac{hk}{9} \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{m-1} (f_{2i,2j} + f_{2i+2,2j} + f_{2i,2j+2} + f_{2i+2,2j+2} + \\
& = 4(f_{2i+1,2j} + f_{2i,2j+1} + f_{2i+2,2j+1} + f_{2i+1,2j+2}) + 16f_{2i+1,2j+1}).
\end{aligned}$$

Приведя подобные, получим:

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \frac{hk}{9} \sum_{i=0}^{2n} \sum_{j=0}^{2m} \lambda_{ij} f_{ij}, \quad (6.17)$$

где матрица

$$(\lambda_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 4 & 2 & \dots & 4 & 2 & 4 & 1 \\ 4 & 16 & 8 & 16 & 8 & \dots & 16 & 8 & 16 & 4 \\ 2 & 8 & 4 & 8 & 4 & \dots & 8 & 4 & 8 & 2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 2 & 8 & 4 & 8 & 4 & \dots & 8 & 4 & 8 & 2 \\ 4 & 16 & 8 & 16 & 8 & \dots & 16 & 8 & 16 & 4 \\ 1 & 4 & 2 & 4 & 2 & \dots & 4 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

3) Если область D – произвольная криволинейная область, то строится прямоугольник \bar{D} , содержащий область D , причем стороны прямоугольника \bar{D} параллельны осям координат (Рис.6.10).

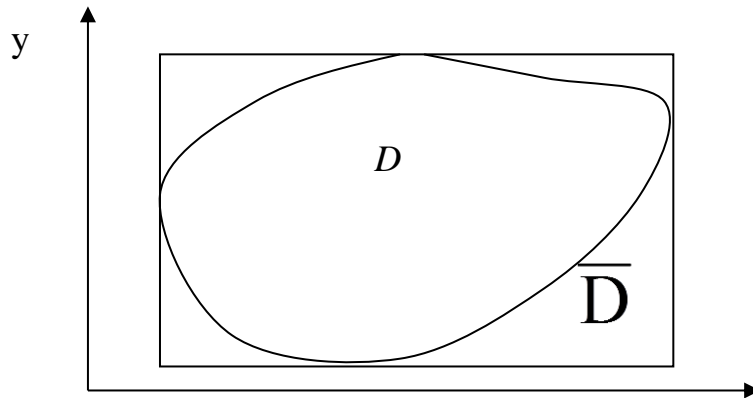


Рис.6.10

x

Рассматривается вспомогательная функция

$$f^*(x, y) = \begin{cases} f(x, y), & \text{если точка } (x, y) \in D \\ 0, & \text{если точка } (x, y) \in \bar{D} \setminus D \end{cases}$$

Тогда $\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{\bar{D}} f^*(x, y) dx dy$, и, применяя к последнему инте-

гралу общую кубатурную формулу (6.17), получим приближенное значение двойного интеграла по произвольной области D .

7. ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ И СИСТЕМ.

Дифференциальные уравнения являются основным математическим инструментом моделирования и анализа разнообразных явлений и процессов в науке и технике.

Методы их решения подразделяются на два класса:

1) аналитические методы, в которых решение получается в виде аналитических функций;

2) численные (приближенные) методы, где искомые интегральные кривые получают в виде таблиц их численных значений.

Применение аналитических методов позволяет исследовать полученные решения методами математического анализа и сделать соответствующие выводы о свойствах моделируемого явления или процесса. К сожалению, с помощью таких методов можно решать достаточно ограниченный круг реальных задач. Численные методы позволяют получить с определенной точностью приближенное решение практически любой задачи.

Решить дифференциальное уравнение

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \quad (7.1)$$

численным методом означает, что для заданной последовательности аргументов $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ и числа $y_0 = y(x_0)$, не определяя аналитического вида функции $y = F(x)$, найти значения y_1, y_2, \dots, y_n , удовлетворяющие условиям:

$$F(x_0) = y_0, y_k = F(x_k), k = \overline{1, n}.$$

Рассмотрим три наиболее распространенных при решении практических задач численных метода интегрирования Эйлера, Рунге-Кутты и Адамса.

§7.1. Метод Эйлера.

Этот метод является сравнительно грубым и применяется в основном для ориентировочных расчетов. Однако идеи, положенные в основу метода Эйлера, являются исходными для ряда других численных методов.

Пусть дано дифференциальное уравнение с начальными условиями (задача Коши)

$$y' = f(x, y), y(x_0) = y_0 \quad (7.2)$$

и выполняются условия существования и единственности решения.

Теорема Пиккара (теорема о существовании и единственности решения задачи Коши).

Если в уравнении (7.1) функция $f(x, y)$ непрерывна в прямоугольнике $D = \{x_0 - a \leq x \leq x_0 + a; y_0 - b \leq y \leq y_0 + b\}$ и удовлетворяет в D условию Липшица

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq N|y_1 - y_2|,$$

где N - константа Липшица, то существует единственное решение $y = \bar{y}(x)$, $x_0 - H \leq x \leq x_0 + H$, уравнения (7.1), удовлетворяющее условию $y(x_0) = y_0$, где $H < \min\left\{a, \frac{b}{M}, \frac{1}{N}\right\}$, $M = \max f(x, y)$ в D .

Требуется найти решение $y(x)$ задачи Коши (7.2) на отрезке $[a, b]$.

Выбрав шаг h - достаточно малый, равный $h = (b - a)/n$, строим систему равноотстоящих точек x_0, x_1, \dots, x_n , $x_i = x_0 + ih$, $i = \overline{0, n}$

Искомую интегральную кривую $y = y(x)$, проходящую через точку $M_0(x_0, y_0)$, приближенно заменим ломаной Эйлера с вершинами $M_i(x_i, y_i)$ (Рис.7.1).

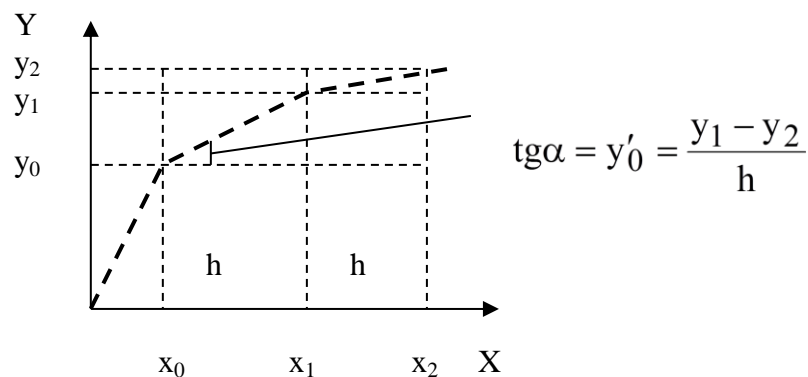


Рис.7.1

Звено ломаной $M_i M_{i+1}$, заключенное между x_i и x_{i+1} , наклонено к оси OX под углом α . Тангенс этого угла вычисляется по формуле:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{y_{i+1} - y_i}{h} = y'(x_i) = f(x_i, y_i).$$

Сделав преобразование, получим формулу Эйлера:

$$y_{i+1} = y_i + h f(x_i, y_i), \quad i = \overline{0, n}. \quad (7.3)$$

Вычисление значений y_1, y_2, \dots, y_n осуществляется с использованием формулы (7.3) следующим образом. По заданным начальным условиям $a = x_0$ и y_0 полагая $i = 0$ в выражении (7.3) вычисляется значение

$$y_1 = y_0 + h f(x_0, y_0) \quad (7.4)$$

Далее определяя значение аргумента x по формуле $x_1 = x_0 + h$, используя найденное значение y_1 и полагая в формуле (7.3) $i = 1$ вычисляем следующее приближенное значение интегральной кривой $y = F(x)$, как

$$y_2 = y_1 + h f(x_1, y_1) \quad (7.5)$$

Поступая аналогичным образом при $i = \overline{2, n-1}$ определяем все остальные значения y_i , в том числе последнее значение $y_n = y_{n-1} + h f(x_{n-1}, y_{n-1})$, которое соответствует значению аргумента $x_n = b$.

Таким образом, соединяя на координатной плоскости точки $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$ отрезками прямых в качестве приближенного представления искомой интегральной кривой $y = F(x)$, получаем ломаную линию с вершинами в точках $M_0(x_0, y_0), M_1(x_1, y_1), \dots, M_n(x_n, y_n)$.

Метод Эйлера может быть применен к решению систем дифференциальных уравнений.

Пусть задана система двух уравнений первого порядка

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = f_1(x, y, z) \\ \frac{dz}{dx} = f_2(x, y, z) \end{cases} \quad (7.6)$$

с начальными условиями

$$y(x_0) = y_0, \quad z(x_0) = z_0.$$

Необходимо найти решение этой задачи Коши. Проводя аналогичные рассуждения, получаем расчетные формулы вида:

$$\begin{aligned} y_{k+1} &= y_k + h f_1(x_k, y_k, z_k) \\ z_{k+1} &= z_k + h f_2(x_k, y_k, z_k) \\ x_k &= x_{k-1} + h, \quad k = \overline{0, n-1} \end{aligned} \quad (7.7)$$

где h - шаг интегрирования.

При расчетах полагается, что $a = x_0$ и $b = x_n$. В результате применения расчетной схемы (7.7) получается приближенное представление интегральных кривых $y = F_1(x)$ и $z = F_2(x)$ в форме двух ломаных Эйлера, построенных по полученным таблицам $\{x_i, y_i\}, \{x_i, z_i\}, i = \overline{0, n}$.

Запишем разложение y_{i+1} в ряд Тейлора:

$$\tilde{y}_{i+1} = y_i + h y'(x_i, y_i) + \frac{h^2}{2!} y''(x_i, y_i) + \frac{h^3}{3!} y'''(x_i, y_i) + \dots \quad (7.8)$$

Учитывая формулы (7.3) и (7.8), получим

$$|y_{i+1} - \tilde{y}_{i+1}| \leq \max_{x_i} \frac{h^2}{2!} y''(x_i, y_i) = \max_{x_i} \frac{h^2}{2!} f''(x_i, y_i) \quad (7.9)$$

Соотношение (7.9) может быть использовано для выбора шага h . Как правило, шаг h выбирают таким образом, чтобы $h^2 < \varepsilon$, где ε - заданная точность.

Достоинством метода Эйлера является его простота и высокая скорость поиска решения. Недостатком метода Эйлера является малая точность.

§7.2. Метод Рунге-Кутты.

Данный метод является одним из наиболее распространенных численных методов интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. По сравнению с описанным выше методом Эйлера метод Рунге-Кутты имеет более высокую точность, но невысокую скорость поиска решения, так как метод относится к классу многошаговых методов.

Пусть на отрезке $[a, b]$ требуется найти численное решение задачи Коши (7.1), где $a = x_0$. Как и в предыдущем методе разобьем этот участок на n равных частей и построим последовательность значений x_0, x_1, \dots, x_n аргумента x искомой функции $y(x)$. Предполагаем существование непрерывных производных функции $y(x)$ до пятого порядка.

Выражение (7.2) можно переписать в виде:

$$y_{k+1} = y_k + \Delta y_k \quad (7.10)$$

где Δy_k - приращение искомой функции $y(x)$ на $(k+1)$ -ом шаге интегрирования.

Придадим аргументу x приращение, равное шагу интегрирования h , и разложим функцию $y(x+h)$ в ряд Тейлора в окрестности точки x , сохранив в нем пять членов:

$$y(x+h) = y(x) + hy'(x) + \frac{h^2}{2} y''(x) + \frac{h^3}{6} y'''(x) + \frac{h^4}{24} y^{(IV)}(x)$$

Переносим первое слагаемое в этой сумме в левую часть получим, что

$$\Delta y(x) = y(x+h) - y(x) = hy'(x) + \frac{h^2}{2} y''(x) + \frac{h^3}{6} y'''(x) + \frac{h^4}{24} y^{(IV)}(x) \quad (7.11)$$

Здесь производные $y''(x), y'''(x), y^{(IV)}(x)$ определяются последовательным дифференцированием уравнения (7.1).

Вместо непосредственных вычислений по формуле (7.3) в методе Рунге-Кутты для каждого значения $\Delta y_k = \Delta y(x_k)$ определяются четыре числа:

$$\begin{aligned}
k_{1k} &= hf(x_k, y_k) \\
k_{2k} &= hf\left(x_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{k_{1k}}{2}\right) \\
k_{3k} &= hf\left(x_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{k_{2k}}{2}\right) \\
k_{4k} &= hf(x_k + h, y_k + k_{3k})
\end{aligned} \tag{7.12}$$

Если числа $k_{1k}, k_{2k}, k_{3k}, k_{4k}$ последовательно умножить на $1/6, 1/3, 1/3, 1/6$ и сложить между собой, то получим:

$$\Delta y_k = \frac{1}{6}(k_{1k} + 2k_{2k} + 2k_{3k} + k_{4k}) \tag{7.13}$$

Формула Рунге-Кутты имеет погрешность $\Theta(h^5)$.

Таким образом, рабочая формула Рунге-Кутты:

$$y_{k+1} = y_k + \frac{1}{6}(k_{1k} + 2k_{2k} + 2k_{3k} + k_{4k}), k = \overline{0, n-1}.$$

В отличие от расчетной схемы метода Эйлера, в которой каждое следующее значение y_{k+1} вычисляется непосредственно по единой формуле (7.3), в методе Рунге-Кутты необходимо проведение промежуточных вычислений по формулам (7.10) и (7.12).

Метод Рунге-Кутты может быть использован и при решении систем дифференциальных уравнений. Рассмотрим задачу Коши для системы второго порядка (7.6). В этом случае приращения Δy_k и Δz_k вычисляются по формулам:

$$\begin{aligned}
\Delta y_k &= \frac{1}{6}(k_{1k} + 2k_{2k} + 2k_{3k} + k_{4k}) \\
\Delta z_k &= \frac{1}{6}(m_{1k} + 2m_{2k} + 2m_{3k} + m_{4k})
\end{aligned} \tag{7.14}$$

где

$$\begin{aligned}
k_{1k} &= hf_1(x_k, y_k, z_k); \\
m_{1k} &= hf_2(x_k, y_k, z_k); \\
k_{2k} &= hf_1(x_k + 0,5h, y_k + 0,5k_{1k}, z_k + 0,5m_{1k}); \\
m_{2k} &= hf_2(x_k + 0,5h, y_k + 0,5k_{1k}, z_k + 0,5m_{1k}); \\
k_{3k} &= hf_1(x_k + 0,5h, y_k + 0,5k_{2k}, z_k + 0,5m_{2k}); \\
m_{3k} &= hf_2(x_k + 0,5h, y_k + 0,5k_{2k}, z_k + 0,5m_{2k}); \\
k_{4k} &= hf_1(x_k + h, y_k + k_{3k}, z_k + m_{3k}); \\
m_{4k} &= hf_2(x_k + h, y_k + k_{3k}, z_k + m_{3k}).
\end{aligned} \tag{7.15}$$

Приближенное интегрирование системы уравнений (7.6) осуществляется по формулам вида:

$$y_{k+1} = y_k + \Delta y_k,$$

$$z_{k+1} = z_k + \Delta z_k, \quad k = \overline{0, n}.$$

§3. Метод Адамса.

Пусть для задачи Коши найдены каким-либо способом (например, методом Эйлера или Рунге-Кутты) три последовательных значения искомой функции

$$y_1 = y(x_1) = y(x_0 + h); \quad y_2 = y(x_2) = y(x_0 + 2h); \quad y_3 = y(x_3) = y(x_0 + 3h);$$

$$\text{Вычислим величины } q_0 = hy'_0 = hf(x_0, y_0), \quad q_1 = hy'_1 = hf(x_1, y_1),$$

$$q_2 = hy'_2 = hf(x_2, y_2), \quad q_3 = hy'_3 = hf(x_3, y_3).$$

Метод Адамса позволяет найти решение задачи – функцию $y(x)$ - в виде таблицы функций. Продолжение полученной таблицы из четырех точек осуществляется по экстраполяционной формуле Адамса:

$$y_{k+1} = y_k + q_k + \frac{1}{2} \Delta q_{k-1} + \frac{5}{12} \Delta^2 q_{k-2} + \frac{3}{8} \Delta^3 q_{k-3}, \quad k = 3, 4, \dots$$

Затем уточнение проводится по интерполяционной формуле Адамса:

$$y_{k+1} = y_k + q_k + \frac{1}{2} \Delta q_{k-1} - \frac{1}{12} \Delta^2 q_{k-2} - \frac{1}{24} \Delta^3 q_{k-3}, \quad k = 3, 4, \dots$$

Метод Адамса легко распространяется на системы дифференциальных уравнений. Погрешность метода Адамса имеет тот же порядок, что и метод Рунге-Кутты.