Численное интегрирование

8

Формулы прямоугольников, Формула трапеций, Формула Симпсона

Постановка задачи: Требуется найти значение определенного интеграла $I = \int_a^b f(x)dx$ для некоторой заданной на отрезка [*a*, *b*] функции *f*(*x*). Для некоторых функций значение интеграла можно найти точно. Однако в общем случае значение интеграла можно найти только приближенно, используя тот или иной способ численного интегрирования.

Численное интегрирование основано на замене интеграла суммой вида $I_n = \sum_{k=0}^{n} c_k f(x_k)$. Такая замена следует из определения интеграла как предела суммы $I = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$. Зафиксировав n, мы получим предыдущую сумму.

Приближенное равенство $I = I_n$ называется квадратурной формулой, x_k - узлы квадратурной формулы, c_k - коэффициенты квадратурной формулы. Разность $\psi_n = \int_a^b f(x)dx - \sum_{k=0}^{n} c_k f(x_k)$ называется погрешностью квадратурной формулы.

Разобьем отрезок [a,b] на n частей, точками $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots\ldots < x_n = b$. Причем будем рассматривать равномерную сетку, т.е. $x_i = a + ih,\ \ i = 0, 1, \ldots n$. Тогда $\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx$.

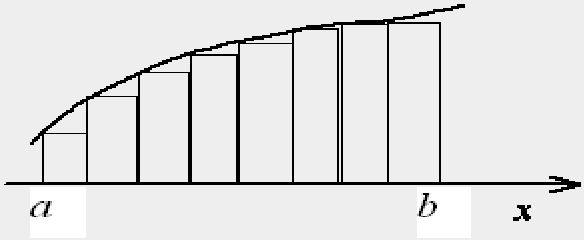
Для построения квадратурной формулы на всем отрезке [a,b] достаточно построить квадратурную формулу на частичном отрезке $[x_{i-1}, x_i]$.

Формулы прямоугольников

Пусть $f(x) = f(x_{i-1}),\ x \in [x_{i-1}, x_i]$, т.е. мы аппроксимируем f(x) левой кусочно–линейной интерполяцией. Тогда получим $\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx = \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x_{i-1})dx = f(x_{i-1}) \int_{x_{i-1}}^{x_i} dx = f(x_{i-1})(x_i - x_{i-1}) = hf(x_{i-1})$.

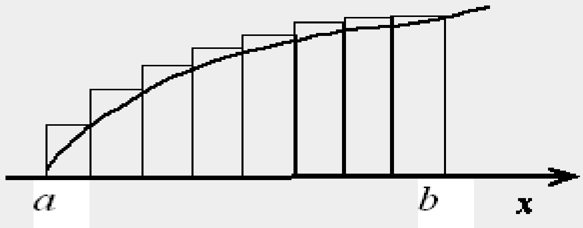
Таким образом, $\int_a^b f(x)dx = h\sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})$. Эта формула называется формулой левых прямоугольников.

Геометрическая интерпретация:



Учитывая, что интеграл от некоторой функции дает значение площади, то площадь криволинейной области заменяется на сумму площадей прямоугольников.

Аналогично получается **формула правых прямоугольников**. Здесь $f(x)=f(x_i),\ \ x\in[x_{i-1},x_i]$. В результате получим: $\int\limits_a^b f(x)dx = h\sum\limits_{i=1}^{n} f(x_i)$



Оценим погрешность формул. Например, погрешность формулы левых прямоугольников.

$$\psi_n=\int\limits_a^b f(x)dx-h\sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})=\sum_{i=1}^{n}\Big(\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx-hf\big(x_{i-1}\big)\Big)=\sum_{i=1}^{n}\varphi_i \ .$$

$$\varphi_i=\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx-f(x_{i-1})h=\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i}\big(f(x)-f(x_{i-1})\big)dx$$

Воспользуемся формулой Тейлора:

$$f(x)=f(x_{i-1})+f'(\xi_i)(x-x_{i-1}),\ \ \xi_i\in[x_{i-1},x_i]$$

Тогда $\varphi_i=\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i}[f(x_{i-1})+f'(\xi_i)(x-x_{i-1})-f(x_{i-1})]dx=\dfrac{1}{2}f'(\xi_i)h^2$

Пусть $M=\max\limits_{x\in[a,b]}\left|f'(x)\right|$, тогда

$$\left|\psi_n\right|=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}h^2\left|f'(\xi_i)\right|\le\frac{1}{2}Mh^2\sum_{i=1}^{n}1=\frac{1}{2}Mh^2n=\frac{1}{2}Mh(b-a)$$

,т.е. формула левых прямоугольников имеет **первый по h порядок точности**.

Аналогично и для формулы правых прямоугольников.

Формула средних прямоугольников. Здесь функция на отрезке $[x_{i-1},x_i]$ заменяется на ее значение в середине отрезка, т.е. $f(x)=f(x_{i-1/2}),\ \ x\in[x_{i-1},x_i],\ x_{i-1/2}=(x_{i-1}+x_i)/2$

Тогда, получим $\int\limits_a^b f(x)dx=h\sum\limits_{i=1}^{n} f(x_{i-1/2})$ - это формула средних прямоугольников.

Её удобно записать в виде $\int\limits_a^b f(x)dx=h\sum\limits_{i=1}^{n} f((x_{i-1}+x_i)/2)$

Оценим погрешность формулы средних прямоугольников.

$$\psi_n = \int_a^b f(x)dx - h\sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1/2}) = \sum_{i=1}^{n}\Big(\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx - hf\left(x_{i-1/2}\right)\Big) = \sum_{i=1}^{n}\varphi_i$$

$$\varphi_i = \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx - f(x_{i-1/2})h = \int_{x_{i-1}}^{x_i}\left(f(x) - f(x_{i-1/2})\right)dx$$

Воспользуемся формулой Тейлора:

$$f(x) = f(x_{i-1/2}) + f'(x_{i-1/2})(x - x_{i-1/2}) + \frac{1}{2}f''(\xi_i)(x - x_{i-1/2})^2,\ \ \xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$$

$$\varphi_i = \int_{x_{i-1}}^{x_i}[f(x_{i-1/2}) + f'(x_{i-1/2})(x - x_{i-1/2}) + f''(\xi_i)\frac{1}{2}(x - x_{i-1/2})^2 - f(x_{i-1/2})]dx =$$

$$= \frac{1}{2}f'(x_{i-1/2})(x - x_{i-1/2})^2\Big|_{x_{i-1}}^{x_i} + \frac{1}{6}f''(\xi_i)(x - x_{i-1/2})^3\Big|_{x_{i-1}}^{x_i} =$$

$$= \frac{1}{2}f'(x_{i-1/2})((x_i - x_{i-1/2})^2 - (x_{i-1} - x_{i-1/2})^2) + \frac{1}{6}f''(\xi_i)((x_i - x_{i-1/2})^3 - (x_{i-1} - x_{i-1/2})^2) =$$

$$(т.к.\ \ x_i - x_{i-1/2} = h/2,\ x_{i-1} - x_{i-1/2} = -h/2)$$

$$= \frac{1}{6}f''(\xi_i)(\frac{h^3}{8} + \frac{h^3}{8}) = \frac{1}{24}f''(\xi_i)h^3$$

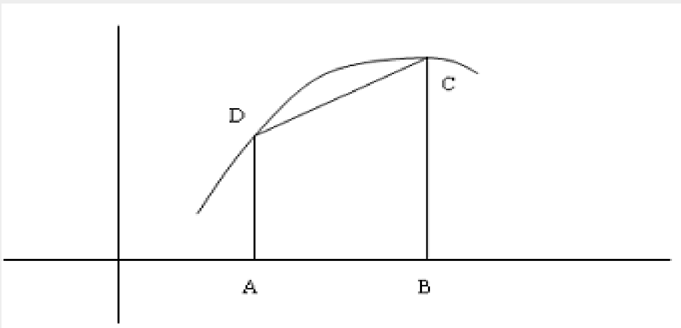
Пусть $M = \max\limits_{x\in[a,b]}\left|f''(x)\right|$, тогда

$\left|\psi_n\right| = \sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{24}h^3\left|f''(\xi_i)\right| \le \frac{1}{24}Mh^3\sum\limits_{i=1}^{n}1 = \frac{1}{24}Mh^3 n = \frac{1}{24}Mh^2(b-a)$, т.е. формула средних прямоугольников имеет **второй по h порядок точности**.

Во всех рассмотренных формулах площадь криволинейной трапеции заменялась на площадь прямоугольников.

Формула трапеций

В этой формуле $\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx \approx \frac{f(x_{i-1}) + f\left(x_i\right)}{2}(x_i - x_{i-1})$, т.е. площадь криволинейной трапеции, заменяется на площадь прямоугольной трапеции.



Формула трапеций получается путем замены подынтегральной функции интерполяционным полиномом первой степени:

$$L_{1,i}(x) = \frac{1}{h}\left[\left(x - x_{i-1}\right)f(x_i) - (x - x_i)f(x_{i-1})\right].$$

Действительно

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} L_{1,i}(x)dx = \frac{1}{h}\int_{x_{i-1}}^{x_i}(x - x_{i-1})f(x_i)dx - \frac{1}{h}\int_{x_{i-1}}^{x_i}(x - x_i)f(x_{i-1})dx =$$
$$\frac{1}{2h}f(x_i)h^2 - \frac{1}{2h}f(x_{i-1})(-h^2) = \frac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2}h$$

Тогда для всего отрезка [a,b] получим:

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=1}^{n}\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx = \sum_{i=1}^{n}\frac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2}h$$

Можно показать, что формула трапеций имеет **второй порядок точности**.

Формулу трапеций можно записать в виде:

$$\int_a^b f(x)dx = h\left(\frac{f(a) + f(b)}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)\right)$$

Формула Симпсона

При аппроксимации интеграла $\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx$, функцию f(x)на отрезке $[x_{i-1}, x_i]$ заменяют параболой, проходящей через точки $(x_{i-1}, f(x_{i-1}))$, $(x_{i-1/2}, f(x_{i-1/2}))$, $(x_i, f(x_i))$, где $x_{i-1/2} = (x_{i-1} + x_i)/2$, т.е. используем для аппроксимации полином Лагранжа второй степени:

$$f(x) \approx L_{2,i}(x) \quad x \in [x_{i-1}, x_i]$$
$$L_{2,i}(x) = \frac{2}{h^2}\left[\begin{array}{l}(x - x_{i-1/2})(x - x_i)f_{i-1} - \\ 2(x - x_{i-1})(x - x_i)f_{i-1/2} + (x - x_i)(x - x_{i-1/2})f_i\end{array}\right]$$
$$f_i = f(x_i),\; f_{i-1/2} = f(x_{i-1/2}),\; f_{i-1} = f(x_{i-1})$$

тогда:

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx = \int_{x_{i-1}}^{x_i} L_{2,i}(x)dx = \frac{2}{h^2}\left[\begin{array}{l} f_{i-1}\int_{x_{i-1}}^{x_i}(x - x_{i-1/2})(x - x_i)dx - \\ 2f_{i-1/2}\int_{x_{i-1}}^{x_i}(x - x_{i-1})(x - x_i)dx + \\ f_i\int_{x_{i-1}}^{x_i}(x - x_{i-1})(x - x_{i-1/2})dx \end{array}\right] =$$

$$\frac{2}{h^2}\left[\begin{array}{l} f_{i-1}\int_{x_{i-1}}^{x_i}(x - x_i + h/2)(x - x_i)dx - \\ 2f_{i-1/2}\int_{x_{i-1}}^{x_i}(x - x_{i-1})(x - x_{i-1} - h)dx + f_i\int_{x_{i-1}}^{x_i}(x - x_{i-1})(x - x_{i-1} - h/2)dx \end{array}\right] =$$
$$\frac{2}{h^2}f_{i-1}\left(h^3/3 - h^3/4\right) - \frac{4}{h^2}f_{i-1/2}\left(h^3/3 - h^3/2\right) + \frac{2}{h^2}\left(h^3/3 - h^3/4\right) =$$
$$\frac{h}{6}\left(f_{i-1} + 4f_{i-1/2} + f_i\right)$$

Следовательно, получаем **формулу Симпсона**

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx = \frac{h}{6}\sum_{i=1}^{n}\left[f(x_{i-1}) + 4f\left(\frac{x_{i-1} + x_i}{2}\right) + f(x_i)\right]$$

Можно показать, что формула Симпсона имеет **четвертый порядок точности**.

Пример. Вычислить интеграл

$$\int_{-1}^{2}(3-x^2)(1-x)dx = 5.25,\ \ f(x)=(3-x^2)(1-x),\ \ a=-1,\ b=2$$

.

Разобьем отрезок [-1,2] на 10 частей, т.е. $h=(2+1)/10=0.3$. Вычислим значение интеграла по формулам левых, правых, средних прямоугольников, по формуле трапеций и формуле Симпсона. Для этого составим таблицы:

x_i	$f(x_i)$		$(x_{i-1}+x_i)/2$	$f((x_{i-1}+x_i)/2)$
-1	4		-0.85	4.213375
-0.7	4.267		-0.55	4.181125
-0.4	3.976		-0.25	3.671875
-0.1	3.289		0.05	2.847625
0.2	2.368		0.35	1.870375
0.5	1.375		0.65	0.902125
0.8	0.472		0.95	0.104875
1.1	-0.179		1.25	-0.359375
1.4	-0.416		1.55	-0.328625
1.7	-0.077		1.85	0.359125
2	1			
S1=	19.075		S3=	17.4625
S2=	16.075			

$$S_1=\sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1}) = 4+4.267+....+(-0.077)=19.075$$

$$S_2=\sum_{i=1}^{n} f(x_i) = 4.267+3.976+....+1=16.075$$

$$S_3=\sum_{i=1}^{n} f((x_{i-1}+x_i)/2) = 4.213375+...+0.359125=17.4625$$

Здесь

Формула левых прямоугольников:

$$\int_a^b f(x)dx = h\sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1}) = 0.3\cdot 19.075 = 5.7225$$

Формула правых прямоугольников:

$$\int_a^b f(x)dx = h\sum_{i=1}^{n} f(x_i) = 0.3\cdot 16.075 = 4.8225$$

Формула средних прямоугольников:

$$\int_a^b f(x)dx = h\sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1/2}) = 0.3\cdot 17.4625 = 5.23875$$

Формула трапеций:

$$\int_a^b f(x)dx = h\left(\frac{f(x_0)+f(x_n)}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)\right) = 0.3\cdot((4+1)/2+4.267+3.976+$$
$$+\ldots+-0.077)=5.2725$$

Формула Симпсона:

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx = \frac{h}{6}\sum_{i=1}^{n}\left[f(x_{i-1})+4f\left(\frac{x_{i-1}+x_i}{2}\right)+f(x_i)\right] = \frac{0.3}{6}(S_1+4\cdot S_3+S_2) = 5.25$$

Напомним, что точное значение интеграла 5.25

Практическая часть

Вычислить (по вариантам) определенный интеграл методами левых прямоугольников (ЛП), средних прямоугольников (СП), правых прямоугольников (ПП), трапеций (Трап.) и Симпсона (Симп.).

При введённом точном значении интеграла (вычисленном, например, в MathCAD) оцениваются погрешности методов.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1	X	F(X)	$(X_i+X_{i+1})/2$	$F((X_i+X_{i+1})/2)$	$F(X_i)+F(X_{i+1}))/2$	$*F((X_i+X_{i+1})/2)+$	A=	0					
2	0	2	0,05	1,847880299	1,846534653	11,0845905	B=	1					
3	0,1	1,69307	0,15	1,537897311	1,538842346	9,229273934	N=	10	**N<100!**				
4	0,2	1,38462	0,25	1,235294118	1,238179252	7,417534974	dX=	0,1					
5	0,3	1,09174	0,35	0,95545657	0,959664663	5,741155607							
6	0,4	0,82759	0,45	0,708939709	0,713793103	4,263345043							
7	0,5	0,6	0,55	0,500959693	0,505882353	3,015603477							
8	0,6	0,41176	0,65	0,332161687	0,336754836	2,002156421							
9	0,7	0,26174	0,75	0,2	0,204043215	1,20808643	**Точ.=**	0,745677393	2	F(A)	**Погрешн.**	Теор.порядок точн.	
10	0,8	0,14634	0,85	0,100145138	0,103557472	0,607695496	**ЛП=**	0,847763863	1,1E-16	F(B)	0,10208647	1	
11	0,9	0,06077	0,95	0,027595269	0,03038674	0,171154558	**СП=**	0,744632979			0,00104441	2	
12	1	1,1E-16					**ПП=**	0,647763863			0,09791353	1	
13							**Трап.=**	0,747763863			0,00208647	2	
14							**Симп.=**	0,745676607			7,8516E-07	4	
15													
16													
17													
18													
19													
20													

$$\int_0^1 \frac{x^2-3\cdot x+2}{x^2+1}\,dx = 0.7456773925575304$$

С помощью функции **ЕСЛИ** здесь обеспечивается автозаполнение таблиц численного интегрирования, так что для пересчёта интегралов с более мелким шагом достаточно изменить значение в ячейке H3, отведённой для хранения числа интервалов, на которые разбивается отрезок [A,B]. В ячейке H4 содержится формула =(H2-H1)/H3.

Ограничение N<100 связано лишь с тем, что формулы растянуты вниз до 100-й строки, если растянуть дальше, его можно изменить.

При интегрировании другой функции её нужно "вбить" в ячейки B2 (от аргумента A2) и D2 (от аргумента C2), после чего растянуть изменённые формулы. Разумеется, точное значение интеграла в ячейке H9 и картинку из Mathcad, в котором оно вычислено, также можно и нужно менять.

$$\int_0^1 \frac{x^2 - 3\cdot x + 2}{x^2 + 1}\,dx =$$

1

$$\int_{-1}^9 \sqrt{x^3 + 1}\,dx =$$

2

$$\int_2^{12} \sqrt{\left(1 + e^x\right)\cdot\left(x^2 - 1\right)}\,dx =$$

3

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos(x)\,dx =$$

4

$$\int_0^1 \sqrt{4 - x^2}\,dx =$$

5

$$\int_0^1 \frac{e^x - \left(e^{-x}\right)}{\left(e^x\right) + e^{-x}}\,dx =$$

6

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{2\cdot\tan(x)^2 - 11\cdot\tan(x) - 22}{4 - \tan(x)}\,dx =$$

7

$$\int_1^2 x\cdot\ln(x)\,dx =$$

8

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{8\cdot x - \operatorname{atan}(2\cdot x)}{1 + 4\cdot x^2}\,dx =$$

9

$$\int_1^4 \frac{32}{x^3}\,dx =$$

10

$$\int_{-1}^2 x\cdot e^{x^2+1}\,dx =$$

11

$$\int_9^{18} \frac{1}{x\cdot\sqrt{2\cdot x - 9}}\,dx =$$

12

$$\int_{-\frac{3}{4}}^0 \frac{3\cdot x}{\sqrt{(x+1)^3}}\,dx =$$

13

X	F(X)	$(X_i+X_{i+1})/2$	$F((X_i+X_{i+1})/2)$	$(F(X_i)+F(X_{i+1}))/2$	$F(X_i)+4*F((X_i+X_{i+1})/2)+F(X_{i+1})$
=H1	=ЕСЛИ(A2="";"";(A2^2-3*A2+2)/(A2^2+1))	=ЕСЛИ(A3="";"";(A2+A3)/2)	=ЕСЛИ(C2="";"";(C2^2-3*C2+2)/(C2^2+1))	=ЕСЛИ(A3="";"";(B2+B3)/2)	=ЕСЛИ(A3="";"";B2+4*D2+B3)
=ЕСЛИ(A2="";"";ЕСЛИ(A2+$H$4>$H$2;"";A2+$H$4))	=ЕСЛИ(A3="";"";(A3^2-3*A3+2)/(A3^2+1))	=ЕСЛИ(A4="";"";(A3+A4)/2)	=ЕСЛИ(C3="";"";(C3^2-3*C3+2)/(C3^2+1))	=ЕСЛИ(A4="";"";(B3+B4)/2)	=ЕСЛИ(A4="";"";B3+4*D3+B4)
=ЕСЛИ(A3="";"";ЕСЛИ(A3+$H$4>$H$2;"";A3+$H$4))	=ЕСЛИ(A4="";"";(A4^2-3*A4+2)/(A4^2+1))	=ЕСЛИ(A5="";"";(A4+A5)/2)	=ЕСЛИ(C4="";"";(C4^2-3*C4+2)/(C4^2+1))	=ЕСЛИ(A5="";"";(B4+B5)/2)	=ЕСЛИ(A5="";"";B4+4*D4+B5)
=ЕСЛИ(A4="";"";ЕСЛИ(A4+$H$4>$H$2;"";A4+$H$4))	=ЕСЛИ(A5="";"";(A5^2-3*A5+2)/(A5^2+1))	=ЕСЛИ(A6="";"";(A5+A6)/2)	=ЕСЛИ(C5="";"";(C5^2-3*C5+2)/(C5^2+1))	=ЕСЛИ(A6="";"";(B5+B6)/2)	=ЕСЛИ(A6="";"";B5+4*D5+B6)
=ЕСЛИ(A5="";"";ЕСЛИ(A5+$H$4>$H$2;"";A5+$H$4))	=ЕСЛИ(A6="";"";(A6^2-3*A6+2)/(A6^2+1))	=ЕСЛИ(A7="";"";(A6+A7)/2)	=ЕСЛИ(C6="";"";(C6^2-3*C6+2)/(C6^2+1))	=ЕСЛИ(A7="";"";(B6+B7)/2)	=ЕСЛИ(A7="";"";B6+4*D6+B7)
=ЕСЛИ(A6="";"";ЕСЛИ(A6+$H$4>$H$2;"";A6+$H$4))	=ЕСЛИ(A7="";"";(A7^2-3*A7+2)/(A7^2+1))	=ЕСЛИ(A8="";"";(A7+A8)/2)	=ЕСЛИ(C7="";"";(C7^2-3*C7+2)/(C7^2+1))	=ЕСЛИ(A8="";"";(B7+B8)/2)	=ЕСЛИ(A8="";"";B7+4*D7+B8)
=ЕСЛИ(A7="";"";ЕСЛИ(A7+$H$4>$H$2;"";A7+$H$4))	=ЕСЛИ(A8="";"";(A8^2-3*A8+2)/(A8^2+1))	=ЕСЛИ(A9="";"";(A8+A9)/2)	=ЕСЛИ(C8="";"";(C8^2-3*C8+2)/(C8^2+1))	=ЕСЛИ(A9="";"";(B8+B9)/2)	=ЕСЛИ(A9="";"";B8+4*D8+B9)
=ЕСЛИ(A8="";"";ЕСЛИ(A8+$H$4>$H$2;"";A8+$H$4))	=ЕСЛИ(A9="";"";(A9^2-3*A9+2)/(A9^2+1))	=ЕСЛИ(A10="";"";(A9+A10)/2)	=ЕСЛИ(C9="";"";(C9^2-3*C9+2)/(C9^2+1))	=ЕСЛИ(A10="";"";(B9+B10)/2)	=ЕСЛИ(A10="";"";B9+4*D9+B10)
=ЕСЛИ(A9="";"";ЕСЛИ(A9+$H$4>$H$2;"";A9+$H$4))	=ЕСЛИ(A10="";"";(A10^2-3*A10+2)/(A10^2+1))	=ЕСЛИ(A11="";"";(A10+A11)/2)	=ЕСЛИ(C10="";"";(C10^2-3*C10+2)/(C10^2+1))	=ЕСЛИ(A11="";"";(B10+B11)/2)	=ЕСЛИ(A11="";"";B10+4*D10+B11)
=ЕСЛИ(A10="";"";ЕСЛИ(A10+$H$4>$H$2;"";A10+$H$4))	=ЕСЛИ(A11="";"";(A11^2-3*A11+2)/(A11^2+1))	=ЕСЛИ(A12="";"";(A11+A12)/2)	=ЕСЛИ(C11="";"";(C11^2-3*C11+2)/(C11^2+1))	=ЕСЛИ(A12="";"";(B11+B12)/2)	=ЕСЛИ(A12="";"";B11+4*D11+B12)
=ЕСЛИ(A11="";"";ЕСЛИ(A11+$H$4>$H$2;"";A11+$H$4))	=ЕСЛИ(A12="";"";(A12^2-3*A12+2)/(A12^2+1))	=ЕСЛИ(A13="";"";(A12+A13)/2)	=ЕСЛИ(C12="";"";(C12^2-3*C12+2)/(C12^2+1))	=ЕСЛИ(A13="";"";(B12+B13)/2)	=ЕСЛИ(A13="";"";B12+4*D12+B13)
=ЕСЛИ(A12="";"";ЕСЛИ(A12+$H$4>$H$2;"";A12+$H$4))	=ЕСЛИ(A13="";"";(A13^2-3*A13+2)/(A13^2+1))	=ЕСЛИ(A14="";"";(A13+A14)/2)	=ЕСЛИ(C13="";"";(C13^2-3*C13+2)/(C13^2+1))	=ЕСЛИ(A14="";"";(B13+B14)/2)	=ЕСЛИ(A14="";"";B13+4*D13+B14)
=ЕСЛИ(A13="";"";ЕСЛИ(A13+$H$4>$H$2;"";A13+$H$4))	=ЕСЛИ(A14="";"";(A14^2-3*A14+2)/(A14^2+1))	=ЕСЛИ(A15="";"";(A14+A15)/2)	=ЕСЛИ(C14="";"";(C14^2-3*C14+2)/(C14^2+1))	=ЕСЛИ(A15="";"";(B14+B15)/2)	=ЕСЛИ(A15="";"";B14+4*D14+B15)
=ЕСЛИ(A14="";"";ЕСЛИ(A14+$H$4>$H$2;"";A14+$H$4))	=ЕСЛИ(A15="";"";(A15^2-3*A15+2)/(A15^2+1))	=ЕСЛИ(A16="";"";(A15+A16)/2)	=ЕСЛИ(C15="";"";(C15^2-3*C15+2)/(C15^2+1))	=ЕСЛИ(A16="";"";(B15+B16)/2)	=ЕСЛИ(A16="";"";B15+4*D15+B16)

A=	0				
B=	1				
N=	10	**N<100!**			
dX=	=(H2-H1)/H3				
Точ.=	0,745677392555753	=B2	F(A)	**Погрешн.**	Теор.порядок точн.
ЛП=	=(СУММ(B2:B100)-I10)*$H$4	=ДВССЫЛ("B"&СЧЁТ(B:B)+1)	F(B)	=ABS(H10-$H$9)	1
СП=	=СУММ(D2:D100)*$H$4			=ABS(H11-$H$9)	2
ПП=	=(СУММ(B2:B100)-I9)*$H$4			=ABS(H12-$H$9)	1
Трап.=	=H4*СУММ(E2:E100)			=ABS(H13-$H$9)	2
Симп.=	=H4/6*СУММ(F2:F100)			=ABS(H14-$H$9)	4