

**ЛЕКЦИИ ПО КУРСУ  
ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ЭЛЕКТРОТЕХНИКИ**

## ЛЕКЦИЯ №1

### ВВЕДЕНИЕ

Электротехника – это наука о теории и практическом применении электрических и магнитных явлений. Основными вопросами, которыми занимается электротехника, являются генерирование, передача на расстояние и преобразование электрической энергии в механическую, тепловую, световую и другие формы энергии. В электротехнике выделяется ряд самостоятельных электротехнических дисциплин, таких как электрические машины, электроизмерительная техника, электропривод, электрические аппараты, электроника, преобразовательная техника и др. Однако основной теоретической базой всех названных дисциплин является курс «Теоретические основы электротехники».

Предысторией электротехники можно считать период до XVII века. К этому времени были обнаружены некоторые электрические и магнитные явления: в мореплавании успешно применялся компас, но природа этих явлений оставалась неизвестной.

Первым этапом электротехники следует считать XVII век, когда появились первые исследования электрических и магнитных явлений, а в конце XVIII века был создан первый электрохимический генератор Вольта (Италия) и в начале XIX века – большая гальваническая батарея Петрова (Россия). Эти изобретения послужили толчком к развитию науки об электрических и магнитных явлениях.

Ко второму этапу развития электротехники можно отнести первую половину XIX века. В этот период усилия ученых были направлены на раскрытие сущности электромагнитных явлений. Быстро развивались теория и практика электрохимических процессов, на базе которых Фарадеем был открыт закон электролиза. Изучение теплового действия тока привело Джоуля (Англия) и Ленца (Россия) к открытию закона, названного их именами. Изучая связь между электрическими и магнитными явлениями, Ампер (Франция) обосновал закон взаимодействия токов. В это же время Ом (Германия) была установлена связь между током, напряжением и сопротивлением, названная законом Ома. В 1831 г. Фарадей (Англия) открыл явление электромагнитной индукции. В 1833 г. Ленц предложил правило определения направления индуцированного тока. В 1845 г. Кирхгоф (Германия) сформулировал два закона, на основе которых и в настоящее время происходит расчет электрических цепей.

Третий этап охватывает вторую половину XIX и начало XX века. В это время была опубликована теоретическая работа Максвелла (Англия), разработавшего всеобъемлющую теорию электромагнетизма (1873 г.). Были изобретены электрические машины, трансформаторы, электрические аппараты, разработаны основы их теории, для расчета электрических цепей переменного тока было предложено использовать комплексные числа.

Четвертый этап простирается до наших дней. Он характеризуется проникновением электротехники во все области промышленности, транспорта, науки, в быт, разработкой новых направлений в производстве, передаче и применении электроэнергии.

## **1. ЛИНЕЙНЫЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЦЕПИ ПОСТОЯННОГО ТОКА**

### **1.1. Основные определения линейных и нелинейных электрических цепей**

Для удобства анализа реальное электромагнитное устройство с происходящими в нем и в окружающем его пространстве физическими процессами в теории электрических цепей заменяют некоторым расчетным эквивалентом – электрической цепью.

Электрической цепью называется совокупность соединенных друг с другом источников электрической энергии и нагрузок, по которым может протекать электрический ток. Электромагнитные процессы в электрической цепи можно описать с помощью понятий ток, напряжение, ЭДС, сопротивление, индуктивность, емкость.

Постоянным называется неизменный во времени электрический ток.

Постоянный ток обозначается буквой –  $I$ , ЭДС –  $E$ , напряжение –  $U$ , сопротивление –  $R$ , проводимость –  $G$ .

Изображенная с помощью условных знаков электрическая цепь называется электрической схемой.

Зависимость тока, протекающего по элементу электрической цепи, от напряжения на его зажимах (или наоборот) называется вольт-амперной характеристикой (ВАХ).

На рис. 1.1 изображены ВАХ линейного (ЛЭ) и нелинейного (НЭ) элементов.

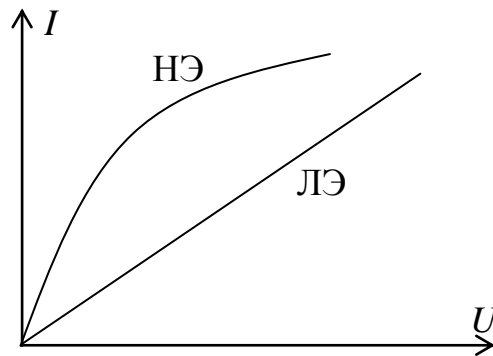


Рис. 1.1. ВАХ линейного и нелинейного элементов

Элементы, ВАХ которых являются прямыми линиями, называются линейными. Электрические цепи, имеющие только линейные элементы, называются линейными электрическими цепями.

Элементы, ВАХ которых не являются прямыми линиями, называются нелинейными. Электрические цепи, имеющие хотя бы один нелинейный элемент, называются нелинейными.

## 1.2. Источник ЭДС и источник тока

Реальный источник электрической энергии характеризуется двумя параметрами: ЭДС –  $E$  и внутренним сопротивлением –  $R_{вн}$ . Напряжение на его зажимах  $U = E - I \cdot R_{вн}$  (рис. 1.2а).

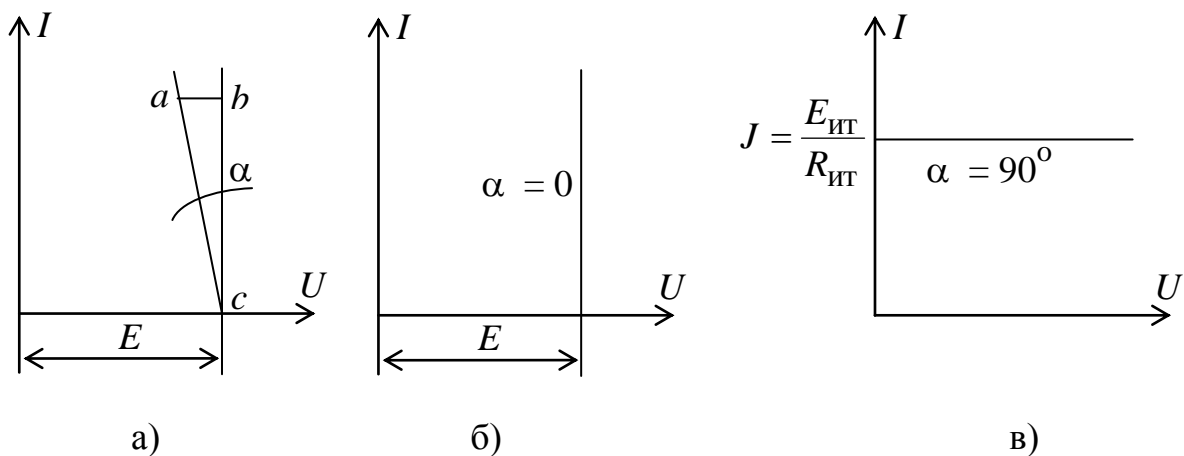


Рис. 1.2. ВАХ реального (а) и идеального (б) источников ЭДС и идеального (в) источника тока

$$\begin{cases} ab \cdot m_U = I \cdot R_{\text{вн}}; & bc \cdot m_I = I \\ \operatorname{tg} \alpha = \frac{ab}{bc} = R_{\text{вн}} \frac{m_I}{m_U} \end{cases}$$

Рассмотрим два крайних случая.

1. Если  $R_{\text{вн}} = 0$ , ВАХ имеет вид прямой (рис. 1.2б). Такой характеристикой обладает идеализированный источник питания, называемый источником ЭДС.

2. Если у некоторого источника беспредельно увеличивать ЭДС  $E$  и внутреннее сопротивление  $R_{\text{вн}}$ , то угол  $\alpha$  стремится к 0. Такой источник питания называется источником тока и его ВАХ выражается как

$$J = \frac{E_{\text{ит}}}{R_{\text{ит}}}.$$

Ток  $J$  не зависит от сопротивления нагрузки, к которой присоединен источник тока.

При расчете и анализе электрических цепей реальный источник электрической энергии с конечным значением  $R_{\text{вн}}$  заменяют расчетным эквивалентом. В качестве эквивалента может быть взят:

- 1) источник ЭДС с последовательно подсоединенным к нему сопротивлением  $R_{\text{вн}}$  (рис. 1.3а);
- 2) источник тока с током  $J_{\text{к}} = E/R_{\text{вн}}$  и параллельно с ним включенным сопротивлением  $R_{\text{вн}}$  (рис. 1.3б).

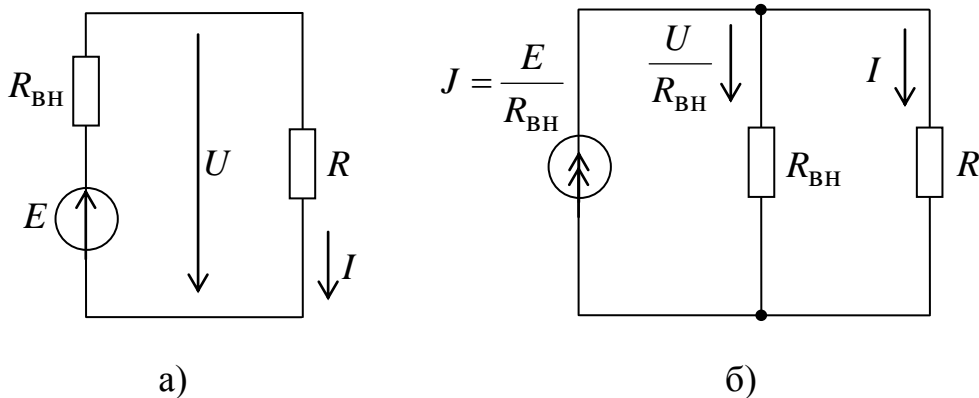


Рис. 1.3. Преобразование реального источника ЭДС (а) в реальный источник тока (б)

Ток в нагрузке для обеих схем одинаков и равен

$$I = \frac{E}{R + R_{\text{вн}}}.$$

Следует отметить:

- 1) источник ЭДС и источник тока – идеализированные элементы, физически осуществить которые невозможно;
- 2) идеальный источник ЭДС нельзя заменить идеальным источником тока.

## ЛЕКЦИЯ №2

### 1.3. Напряжение на участке цепи

Под напряжением на некотором участке электрической цепи понимают разность потенциалов между крайними точками этого участка.

Рассмотрим участок цепи с одним сопротивлением (рис. 1.4).

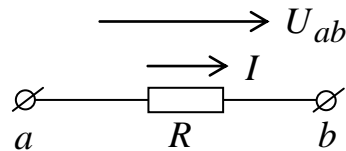


Рис. 1.4. Схема участка цепи

$$\varphi_a = \varphi_b + I \cdot R,$$

$$U_{ab} = \varphi_a - \varphi_b = I \cdot R$$

или

$$I = \frac{U_{ab}}{R}.$$

(1.1)

Эта формула является законом Ома для участка цепи без ЭДС.

Положительное направление падения напряжения на каком-либо участке цепи, указываемое на схеме стрелкой, всегда совпадает с положительным направлением отсчета тока, протекающего по данному сопротивлению.

Если цепь содержит ЭДС (рис. 1.5), то закон Ома для участка цепи можно записать:

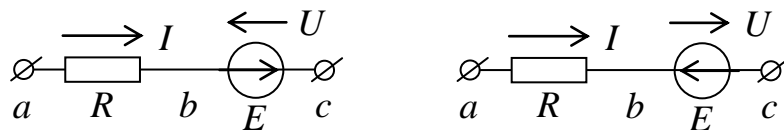


Рис. 1.5. Участок цепи, содержащей ЭДС

для первого участка  $U_{ac} = \varphi_a - \varphi_c = I \cdot R - E;$

для второго участка  $U_{ac} = \varphi_a - \varphi_c = I \cdot R + E.$

Отсюда вытекает, что

$$I = \frac{U_{ac} \pm E}{R}. \quad (1.2)$$

Это формула закона Ома для участка цепи с ЭДС (обобщенный закон Ома).

## 1.4. Законы Кирхгофа. Составление уравнений для расчета токов с помощью законов Кирхгофа

Для расчета сложной разветвленной электрической цепи существенное значение имеет число ветвей и узлов.

Ветвью называется участок электрической цепи, состоящий только из последовательно включенных источников ЭДС и приемников. Узлом называется место или точка соединения трех или более ветвей. При обходе по соединенным в узлах ветвям можно получить замкнутый контур электрической цепи.

Все электрические цепи подчиняются двум законам Кирхгофа.

Первый закон имеет две формулировки:

- 1) алгебраическая сумма токов в узле равна нулю;
- 2) сумма токов, притекающих к любому узлу, равна сумме токов, вытекающих из него

$$\sum_{k=1}^n I_k = 0. \quad (1.3)$$

Физически I закон Кирхгофа означает, что движение зарядов в цепи происходит так, что ни в одном из узлов (участков схемы) они не накапливаются.

Второй закон Кирхгофа гласит:

алгебраическая сумма падений напряжений в любом замкнутом контуре равна алгебраической сумме ЭДС вдоль того же контура

$$\sum_{k=1}^m I_k \cdot R_k = \sum_{k=1}^n E_k, \quad (1.4)$$

где  $m$  – число сопротивлений в контуре;

$n$  – число ЭДС в контуре.

Если направления падений напряжений и ЭДС совпадают с направлением обхода контура, то они входят в сумму со знаком «+».

Законы Кирхгофа используют для определения токов в ветвях схемы.

Обозначим число ветвей схемы –  $b$ , число узлов –  $u$ , число ветвей, содержащих источники тока –  $b_{\text{ит}}$ . В каждой ветви протекает свой ток.

Так как токи в ветвях с источниками тока известны, то число неизвестных токов равно  $b - b_{\text{ит}}$ .

Перед составлением уравнений необходимо:

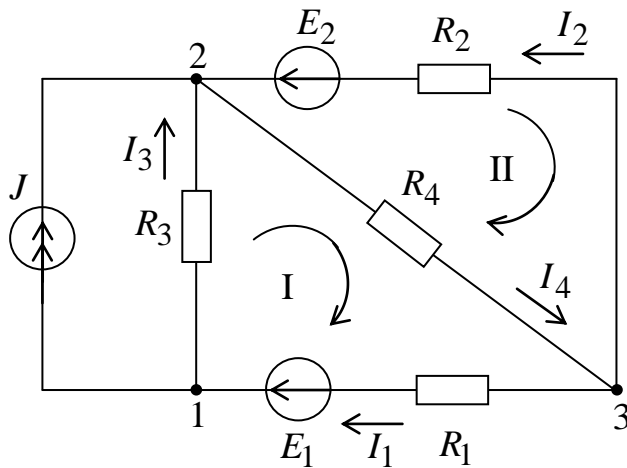
- 1) произвольно выбрать положительные направления токов в ветвях;



2) выбрать положительные направления обхода контуров для составления уравнений по II закону Кирхгофа (с целью единообразия рекомендуется для всех контуров выбирать одно направление, например, по часовой стрелке).

Для получения линейно независимых уравнений по I закону Кирхгофа составляют  $(y - 1)$  уравнение, а по II закону – недостающие  $(b - b_{ит}) - (y - 1)$  уравнения. Составляя уравнения по II закону Кирхгофа, необходимо охватить все ветви схемы, исключая ветви с источниками тока. При этом в каждый контур должна входить хотя бы одна ветвь, не вошедшая в предыдущий контур. Такие контуры называются независимыми. Это условие является необходимым и достаточным для однозначного определения токов.

Рассмотрим уравнения для расчета токов на примере схемы, изображенной на рис. 1.6.



$$y - 1 = 2$$

$$b - b_{ит} = 4$$

по I закону – 2 уравнения

по II закону – 2 уравнения

Рис. 1.6. Пример расчетной схемы

$$\text{Узел 2} \quad J + I_2 + I_3 - I_4 = 0.$$

$$\text{Узел 3} \quad I_4 - I_1 - I_2 = 0.$$

$$\text{Контур I} \quad I_1 \cdot R_1 + I_3 \cdot R_3 + I_4 \cdot R_4 = E_1.$$

$$\text{Контур II} \quad -I_2 \cdot R_2 - I_4 \cdot R_4 = -E_2.$$

### 1.8. Принцип наложения и метод наложения

Определим ток в  $k$ -ой ветви сложной схемы по методу контурных токов, выбрав контура так, чтобы  $k$ -ая ветвь входила только в один  $k$ -й контур. Ток в этой ветви будет равен контурному току  $I_{kk}$  из уравнения (1.7). Каждое слагаемое в правой части (1.7) представляет собой ток, вызванный в  $k$ -й ветви соответствующей контурной ЭДС. Каждую из контурных ЭДС

можно выразить через ЭДС ветвей  $E_1, E_2, \dots, E_k, \dots, E_n$  и, сгруппировав коэффициенты при этих ЭДС, получить выражение следующего вида

$$I_k = E_1 \cdot G_{k1} + E_2 \cdot G_{k2} + \dots + E_k \cdot G_{kk} + \dots + E_n \cdot G_{kn}. \quad (1.8)$$

Если контуры выбраны так, что любая из ЭДС, например  $E_m$ , входит только в один  $m$ -контур, то  $G_{km} = \frac{\Delta_{km}}{\Delta}$ . Уравнение (1.8) выражает собой принцип наложения: ток в  $k$ -ой ветви равен алгебраической сумме токов, вызванных каждой из ЭДС схемы в отдельности. Принцип справедлив для всех линейных цепей, на его основе разработан метод, называемый методом наложения.

Порядок расчета по этому методу следующий. Поочередно рассчитывают токи, возникающие от действия каждой из ЭДС при отсутствии в схеме остальных ЭДС, при этом внутренние сопротивления всех источников остаются. Затем находят токи в ветвях путем алгебраического сложения частичных токов. Следует отметить, что этот метод нельзя использовать для подсчета выделяемых в сопротивлениях мощностей, так как

$$P = R \cdot (I_1 + I_2)^2 \neq R \cdot I_1^2 + R \cdot I_2^2.$$

Первоначальный подсчет токов по этому методу достаточно трудоемкий, но его применение оправдано, если в дальнейшем необходимо проследить, как влияет изменение ЭДС того или иного источника на ток в какой-либо ветви.

### 1.9. Входные и взаимные проводимости, входное сопротивление

Изобразим так называемую скелетную схему пассивной цепи, где показаны только ветви и узлы и предполагается, что в каждой ветви имеется сопротивление (рис. 1.8).

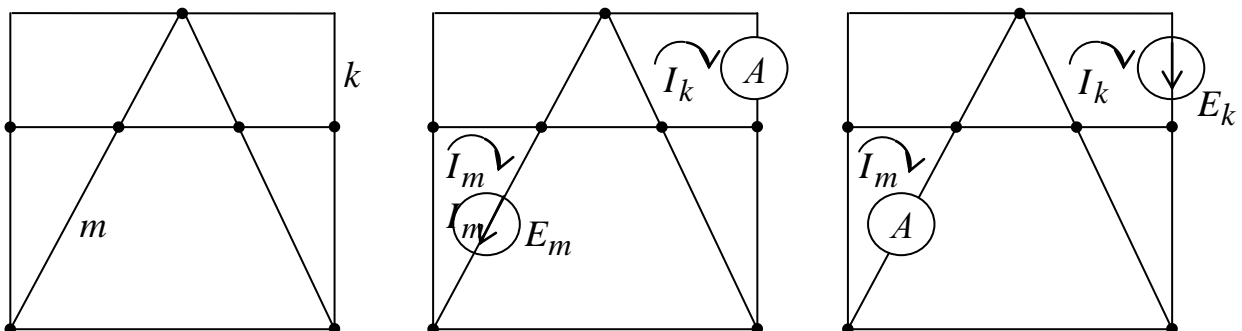


Рис. 1.8. Схема для определения взаимных проводимостей

Выделим в схеме две ветви  $m$  и  $k$ . В ветвь  $m$  поместим ЭДС  $E_m$  (в других ветвях ЭДС нет). Выберем в схеме контуры так, чтобы ветвь  $m$  входила только в  $m$ -контур, а ветвь  $k$  – в  $k$ -контур. ЭДС  $E_m$  вызовет токи в ветвях  $k$  и  $m$ :

$$\begin{cases} I_k = E_m \cdot G_{km} \\ I_m = E_m \cdot G_{mm} \end{cases}$$

Коэффициент  $G$ , имеющий размерность проводимости, с одинаковыми индексами ( $G_{mm}$ ) называют входной проводимостью ветви. Он численно равен току в ветви  $m$  под действием ЭДС  $E_m = 1$  В (единичной ЭДС):

$$I_{mm} = 1 \cdot G_{mm}.$$

Коэффициенты  $G$  с разными индексами называются взаимными проводимостями. Взаимная проводимость  $G_{km}$  численно равна току в  $k$ -й ветви, возникающему от действия единичной ЭДС в ветви  $m$ .

Входные и взаимные проводимости могут быть определены расчетным и опытным путем.

При расчетном определении составляют для схемы уравнения по методу контурных токов так, чтобы ветви, взаимные или входные проводимости которых нас интересуют, входили бы каждая только в свой контур. Находят определитель системы  $\Delta$  и по нему необходимые алгебраические дополнения

$$\begin{cases} G_{mm} = \Delta_{mm} / \Delta \\ G_{km} = \Delta_{km} / \Delta \end{cases}$$

Взаимная проводимость  $G_{km}$  может получиться как положительной, так и отрицательной. При отрицательном знаке  $E_m$  вызывает в  $k$ -й ветви ток, не совпадающий по направлению с произвольно выбранным.

При опытном определении  $G_{mm}$  и  $G_{km}$  в  $m$ -ю ветвь включают источник ЭДС  $E_m$ , а в  $m$ -ю и в  $k$ -ю – амперметры. По показаниям приборов определяют:

$$G_{km} = \frac{I_k}{E_m}; \quad G_{mm} = \frac{I_m}{E_m}.$$

Выделим  $m$ -ю ветвь, обозначив всю остальную часть схемы, не содержащую ЭДС, прямоугольником (рис. 1.9).

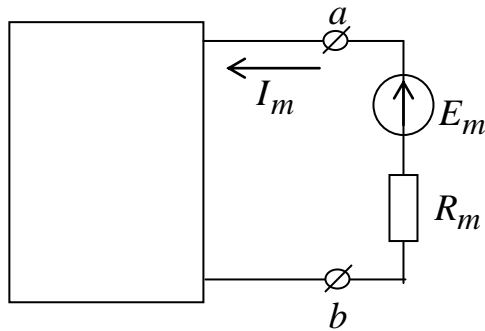


Рис. 1.9. Расчетная схема

Сопротивление части  
схемы, обозначенной  
прямоугольником, по  
отношению к зажимам  $ab$   
называют входным

$$R_{\text{вх } m} = E_m / I_m = 1 / G_{mm}.$$

### 1.10. Теорема взаимности. Теорема компенсации

Для любой линейной цепи ток в  $k$ -й ветви, вызванный ЭДС  $E_m$ , находящейся в ветви  $m$ ,  $I_k = E_m \cdot G_{km}$ , будет равен току  $I_m$  в  $m$ -й ветви, вызванному ЭДС  $E_k = E_m$ , находящейся в ветви  $k$ :  $I_m = E_k \cdot G_{mk}$ .

Теорема взаимности основана на свойстве симметрии определителя  $\Delta$  относительно главной диагонали:  $\Delta_{mk} = \Delta_{km}$ .

Следует учесть, что направления контурных токов и ЭДС в контурах должны совпадать. Для нелинейных цепей теорема взаимности невыполнима.

Цепи, для которых принцип взаимности невыполним, называются необратимыми.

Согласно теореме компенсации в любой электрической цепи без изменения токораспределения сопротивление можно заменить ЭДС, численно равной падению напряжения на заменяемом сопротивлении и направленной встречно току в этом сопротивлении.

### 1.11. Линейные соотношения в электрических цепях

Если в линейной электрической цепи изменяется ЭДС или сопротивление в какой-либо одной ветви, то две любые величины (токи или напряжения) двух любых ветвей связаны друг с другом линейными зависимостями вида:  $y = a + b \cdot x$ .

Под  $x$  подразумевается ток или напряжение одной ветви, под  $y$  – ток или напряжение другой.

Доказательство.

Вернемся к уравнению (1.8). Если в схеме изменяется только одна ЭДС, например  $E_m$ , то все слагаемые, кроме  $E_m \cdot G_{km}$ , постоянны и могут быть обозначены некоторым слагаемым  $A_k$ , тогда

$$I_k = A_k + E_m \cdot G_{km}.$$

Аналогично для ветви  $p$ :

$$I_p = A_p + E_m \cdot G_{pm}.$$

Определим из последнего  $E_m$ :

$$E_m = \frac{I_p - A_p}{G_{pm}}.$$

Подставив его в выражение для тока  $I_k$ , получим

$$I_k = a_k + b_k \cdot I_p,$$

где  $a_k = A_k - \frac{A_p \cdot G_{km}}{G_{pm}};$

$$b_k = G_{km}/G_{mk}.$$

Коэффициенты  $a_k$  и  $b_k$  могут быть больше или меньше нуля. В частном случае  $a_k$  или  $b_k$  могут быть равными нулю.

Последнее уравнение свидетельствует, что при изменении  $E_m$  токи  $I_k$  и  $I_p$  связаны линейной зависимостью. Из теоремы компенсации известно, что любое сопротивление можно заменить ЭДС, т.е. линейное соотношение будет иметь место и при изменении сопротивления в какой-либо  $m$ -й ветви.

Коэффициенты  $a_k$  и  $b_k$  могут быть найдены расчетным и опытным путем.

При опытном определении коэффициентов достаточно найти значения двух токов (или напряжений) при двух различных режимах работы схемы, и затем решить систему из двух уравнений с двумя неизвестными. Пусть в первом опыте определили  $I_k = I_{k1}$  и  $I_p = I_{p1}$ , а во втором  $I_k = I_{k2}$  и  $I_p = I_{p2}$ , тогда

$$\begin{cases} I_{k1} = a_k + b_k \cdot I_{p1} \\ I_{k2} = a_k + b_k \cdot I_{p2}, \end{cases}$$

где

$$a_k = \frac{I_{k2} - \frac{I_{p2}}{I_{p1}} \cdot I_{k1}}{1 + \frac{I_{p2}}{I_{p1}}}; \quad b_k = \frac{I_{k1} - a_k}{I_{p1}}.$$

Если в схеме одновременно изменяются ЭДС или сопротивления в каких-либо двух ветвях, то любые три величины (токи или напряжения) связаны линейным соотношением  $y = a + b \cdot x + c \cdot z$ .

### ЛЕКЦИЯ №3

#### 1.12. Замена нескольких параллельных ветвей, содержащих источники ЭДС и источники тока, одной эквивалентной

При расчете сложных схем существенное облегчение дает замена нескольких параллельно включенных ветвей, содержащих источники ЭДС, источники тока и резисторы, одной эквивалентной.

Необходимо, чтобы при любых значениях тока  $I$ , притекающего к выделенному участку из остальной части схемы, напряжение  $U_{ab}$  в обеих схемах было бы одинаковым (рис. 1.10).

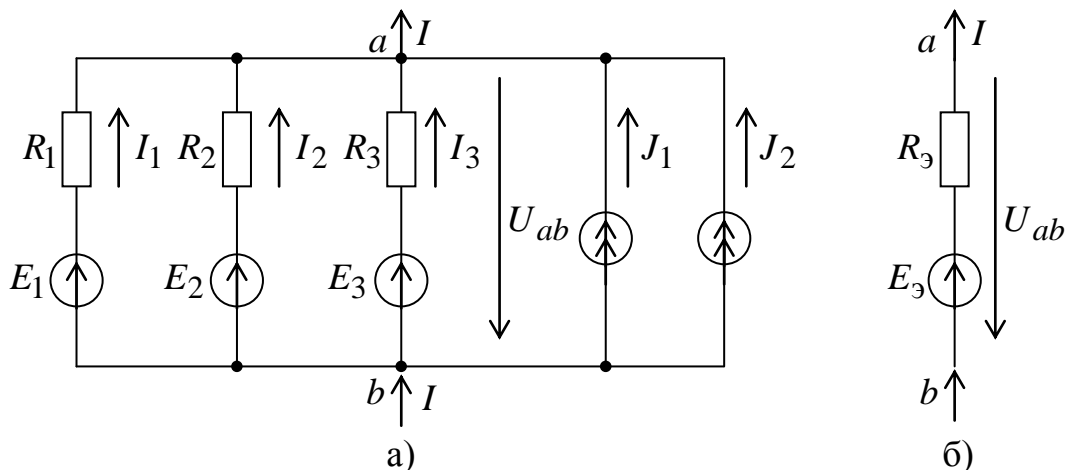


Рис. 1.10. Исходная (а) и эквивалентная (б) схемы источников  
Согласно I закону Кирхгофа ток во внешней цепи

$$I_1 + I_2 + I_3 + J_1 + J_2 = I$$

$$\begin{cases} I_1 = \frac{E_1 - U_{ab}}{R_1} = (E_1 - U_{ab}) \cdot G_1 \\ I_2 = (E_2 - U_{ab}) \cdot G_2 \\ \dots \\ I_n = (E_n - U_{ab}) \cdot G_n. \end{cases} \quad (1.9)$$

$$I = \sum_{k=1}^{n \neq m} I_k = \sum_{k=1}^n E_k \cdot G_k + \sum_{k=1}^m J_k - U_{ab} \cdot \sum_{k=1}^n G_k, \quad (1.10)$$

где  $m$  – число ветвей с источниками ЭДС;  $n$  – число ветвей с источниками тока.

Для схемы на рис.1.10б

$$I = E_{\mathcal{G}} \cdot G_{\mathcal{G}} - U_{ab\mathcal{G}} \cdot G_{\mathcal{G}}.$$

Равенство токов в обеих схемах возможно, если

$$\begin{cases} G_{\mathcal{G}} = \sum_{k=1}^n G_k \\ E = \frac{\sum_{k=1}^n E_k \cdot G_k + \sum_{k=1}^m J_k}{\sum_{k=1}^n G_k}. \end{cases} \quad (1.11)$$

Если направление ЭДС или источника тока изменить на обратное, то они войдут в формулу (1.11) со знаком « $-$ ». Если ЭДС в какой-либо ветви нет, то соответствующее слагаемое в числителе (1.11) будет отсутствовать, но проводимость этой ветви в знаменателе формулы останется.

### 1.15. Преобразование звезды в треугольник и треугольника в звезду

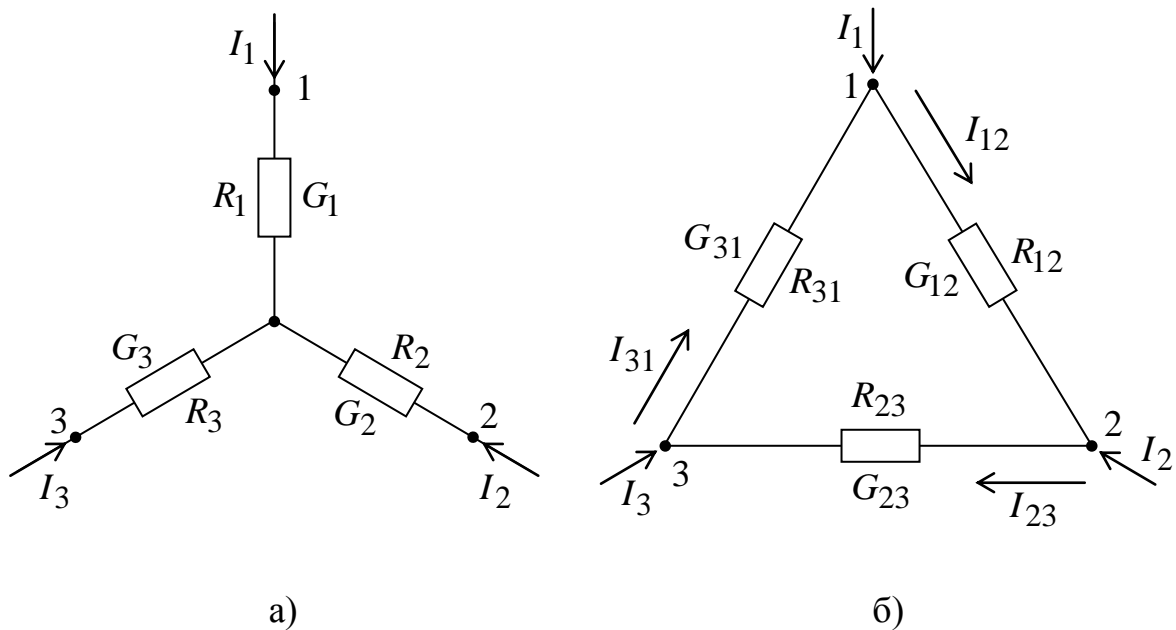


Рис. 1.13. Эквивалентные схемы «звезда» (а) и «треугольник» (б)

Очень часто при преобразовании электрических цепей оказывается полезным преобразовать треугольник сопротивлений в эквивалентную звезду или наоборот – звезду в треугольник. Если преобразование выполнить таким образом, что при одинаковых значениях потенциалов одноименных точек треугольника и звезды, притекающие к этим точкам токи, будут одинаковы, то произведенная замена не скажется на работе всей внешней цепи (рис. 1.13).

Получим формулы преобразования, для чего выразим токи  $I_1$ ,  $I_2$  и  $I_3$  в звезде и треугольнике через разности потенциалов точек и соответствующие проводимости.

$$I_1 + I_2 + I_3 = 0; \quad (1.14)$$

$$I_1 = (\varphi_1 - \varphi_0) \cdot G_1; \quad I_2 = (\varphi_2 - \varphi_0) \cdot G_2; \quad I_3 = (\varphi_3 - \varphi_0) \cdot G_3. \quad (1.15)$$

Подставим (1.15) в (1.14)

$$G_1 \cdot \varphi_1 + G_2 \cdot \varphi_2 + G_3 \cdot \varphi_3 - (G_1 + G_2 + G_3) \cdot \varphi_0 = 0.$$

Отсюда

$$\varphi_0 = \frac{G_1 \cdot \varphi_1 + G_2 \cdot \varphi_2 + G_3 \cdot \varphi_3}{G_1 + G_2 + G_3}. \quad (1.16)$$

Введем это выражение в уравнение для тока  $I_1$

$$I_1 = (\varphi_1 - \varphi_0) \cdot G_1 = \frac{[(G_1 + G_3) \cdot \varphi_1 - G_2 \cdot \varphi_2 - G_3 \cdot \varphi_3] \cdot G_1}{G_1 + G_2 + G_3}. \quad (1.17)$$

Для треугольника

$$\begin{aligned} I_1 = I_{12} - I_{31} &= (\varphi_1 - \varphi_2) \cdot G_{12} - (\varphi_3 - \varphi_1) \cdot G_{31} = \\ &= \varphi_1 \cdot (G_{12} + G_{31}) - \varphi_2 \cdot G_{12} - \varphi_3 \cdot G_{31}. \end{aligned} \quad (1.18)$$

Так как ток  $I_1$  в схеме треугольника и звезды должен быть одинаков при любых значениях потенциалов  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$  и  $\varphi_3$ , то коэффициенты при потенциалах  $\varphi_2$  и  $\varphi_3$  в правой части (1.18) должны равняться аналогичным коэффициентам в правой части выражения (1.17). Следовательно,

$$\begin{cases} G_{12} = \frac{G_1 \cdot G_2}{G_1 + G_2 + G_3} \\ G_{23} = \frac{G_2 \cdot G_3}{G_1 + G_2 + G_3} \\ G_{31} = \frac{G_3 \cdot G_1}{G_1 + G_2 + G_3} \end{cases} \quad (1.19)$$

Заменим проводимости на сопротивления

$$\begin{aligned} R_1 &= \frac{1}{G_1}; \quad R_2 = \frac{1}{G_2}; \quad R_3 = \frac{1}{G_3}; \\ R_{12} &= \frac{1}{G_{12}}; \quad R_{23} = \frac{1}{G_{23}}; \quad R_{31} = \frac{1}{G_{31}}. \end{aligned} \quad (1.20)$$

Подставив (1.20) в (1.19), получим формулы для преобразования звезды сопротивлений в эквивалентный треугольник



$$\begin{cases} R_{12} = R_1 + R_2 + \frac{R_1 \cdot R_2}{R_3} \\ R_{23} = R_2 + R_3 + \frac{R_2 \cdot R_3}{R_1} \\ R_{31} = R_3 + R_1 + \frac{R_3 \cdot R_1}{R_2}. \end{cases} \quad (1.21)$$

Решив эту систему относительно  $R_1$ ,  $R_2$  и  $R_3$ , получим формулы для преобразования треугольника сопротивлений в эквивалентную звезду

$$\begin{cases} R_1 = \frac{R_{12} \cdot R_{31}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}} \\ R_2 = \frac{R_{12} \cdot R_{23}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}} \\ R_3 = \frac{R_{23} \cdot R_{31}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}. \end{cases} \quad (1.22)$$

### Энергетический баланс в электрических цепях

При протекании токов по сопротивлениям электрическая энергия преобразуется в тепловую. На основании закона сохранения энергии количество тепла, выделяющегося в единицу времени в сопротивлениях электрической цепи, равняется энергии, доставляемой за то же время источниками питания.

Если направление тока  $I$ , протекающего через источник ЭДС  $E$ , совпадает с направлением ЭДС, то источник ЭДС доставляет в цепь в единицу времени энергию (его мощность), равную  $E(I)$ , которая с положительным знаком входит в уравнение энергетического баланса.

Уравнение энергетического баланса

$$\sum_{k=1}^n I_k^2 \cdot R_k = \sum_{k=1}^m E_k \cdot I_k + \sum_{k=1}^l U_{ab} \cdot J_k, \quad (1.5)$$

где  $U_{ab} \cdot J_k$  – мощность, доставляемая в цепь источником тока ( $a$  – узел, к которому притекает ток  $J_k$ ,  $b$  – узел, из которого этот ток вытекает).

#### 1.17. Передача энергии от активного двухполюсника нагрузке

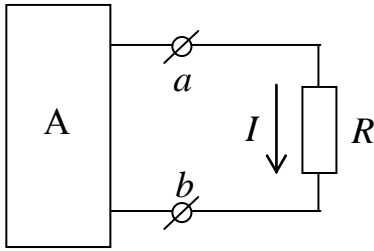


Рис. 1.16. Нагрузка активного двухполюсника

Если нагрузка  $R$  подключена к активному двухполюснику (рис. 1.16), то через нее пойдет ток, определяемый выражением (1.23), и в ней будет выделяться мощность

$$P = I^2 \cdot R = \frac{U_{ab\text{xx}}^2}{(R + R_{\text{вх}})^2} \cdot R.$$

Выясним, каким должно быть соотношение между сопротивлением нагрузки  $R$  и входным сопротивлением двухполюсника  $R_{\text{вх}}$ , чтобы в нагрузке выделялась максимальная мощность, чему она будет равна и каков при этом КПД передачи. С этой целью найдем первую производную мощности по сопротивлению и приравняем ее нулю.

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial R} &= \frac{\partial}{\partial R} \left[ U_{ab\text{xx}}^2 \cdot R \cdot (R + R_{\text{вх}})^{-2} \right] = \\ &= U_{ab\text{xx}}^2 \cdot \left[ (R + R_{\text{вх}})^{-2} - R \cdot 2 \cdot (R + R_{\text{вх}})^{-3} \right] = \\ &= \frac{U_{ab\text{xx}}^2}{(R + R_{\text{вх}})^3} \cdot (R + R_{\text{вх}} - 2 \cdot R) = \frac{U_{ab\text{xx}}^2}{(R + R_{\text{вх}})^3} \cdot (R_{\text{вх}} - R). \end{aligned} \quad (1.25)$$

Отсюда  $R = R_{\text{вх}}$ .

Если найти вторую производную, то можно убедиться, что она меньше нуля, что говорит о максимуме функции  $P = f(R)$  в данной точке.

Максимальная мощность, которая может быть выделена в нагрузке

$$P_{\text{max}} = \frac{U_{ab\text{xx}}^2}{4 \cdot R_{\text{вх}}}. \quad (1.26)$$

Мощность, развиваемая эквивалентным генератором

$$P_{\text{ген}} = U_{ab\text{xx}} \cdot I = \frac{U_{ab\text{xx}}^2}{R + R_{\text{вх}}}. \quad (1.27)$$

Коэффициент полезного действия

$$\eta = \frac{P}{P_{\text{ген}}} = \frac{R}{R + R_{\text{вх}}}. \quad (1.28)$$

Если  $R = R_{\text{вх}}$ , то  $\eta = 0.5$ .

Если мощность  $P$  значительна, то работать с таким КПД недопустимо. Но если мощность  $P$  мала и составляет доли ватта (такой мощностью, например, обладают различные датчики автоматики), то с низким КПД

можно не считаться, поскольку датчик при этом отдает в измерительный орган максимально возможную мощность. Режим, когда  $R = R_{\text{вх}}$ , называется согласованным.

### 1.18. Передача энергии по линии электропередачи

На рис. 1.17 условно изображены идеальный источник, подключенный к началу линии, сопротивления линии и нагрузки. При этом приняты следующие обозначения:

$U_1$  – напряжение в начале линии;

$U_2$  – напряжение на нагрузке;

$R$  – сопротивление проводов линии;

$R_{\text{н}}$  – сопротивление нагрузки.

При передаче больших мощностей (десятки мегаватт) по реальным линиям КПД составляет 94 – 97 %, а  $U_2$  лишь на несколько процентов меньше напряжения в начале линии, что является важным с точки зрения повышения экономичности передачи мощности.

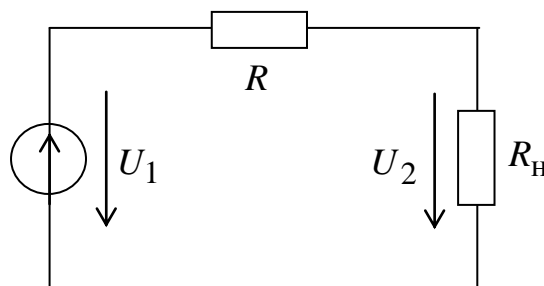


Рис. 1.17. Подключение нагрузки к источнику

Общая картина передачи мощности (рис. 1.18) может быть построена по следующим выражениям:

$$P_1 = U_1 \cdot I; \quad P_2 = U_1 \cdot I - I^2 \cdot R;$$

$$\eta = \frac{P_2}{P_1} = 1 - \frac{R \cdot I}{U_1}; \quad U_2 = U_1 - R \cdot I.$$

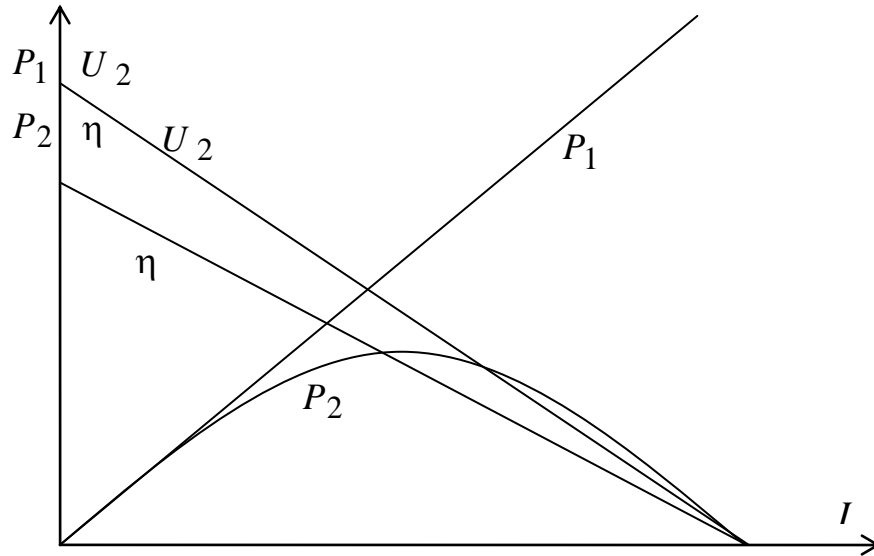


Рис. 1.18. Зависимости  $P_1, P_2, U_2, \eta = f(I)$  при передаче энергии

## ЛЕКЦИЯ №4

### 1.7. Метод контурных токов

В основу метода положено два предположения:

- 1) в каждом независимом контуре протекает свой контурный ток;
- 2) токи в ветвях схемы равны алгебраической сумме контурных токов, протекающих через данную ветвь.

Согласно с этим методом неизвестными являются контурные токи, поэтому число уравнений для решения снижается до числа независимых контуров, т.е. до числа уравнений составленных по II закону Кирхгофа.

Рассмотрим двухконтурную электрическую цепь (рис. 1.7).

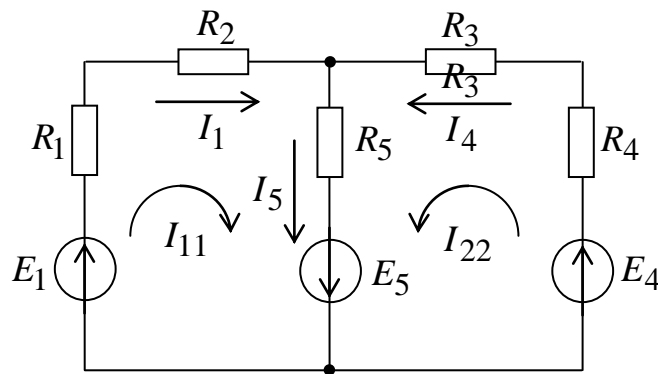


Рис. 1.7. Расчетная схема двухконтурной цепи

Составим уравнения по законам Кирхгофа

$$\begin{cases} I_1 + I_4 = I_5 \\ (R_1 + R_2)I_1 + R_5I_5 = E_1 + E_5 \\ R_5I_5 + (R_3 + R_4)I_4 = E_4 + E_5. \end{cases}$$

Подставим в последние уравнения ток  $I_5$

$$\begin{cases} (R_1 + R_2)I_1 + R_5(I_1 + I_2) = E_1 + E_5 \\ R_5(I_1 + I_2) + (R_3 + R_4)I_2 = E_4 + E_5; \\ (R_1 + R_2 + R_5)I_{11} + R_5I_{22} = E_1 + E_5 \\ R_5I_{11} + (R_2 + R_3 + R_5)I_2 = E_4 + E_5. \end{cases}$$

Эти уравнения можно записать в виде

$$\begin{cases} R_{11}I_{11} + R_{12}I_{22} = E_{11} \\ R_{21}I_{11} + R_{22}I_2 = E_{22}, \end{cases}$$

где  $R_{11} = R_1 + R_2 + R_5$  и  $R_{22} = R_3 + R_4 + R_5$  – полные или собственные сопротивления I и II контуров;  $R_{12} = R_{21} = R_5$  – сопротивление смежной ветви между контурами I и II;  $E_{11}$  и  $E_{22}$  – контурные ЭДС I и II контуров.

Сопротивление смежной ветви входит в уравнение со знаком « + », если направление смежного контурного тока в нем совпадает с направлением собственного контурного тока.

Если в электрической схеме имеются источники тока, то их можно заменить источниками напряжения. Если проводимости источников тока равны нулю, то в этом случае целесообразно выбрать заданные токи источников тока в качестве контурных. При этом число уравнений сократится на число заданных источников тока.

Если в схеме  $n$  контуров, то уравнения запишутся

$$\begin{cases} R_{11}I_{11} + R_{12}I_{22} + \dots + R_{1n}I_{nn} = E_{11} \\ R_{21}I_{11} + R_{22}I_{22} + \dots + R_{2n}I_{nn} = E_{22} \\ \dots \\ R_{n1}I_{11} + R_{n2}I_{22} + \dots + R_{nn}I_{nn} = E_{nn}. \end{cases} \quad (1.6)$$

В матричной форме можно записать

$$\mathbf{R} \cdot \mathbf{I} = \mathbf{E},$$

где

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & \dots & R_{1n} \\ R_{21} & R_{22} & \dots & R_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ R_{n1} & R_{n2} & \dots & R_{nn} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{I} = \begin{bmatrix} I_{11} \\ I_{22} \\ \dots \\ I_{nn} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{E} = \begin{bmatrix} E_{11} \\ E_{22} \\ \dots \\ E_{nn} \end{bmatrix}.$$

Общее решение системы  $n$  уравнений с  $n$  неизвестными:

$$I_{kk} = E_{11} \cdot \frac{\Delta_{k1}}{\Delta} + E_{22} \cdot \frac{\Delta_{k2}}{\Delta} + \dots + E_{nn} \cdot \frac{\Delta_{kn}}{\Delta}, \quad (1.7)$$

где  $\Delta = \begin{vmatrix} R_{11} & R_{12} & \dots & R_{1n} \\ R_{21} & R_{22} & \dots & R_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ R_{n1} & R_{n2} & \dots & R_{nn} \end{vmatrix}$  – определитель системы (1.6).

Алгебраическое дополнение  $\Delta_{km}$  получено из  $\Delta$  путем вычеркивания  $k$ -ого столбца и  $m$ -й строки и умножения полученного определителя на  $(-1)^{k+m}$ .

Относительно главной диагонали определитель делится на две части, являющиеся зеркальным отображением друг друга. Это свойство называется симметрией относительно главной диагонали. Отсюда  $\Delta_{km} = \Delta_{mk}$ .

Формула (1.7) используется как исходная при рассмотрении таких вопросов теории линейных цепей как определение входных и взаимных проводимостей ветвей, принцип взаимности, метод наложения и линейные соотношения в электрических цепях.

### 1.13. Метод двух узлов

Это наиболее распространенный метод расчета схем, содержащих только два узла.

Методом двух узлов определяется напряжение между этими узлами, а затем по величине этого напряжения определяются токи ветвей.

Расчетные формулы этого метода получаются на основе выражений (1.9) и (1.10). Рассмотрим метод двух узлов на примере схемы, изображенной на рис. 1.11.

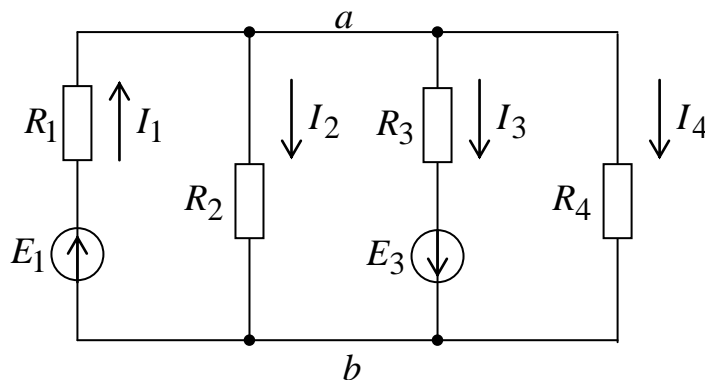


Рис. 1.11. Пример схемы для определения токов методом двух узлов

В формуле (1.10) примем  $I = 0$ , тогда

$$U_{ab} = \frac{\sum E_k \cdot G_k + \sum J_k}{\sum G_k}. \quad (1.12)$$

Зная  $U_{ab}$ , можно определить ток в любой ветви. Так для схемы, изображенной на рис. 1.11

$$U_{ab} = \frac{E_1 \cdot G_1 - E_3 \cdot G_3}{G_1 + G_2 + G_3 + G_4};$$

$$I_1 = \frac{E_1 - U_{ab}}{R_1}; \quad I_2 = \frac{U_{ab}}{R_2}; \quad I_3 = \frac{E_3 + U_{ab}}{R_3}; \quad I_4 = \frac{U_{ab}}{R_4}.$$

### 1.14. Метод узловых потенциалов

В данном методе за неизвестные принимаются потенциалы узлов схемы. Пусть схема содержит  $n$  узлов. Без изменения токораспределения схемы можно задаться потенциалом любого узла (для простоты – приравнять нулю). При этом число неизвестных уменьшается до  $(n - 1)$ , т.е. до числа уравнений, составляемых по I закону Кирхгофа.

Метод узловых потенциалов является одним из основных методов электротехники. Он имеет существенное преимущество, когда схема содержит много ветвей и относительно небольшое количество узлов.

Рассмотрим метод узловых потенциалов на примере схемы, изображенной на рис. 1.12.

Схема имеет три узла и шесть ветвей. По I закону Кирхгофа необходимо составить 2 уравнения, а по II – 3.

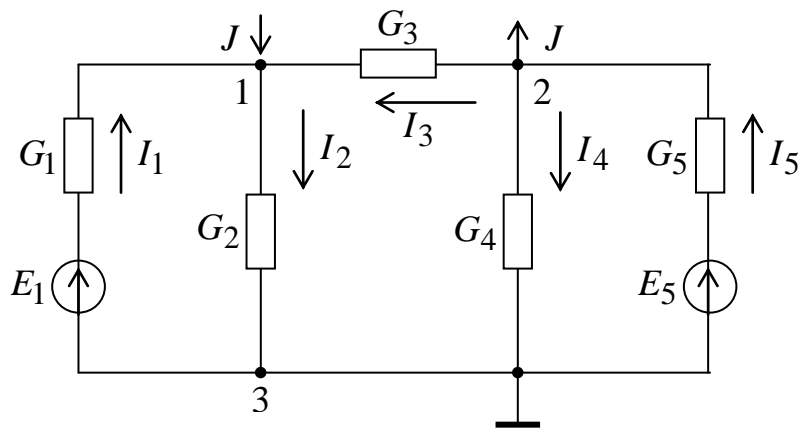


Рис. 1.12. Пример схемы для применения метода узловых потенциалов

Для узла 1 можно записать:

$$I_1 - I_2 + I_3 + J = 0;$$

$$[E_1 - (\varphi_1 - \varphi_3)] \cdot G_1 - (\varphi_1 - \varphi_3) \cdot G_2 + (\varphi_2 - \varphi_1) \cdot G_3 + J = 0;$$

$$\varphi_1 \cdot G_{11} - \varphi_2 \cdot G_{12} = I_{11},$$

где  $G_{11} = G_1 + G_2 + G_3;$

$G_{12} = G_3;$

$I_{11} = E_1 \cdot G_1 + J.$

Величина  $G_{11}$  равна сумме проводимостей всех ветвей, сходящихся в узле 1. Проводимость  $G_{12}$  равна сумме проводимостей всех ветвей, соединяющих узлы 1 и 2, в уравнение входит знаком « - ». Ток  $I_{11}$  называется узловым током первого узла. Это расчетная величина, равная алгебраической сумме токов, полученных от деления ЭДС ветвей, подходящих к узлу 1, на сопротивления этих ветвей, и токов источников тока. Если ЭДС и токи источников тока направлены к узлу, то они входят в эту сумму со знаком « + ».

Аналогично для узла 2

$$\varphi_1 \cdot G_{21} + \varphi_2 \cdot G_{22} = I_{22},$$

где  $G_{21} = G_3;$

$G_{22} = G_3 + G_4 + G_5;$

$I_{22} = E_2 \cdot G_5 - J.$

Для схемы с  $n$  узлами записывается  $(n - 1)$  уравнение

$$\begin{cases} \varphi_1 \cdot G_{11} - \varphi_2 \cdot G_{12} - \dots - \varphi_{n-1} \cdot G_{1,n-1} = I_{11} \\ \varphi_1 \cdot G_{21} - \varphi_2 \cdot G_{22} - \dots - \varphi_{n-1} \cdot G_{2,n-1} = I_{22} \\ \dots \\ \varphi_1 \cdot G_{n-1,1} - \varphi_2 \cdot G_{n-1,2} - \dots - \varphi_{n-1} \cdot G_{n-1,n-1} = I_{n-1,n-1}, \end{cases} \quad (1.13)$$

где  $G_{kk}$  – сумма проводимостей ветвей, сходящихся в узле  $k$ ;

$G_{km}$  – сумма проводимостей ветвей, соединяющих узлы  $k$  и  $m$ , взятая со знаком « - »;

$I_{kk}$  – узловый ток  $k$ -го узла.

Если между узлами нет ветви, то соответствующая проводимость равна нулю.

После определения потенциалов узлов по закону Ома рассчитываются токи в ветвях.

Формулу для метода двух узлов можно получить из (1.13) для  $n = 2$ .



### 1.16. Метод эквивалентного генератора

В любой электрической цепи всегда можно мысленно выделить одну какую-то ветвь, а всю остальную часть схемы независимо от ее структуры и сложности условно изобразить некоторым прямоугольником, который называется двухполюсником, так как имеет только два зажима.

Если в двухполюснике имеется источник энергии, то его называют активным и обозначают буквой *A*.

Если в двухполюснике нет ни одного источника энергии, то его называют пассивным и обозначают буквой *П* или букву вообще не ставят.

Пусть задана некоторая схема, и требуется найти ток в одной ее ветви *ab*. Мысленно заключим всю схему, содержащую ЭДС и сопротивления в прямоугольник, выделив из нее ветвь *ab* (рис. 1.14).

Ток *I* в этой ветви не изменится, если в ветвь *ab* включить две равные и противоположно направленные ЭДС.

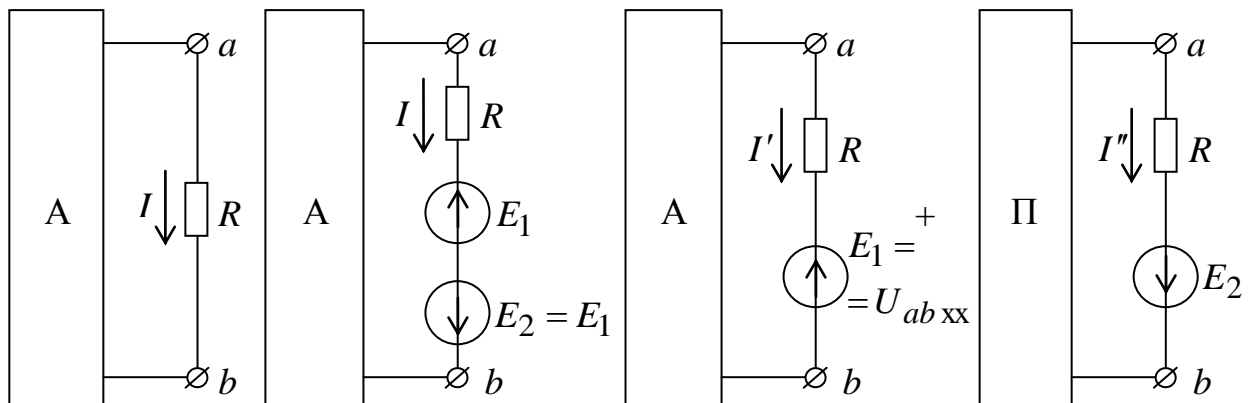


Рис. 1.14. Схема для пояснения метода эквивалентного генератора

На основании принципа наложения ток можно представить в виде суммы двух токов  $I = I' + I''$ . Ток  $I'$  вызван ЭДС  $E_1$  и всеми источниками в схеме активного двухполюсника. Ток  $I''$  вызывается только одной ЭДС  $E_2$ .

ЭДС  $E_1$  направлена встречно напряжению  $U_{ab}$ . По закону Ома  $I = (U_{ab} - E_1)/R$ .

Выберем  $E_1$  так, чтобы  $I' = 0$ , что эквивалентно размыканию ветви, т.е. холостому ходу. Напряжение на ветви *ab* на холостом ходу обозначим  $U_{ab \text{ хх}}$ .

Если  $E_1 = U_{ab \text{ хх}}$ , то  $I' = 0$ , а  $I = I''$ .

$$I'' = \frac{E_2}{R + R_{\text{вх}}} = \frac{U_{ab \text{ хх}}}{R + R_{\text{вх}}},$$

где  $R_{\text{ВХ}}$  – входное сопротивление двухполюсника по отношению к зажимам  $ab$ .

Совокупность  $E_2$  и  $R_{\text{ВХ}}$  можно рассматривать как некоторый эквивалентный генератор (рис. 1.15). Поэтому метод расчета, использующий такой подход, называют методом эквивалентного генератора.

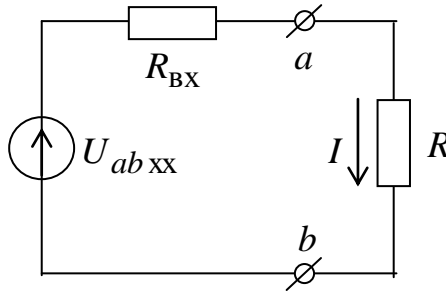


Рис. 1.15. Схема эквивалентного генератора

Последовательность расчета:

1. Находится напряжение на разомкнутой ветви  $ab$ ;
2. Определяется входное сопротивление  $R_{\text{ВХ}}$  всей схемы по отношению к зажимам  $ab$  при закороченных источниках ЭДС и разомкнутых источниках тока;
3. Определяется ток ветви

$$I = \frac{U_{ab \text{ xx}}}{R + R_{\text{ВХ}}}. \quad (1.23)$$

При опытном определении  $R_{\text{ВХ}}$  необходимо измерить напряжение холостого хода на зажимах разомкнутой ветви и ток КЗ ветви, а затем рассчитать входное сопротивление.

$$I_{\text{КЗ}} = \frac{U_{ab \text{ xx}}}{R_{\text{ВХ}}} \quad \text{или} \quad R_{\text{ВХ}} = \frac{U_{ab \text{ xx}}}{I_{\text{КЗ}}}.$$

### Самостоятельная работа

Методы расчета электрических цепей постоянного тока  
[Л 9.1.3, с. 24–58]

## ЛЕКЦИЯ №5

### 2. ЦЕПИ СИНУСОИДАЛЬНОГО ТОКА

#### 2.1. Гармонические колебания

Электромагнитные процессы в электрической цепи, при которых мгновенные значения напряжений и токов повторяются через равные промежутки времени, называются периодическими. Наименьший промежуток времени, по истечении которого наблюдаются повторения мгновенных значений периодических величин, называется периодом. Если величину, являющуюся периодической функцией времени  $t$ , обозначить  $F(t)$ , то для любого положительного или отрицательного значения аргумента  $t$  справедливо равенство

$$F(t + T) = F(t),$$

где  $T$  – период.

Величина, обратная периоду, т.е. число периодов в единицу времени, называется частотой

$$f = 1 / T.$$

Частота имеет размерность  $\text{с}^{-1}$ , а единицей измерения частоты служит Герц (Гц). Частота равна 1 Гц, если период равен 1 с.

Преобладающим видом периодического процесса в электрических цепях является синусоидальный режим. Он характеризуется тем, что все напряжения и токи являются синусоидальными функциями одинаковой частоты. Это возможно только при заданных синусоидальных ЭДС и токах источников и при линейных элементах электрической цепи. Синусоидальность обеспечивает наиболее выгодный режим работы электрических установок.

Синусоида является простейшей периодической функцией. Все другие несинусоидальные периодические функции могут быть разложены в бесконечный ряд синусоид, имеющих кратные частоты. Поэтому изучение цепей периодического тока начнем с анализа особенностей цепей синусоидального тока.

Колебания, описываемые синусоидальными (или косинусоидальными) функциями называются гармоническими.

На рис. 2.1. показаны основные элементы математического описания функции  $u = U_m \sin(\omega t + \psi)$ .

На рис. 2.1 приняты следующие обозначения:

$u$  – мгновенное значение напряжения;

$U_m$  – максимальное значение напряжения или амплитуда;  
 $\omega$  – скорость изменения аргумента (угла), называемая угловой частотой, которая равна  $\omega = 2\pi f$  [рад/с];

$\varphi_0$  – начальная фаза, которая определяется величиной смещения гармонической функции относительно начала координат.

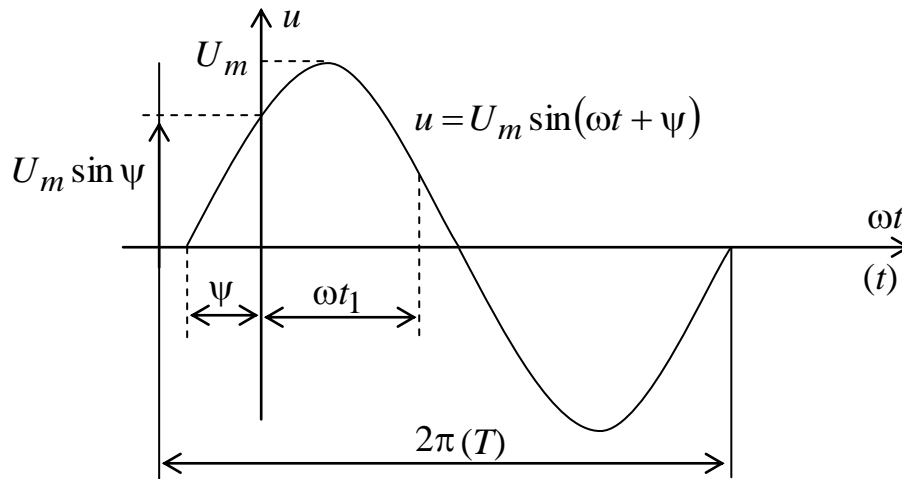


Рис. 2.1. Основные элементы функции  $u = U_m \cdot \sin(\omega \cdot t + \psi)$

За аргумент записанной функции может быть принято время  $t$  или соответствующий ему угол  $\omega t$ . Аргументу  $t$  соответствует период  $T$ , а аргументу  $\omega \cdot t$  — период  $2\pi$ .  $\varphi$  и  $\omega t$  могут измеряться как в радианах, так и в градусах.

Величина  $\omega t + \varphi$ , определяющая стадию изменения записанной функции, называется фазовым углом или фазой.

## 2.2. Генерирование синусоидальной ЭДС

Наиболее распространенным в промышленности способом получения синусоидального тока является применение электромагнитных машин, называемых синхронными генераторами, приводимых во вращение тепловыми, гидравлическими, газовыми или другими двигателями.

Синхронный генератор состоит из двух частей — неподвижного статора и вращающегося ротора. На одном из них (чаще на роторе) располагаются электромагниты, обмотки которых питаются от источника постоянного тока. На другом (обычно на статоре) расположена основная обмотка, в которой наводится ЭДС (рис. 2.2).

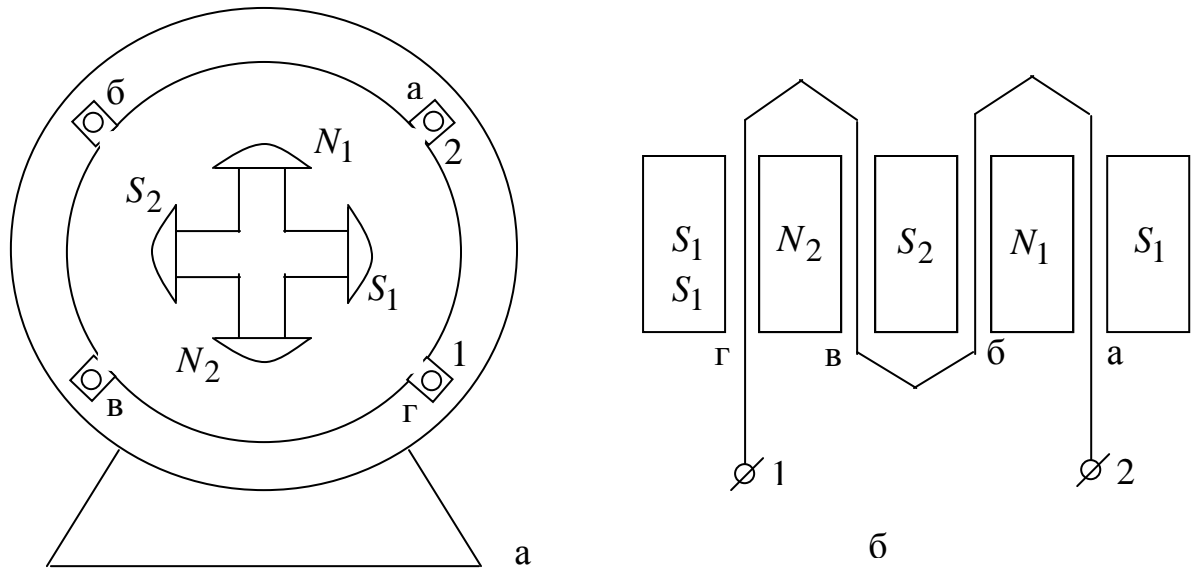


Рис. 2.2. Синхронный генератор

Генератор может иметь одну или несколько пар полюсов. На рис. 2.2а упрощенно показан генератор с двумя парами полюсов, размещенных на роторе. Иногда для удобства рассмотрения процессов цилиндрический воздушный зазор разворачивают на плоскости (рис. 2.2б).

В каждом проводе обмотки статора при вращении ротора по закону электромагнитной индукции наводится ЭДС

$$e = B \cdot l \cdot v,$$

где  $B$  – магнитная индукция,  $l$  – длина проводника,  $v$  – линейная скорость перемещения магнитного поля.

При постоянных значениях  $l$  и  $v$  закон изменения ЭДС  $e(t)$  определяется законом распределения индукции  $B$  в воздушном зазоре. Благодаря специальной форме полюсных наконечников закон изменения  $B$  вдоль воздушного зазора делается приблизительно синусоидальным: максимальное значение индукция имеет в середине и убывает к концам полюсных наконечников.

В момент времени, которому соответствует положение ротора на рис. 2.2, магнитная индукция над проводом равна нулю и ЭДС также равна нулю. При повороте ротора на  $1/8$  полного оборота (половина полюсного шага) ЭДС достигает максимума и будет направлена от зажима 2 к зажиму 1 (по правилу правой руки). При повороте ротора еще на  $1/8$  полного оборота ЭДС вновь обратится в ноль. Далее процесс повторяется, однако ЭДС будет отрицательна (направлена противоположно: от зажима 1 к зажиму 2). На зажимах генератора возникает синусоидальная ЭДС.

При числе пар полюсов  $p$  и частоте вращения ротора  $n$  частота переменной ЭДС  $f$ , Гц, равна

$$f = \frac{p \cdot n}{60}. \quad (2.2)$$

В энергосистемах России и большинства других стран принята промышленная частота тока – 50 Гц. В США принята частота 60 Гц. В авиации с целью уменьшения веса оборудования применяются машины с повышенной частотой вращения (в большинстве случаев 400 Гц). Проводная электросвязь использует частоты от  $f = 0$  (постоянный ток) до  $f = 10^4 \dots 10^5$  Гц, а радиотехника – еще более высокие частоты.

Начало практического внедрения переменного тока относится ко второй половине XIX века, когда выдающийся русский электротехник П.Н. Яблочков стал применять на практике изобретенные им электрические свечи.

### 2.3. Средние и действующие значения гармонических функций

Среднее значение периодической функции  $f(t)$  за период  $T$  определяется по формуле

$$F_{\text{н\delta}} = \frac{1}{T} \int f(t) dt. \quad (2.3)$$

В случае гармонического колебания среднее значение за период равно нулю, поэтому здесь мы будем использовать понятие среднего значения абсолютной величины функции или среднего полупериодического значения.

Для тока  $i = I_m \cos \omega t$  среднее значение будет равно

$$I_{\text{cp}} = \frac{2I_m}{T} \int_{-T/4}^{T/4} \cos \omega t \cdot dt = \frac{2I_m}{\omega T} \sin \omega t \Big|_{-T/4}^{T/4} = \frac{2}{\pi} I_m \approx 0,637 I_m. \quad (2.4)$$

Аналогично определяется среднее значение напряжения

$$U_{\text{cp}} = \frac{2}{\pi} U_m \approx 0,637 U_m.$$

Тепловое действие тока, а также механическая сила взаимодействия двух проводников, по которым проходит один и тот же ток, пропорциональны квадрату тока. Поэтому о величине тока судят обычно по так называемому действующему значению тока. Действующее значение – это средне-квадратичное значение величины за период. Оно определяется по формуле

$$F = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T [f(t)]^2 dt}. \quad (2.5)$$

Действующее значение периодического тока

$$I = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T [i(t)]^2 dt}. \quad (2.6)$$

Возведя (2.6) в квадрат и умножив обе части выражения на  $R \cdot T$ , получим:

$$R \cdot I^2 \cdot T = R \int_0^T i^2 dt. \quad (2.7)$$

Это равенство показывает, что действующее значение периодического тока равно по величине такому постоянному току, который, проходя через неизменное сопротивление  $R$  за период времени  $T$ , выделяет то же количество тепла, что и данный ток  $i$ .

При токе  $i = I_m \cos \omega t$

$$\int_0^T i^2 dt = \int_0^T I_m^2 \cos^2 \omega t dt = \frac{I_m^2}{2} \int_0^T (1 + \cos 2\omega t) dt = \frac{I_m^2}{2} T.$$

Следовательно, согласно (2.7) действующее значение равно

$$I = \frac{I_m}{\sqrt{2}} \approx 0,707 I_m. \quad (2.8)$$

Аналогично для действующего значения напряжения

$$U = \frac{U_m}{\sqrt{2}} \approx 0,707 U_m. \quad (2.9)$$

Номинальные токи и напряжения электротехнических устройств определяются, как правило, действующими значениями, поэтому действующие значения представляют наиболее распространенный электрический параметр. Чаще всего измерительные приборы градуируются также в действующих значениях.

## 2.4. Представление гармонических функций в виде проекций вращающихся векторов

Мгновенное значение функции  $u = U_m \cos(\omega t + \varphi)$  можно получить как проекцию на горизонтальную ось отрезка длиной  $U_m$ , вращающегося относительно начала прямоугольной системы координат с угловой частотой  $\omega = 2\pi \cdot f$  в положительном направлении (против часовой стрелки) (рис. 2.3).

Вращающийся отрезок будем называть вектором.

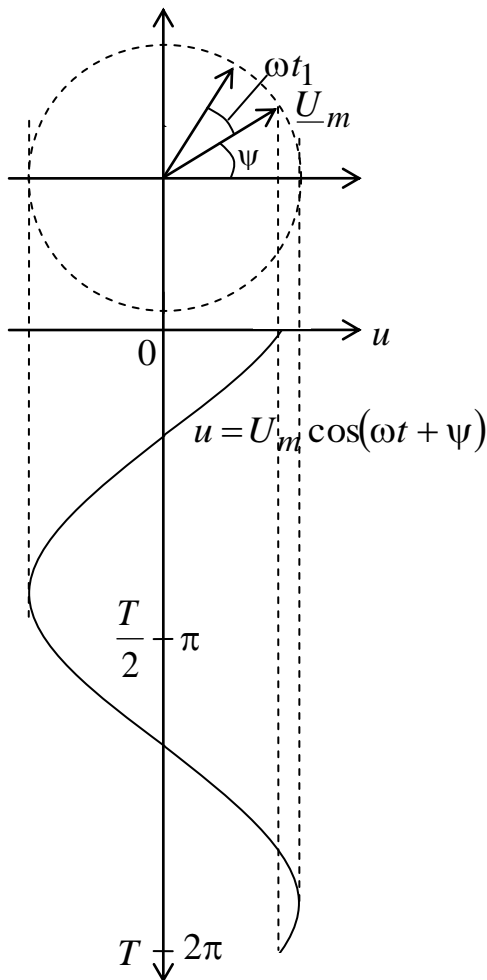


Рис. 2.3. Представление синусоиды вращающимся вектором

В момент  $t = 0$  вектор образует с горизонтальной осью угол  $\psi$  и его проекция на горизонтальную ось равна  $U_m \cos \psi$ , т.е. мгновенному значению функции  $u = U_m \cos(\omega t + \psi)$  при  $t = 0$ . За время  $t = t_1$  вектор повернется на угол  $\omega t_1$  и окажется повернутым относительно горизонтальной оси на угол  $\omega t_1 + \psi$ , его проекция на ось будет равна  $U_m \cos(\omega t + \psi)$  и т.д.

Таким образом, рассмотрение гармонических колебаний можно заменить рассмотрением вращающихся векторов. Для получения мгновенных значений условимся проектировать вектора на горизонтальную ось.

Если гармонические колебания имеют одну и ту же частоту, то соответствующие этим колебаниям векторы вращаются с одинаковой угловой частотой, и поэтому углы между ними сохраняются неизменными.

Зарисуем две гармонические функции

$$\begin{cases} u_1 = U_{1m} \cos(\omega t + \psi_1) \\ u_2 = U_{2m} \cos(\omega t + \psi_2) \end{cases}, \quad (2.9)$$



имеющие одинаковую угловую частоту  $\omega$  и начальные фазы  $\psi_1$  и  $\psi_2$  (рис. 2.4).

Кривая  $u_1$ , смещенная влево относительно  $u_2$ , возрастает от нуля до своего положительного максимума раньше, чем кривая  $u_2$ . Поэтому говорят, что  $u_1$  опережает по фазе  $u_2$ , или наоборот. Разность начальных фаз  $\varphi = \psi_1 - (-\psi_2)$  называется фазовым сдвигом или углом сдвига  $u_1$  относительно  $u_2$ . Этот угол и образуют векторы, показанные на верхней части рис. 2.4.

При равенстве начальных фаз, т.е. при  $\varphi = 0$ , векторы направлены в одну и ту же сторону, т.е. совпадают по фазе (синфазны). При фазовом сдвиге  $180^\circ$  векторы направлены в диаметрально противоположные стороны (находятся в противофазе).

Диаграмма, изображающая совокупность векторов, построенных с соблюдением их взаимной ориентации по фазе, называется векторной диаграммой.

Векторное представление гармонических функций, частота которых одинакова, облегчает алгебраические операции с ними и дает возможность наглядно представить процессы, происходящие в цепи.

Например, операция сложения

$$\begin{cases} U_m = \sqrt{U_{1m}^2 + U_{2m}^2 + 2U_{1m}U_{2m} \cos(\psi_1 + \psi_2)} \\ \operatorname{tg}\psi = \frac{U_{1m} \sin \psi_1 + U_{2m} \sin(-\psi_2)}{U_{1m} \cos \psi_1 + U_{2m} \cos(-\psi_2)}. \end{cases} \quad (2.10)$$

При использовании векторной диаграммы с целью установления фазовых сдвигов или амплитудных значений гармонических величин, имеющих одинаковую частоту, векторная диаграмма может считаться

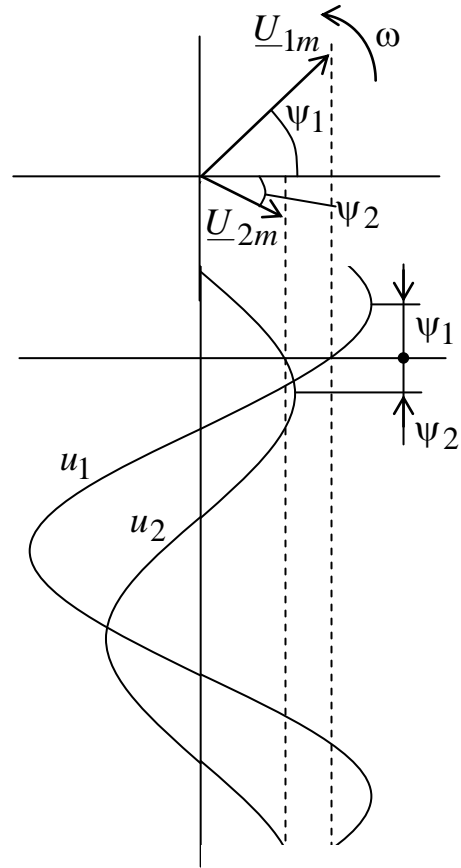


Рис. 2.4. Векторы напряжений и соответствующие синусоиды

неподвижной. Это равносильно переходу во вращающуюся вместе с векторами систему координат.

Построение векторной диаграммы обычно не связано с определением мгновенных значений гармонических функций. В этом случае они строятся не для амплитуд, а для действующих значений. Кривые мгновенных значений называются временными диаграммами.

## 2.5. Представление гармонических функций комплексными числами

Расчеты электрических цепей гармонического тока можно вести аналитически в тригонометрической форме или графически с помощью векторных диаграмм. На практике эти способы применяются только для простых схем. С усложнением схем расчеты становятся слишком трудоемкими.

Наиболее удобным является способ расчета цепей с помощью комплексных чисел. Он, так же как и векторные диаграммы, основан на представлении синусоидальных функций в виде проекций вращающихся векторов. Но в данном случае векторы изображаются в комплексной плоскости и могут быть однозначно описаны с помощью комплексных чисел. Этот способ удачно сочетает наглядность геометрического представления с удобством аналитических расчетов.

Известно, что каждая точка на комплексной плоскости определяется радиусом-вектором этой точки. Начало вектора совпадает с началом координат, а конец находится в точке, соответствующей заданному комплексному числу (рис. 2.5).

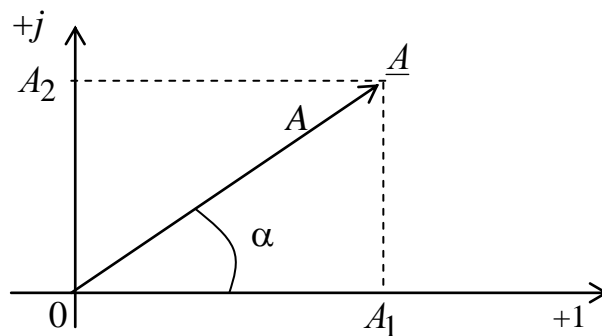


Рис. 2.5. Представление вектора в комплексной плоскости

Пользуясь показательной или полярной формой, вектор  $\underline{A}$  можно записать:

$$\underline{A} = A \cdot e^{j\alpha} = A \angle \alpha, \quad (2.11)$$

где  $A$  – модуль вектора  $\underline{A}$ ;  $\alpha$  – аргумент или фаза;  $j = \sqrt{-1}$ .

Применив формулу Эйлера, этот вектор запишем в тригонометрической форме

$$\underline{A} = A \cdot \cos \alpha + jA \cdot \sin \alpha \quad (2.12)$$

или соответствующей ей алгебраической форме

$$\underline{A} = A_1 + A_2,$$

где

$$\begin{aligned} A_1 &= A \cos \alpha, & A &= \sqrt{A_1^2 + A_2^2}; \\ A_2 &= A \sin \alpha, & \alpha &= \operatorname{arctg} \frac{A_1}{A_2}. \end{aligned}$$

Вектор, вращающийся в положительном направлении с угловой частотой  $\omega$ , можно определить следующим образом

$$A \cdot e^{j(\omega t + \alpha)} = \underline{A} e^{j\omega t}, \quad (2.13)$$

где  $\underline{A} = A e^{j\alpha} = A \angle \alpha$  – комплексная амплитуда, представляющая данный вектор в момент времени  $t = 0$ ; множитель  $e^{j\omega t}$  является оператором вращения.

Запишем комплексную функцию в тригонометрической форме:

$$A e^{j(\omega t + \alpha)} = A \cos(\omega t + \alpha) + jA \sin(\omega t + \alpha).$$

Из этой формулы видно, что гармоническая функция  $A \cos(\omega t + \alpha)$  может рассматриваться как действительная часть комплексной функции (2.13) или как проекция вращающегося вектора на действительную ось (рис. 2.6).

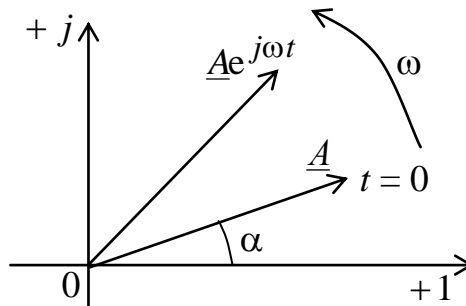


Рис. 2.6. Представление вращающегося вектора в комплексной плоскости

Условно это записывается как

$$A \cos(\omega t + \alpha) = \operatorname{Re} \left[ \underline{A} e^{j\omega t} \right];$$

$$A \sin(\omega t + \alpha) = \operatorname{Im} \left[ \underline{A} e^{j\omega t} \right].$$

Используя представление комплексных чисел в показательной и алгебраической форме, можно легко производить с ними математические операции.

Пусть заданы два вектора

$$\underline{A}e^{j\alpha} = A\cos\alpha + jA\sin\alpha;$$

$$\underline{B}e^{j\beta} = B\cos\beta + jB\sin\beta.$$

Сумма этих векторов

$$\underline{C} = \underline{A} + \underline{B} = (A\cos\alpha + B\cos\beta) + j(A\sin\alpha + B\sin\beta).$$

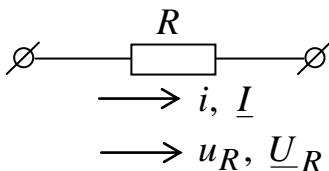
Их произведение

$$\underline{D} = \underline{A} \cdot \underline{B} = A \cdot B \cdot e^{j(\alpha+\beta)}.$$

## ЛЕКЦИЯ №6

### 2.6. Простые цепи синусоидального тока

#### 2.6.1. Ток и напряжение в ветви с сопротивлением



Напряжение между зажимами ветви с сопротивлением  $R$  и ток в нем связаны законом Ома  $u_R = R \cdot i$ .

Если ток синусоидален, т.е.  $i = I_m \sin(\omega t + \psi_i)$ , то напряжение будет равно

$$u_R = R \cdot I_m \sin(\omega t + \psi_i) = U_{Rm} \sin(\omega t + \psi_i). \quad (2.14)$$

Комплексы амплитуд тока и напряжения запишутся в виде

$$\underline{I}_m = I_m e^{j\psi_i}; \quad \underline{U}_{Rm} = U_{Rm} e^{j\psi_i} = R \cdot I_m e^{j\psi_i} = R \cdot \underline{I}_m. \quad (2.15)$$

Из этих выражений видно, что ток в сопротивлении и напряжение на нем всегда синфазны, т.е. сдвиг фаз между комплексами тока и напряжения всегда равен нулю  $\varphi = \psi_u - \psi_i = 0$  (рис. 2.7).

На векторной диаграмме эти два вектора изображаются всегда коллинеарными и совпадающими по направлению.

На временной диаграмме синусоиды напряжения и тока одновременно проходят нулевые и экстремальные точки.

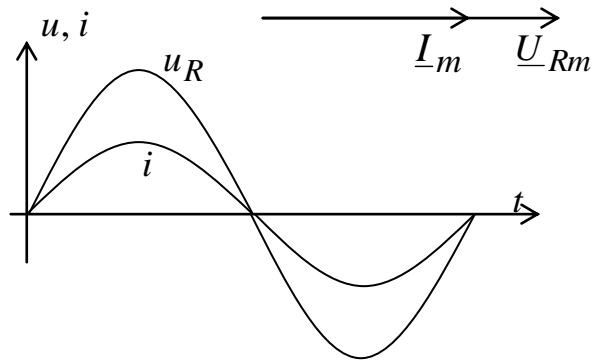


Рис. 2.7. Изображение тока и напряжения на сопротивлении

### 2.6.2. Напряжение и ток в ветви с индуктивностью

Если по ветви протекает ток  $i = I_m \sin(\omega t + \psi_i)$ , то в катушке возникает ЭДС самоиндукции

$$e_L = -L \frac{di}{dt} = -\omega L I_m \cos(\omega t + \psi_i) =$$

$$= -\omega L I_m \sin(\omega t + \psi_i - \pi/2) = E_{Lm} \sin(\omega t - \psi_e), \quad (2.16)$$

где  $E_{Lm} = \omega \cdot L \cdot I_m$  – амплитуда ЭДС самоиндукции;

$\psi_e = \psi_i - \pi/2$  – начальная фаза ЭДС самоиндукции.

По второму закону Кирхгофа сумма приложенного к ветви напряжения  $u_L$  и ЭДС самоиндукции  $e_L$  равна нулю

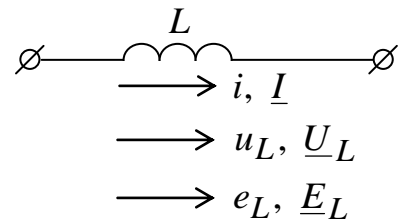
$$u_L + e_L = 0.$$

Отсюда напряжение на зажимах ветви

$$u_L = -e_L = L \frac{di}{dt} = \omega L I_m \sin(\omega t + \psi_i + \pi/2) = U_{Lm} \sin(\omega t + \psi_u), \quad (2.17)$$

где  $U_{Lm} = \omega L I_m = E_{Lm}$ ,  $\psi_u = \psi_i + \pi/2 = \psi_e + \pi$ .

Условные положительные направления токов, ЭДС и напряжений в ветвях в общем случае можно задать произвольно. Однако существование жесткой взаимосвязи между этими величинами обязывает соблюдать в обозначениях определенный порядок для уменьшения вероятных ошибок при анализе. В данном случае это особенно необходимо. Связь  $u_L = L \frac{di}{dt}$  показывает, что условные положительные направления тока  $i$  и напряжения  $u_L$  должны быть одинаковы и направление их стрелок на электрических



схемах должно быть одним и тем же. Условные положительные направления ЭДС  $e_L$  и напряжения  $u_L$  должны быть также одинаковыми, так как в соответствии с равенством  $e_L = -u_L = -L \frac{di}{dt}$  действительное направление ЭДС будет противоположно по направлению напряжения  $u_L$ .

Из анализа выражений  $i$ ,  $e_L$ ,  $u_L$  следует:

- 1) ЭДС самоиндукции отстает по фазе от тока на угол  $\pi / 2$ ;
- 2) напряжение  $u_L$  опережает ток на угол  $\pi / 2$ ;
- 3) напряжение  $u_L$  и ЭДС самоиндукции  $e_L$  всегда равны по величине друг другу и находятся в противофазе.

Векторы комплексных амплитуд тока, ЭДС и напряжения соответственно будут равны

$$\underline{I}_m = I_m e^{j\psi_i};$$

$$\underline{E}_{Lm} = \omega L I_m e^{j(\psi_i - \pi/2)} = \left| e^{-j\pi/2} = -j \right| = -j\omega L I_m e^{j\psi_i} = -j\omega L \underline{I}_m; \quad (2.18)$$

$$\underline{U}_{Lm} = \omega L I_m e^{j(\psi_i + \pi/2)} = \left| e^{j\pi/2} = j \right| = j\omega L I_m e^{j\psi_i} = j\omega L \underline{I}_m; \quad (2.19)$$

$$\underline{I}_m = \frac{\underline{U}_{Lm}}{j\omega L}; \quad \underline{I} = \frac{\underline{U}_L}{j\omega L}.$$

Векторная диаграмма ветви с индуктивностью будет иметь вид, показанный на рис. 2.7а. Если диаграмму строить не от действительной оси, а от вектора  $\underline{I}_m$ , положив его начальную фазу равной нулю, то диаграмма примет более наглядный вид (рис. 2.7б).

Величину  $\omega L = X_L$  принято называть индуктивным сопротивлением.

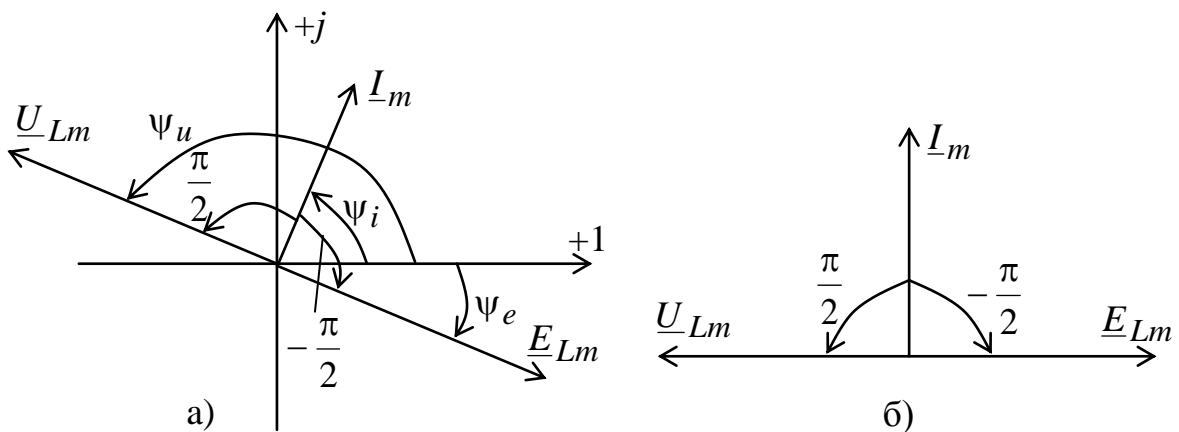
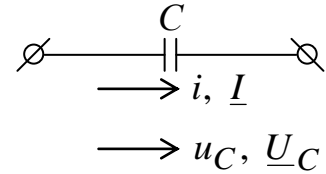


Рис. 2.7. Векторные диаграммы тока, напряжения и ЭДС на индуктивности

### 2.6.3. Напряжение и ток в ветви с емкостью

При протекании по ветви тока  $i = I_m \sin(\omega t + \psi_i)$  напряжение на конденсаторе будет равно



$$\begin{aligned} u_C &= \frac{1}{C} \int i \cdot dt = \frac{1}{C} \int I_m \sin(\omega t + \psi_i) dt = -\frac{I_m}{\omega C} \cos(\omega t + \psi_i) = \\ &= \frac{I_m}{\omega C} \sin(\omega t + \psi_i - \pi/2) = U_{Cm} \sin(\omega t + \psi_i - \pi/2). \end{aligned} \quad (2.20)$$

Постоянная интегрирования принимается равной нулю вследствие гармонического характера подынтегральной функции.

Из зависимости  $i = C \frac{du_C}{dt}$  следует, что условные положительные направления тока и напряжения на конденсаторе должны совпадать. Из сравнения выражений тока  $i$  и напряжения  $u_C$  видно, что напряжение на конденсаторе отстает по фазе от тока на угол  $\pi/2$ . Комплексы амплитуд  $I_m$  и напряжения  $U_{Cm}$  будут равны:

$$\begin{aligned} \underline{I}_m &= I_m e^{j\psi_i}; \\ \underline{U}_{Cm} &= \frac{I_m}{\omega C} e^{j(\psi_i + \pi/2)} = -j \frac{I_m}{\omega C} e^{j\psi_i} = -j \frac{1}{\omega C} \underline{I}_m. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Векторные диаграммы имеют вид, показанный на рис. 2.8.

Величину  $\frac{1}{\omega C} = X_C$  называют емкостным сопротивлением.

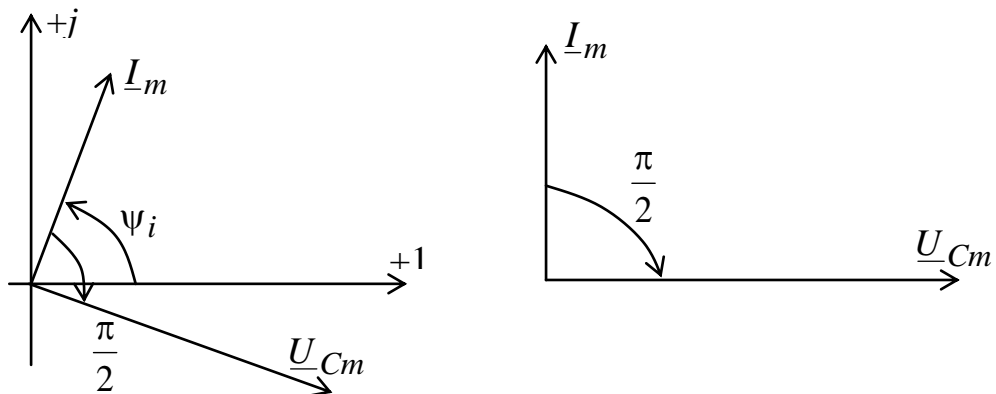
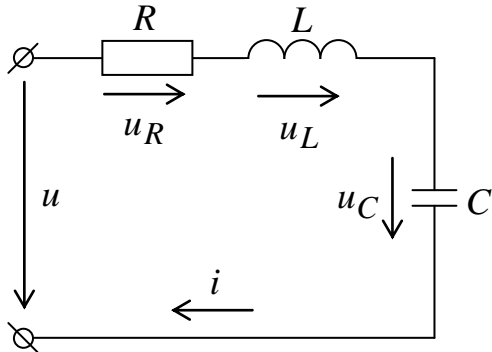


Рис. 2.8. Векторная диаграмма токов и напряжений на емкости

## ЛЕКЦИЯ №7

2.7. Ток и напряжение при последовательном соединении  $R, L, C$ 

К цепи с последовательным соединением  $R, L, C$  приложено синусоидальное напряжение

$$u = U_m \cdot \sin(\omega t + \psi_u).$$

На основании II закона Кирхгофа можно записать  $u = u_R + u_L + u_C$ .

На основании формул (2.14, 2.17, 2.20) для  $\psi_i = 0$  можно записать

$$u = U_m \sin(\omega t + \varphi) = RI_m \sin \omega t + \omega LI_m \sin(\omega t + \pi/2) + \frac{1}{\omega C} I_m \sin(\omega t - \pi/2) = RI_m \sin \omega t + \left( \omega L - \frac{1}{\omega C} \right) \cdot I_m \sin(\omega t + \pi/2). \quad (2.22)$$

Кривые тока и напряжений изображены на рис. 2.9.

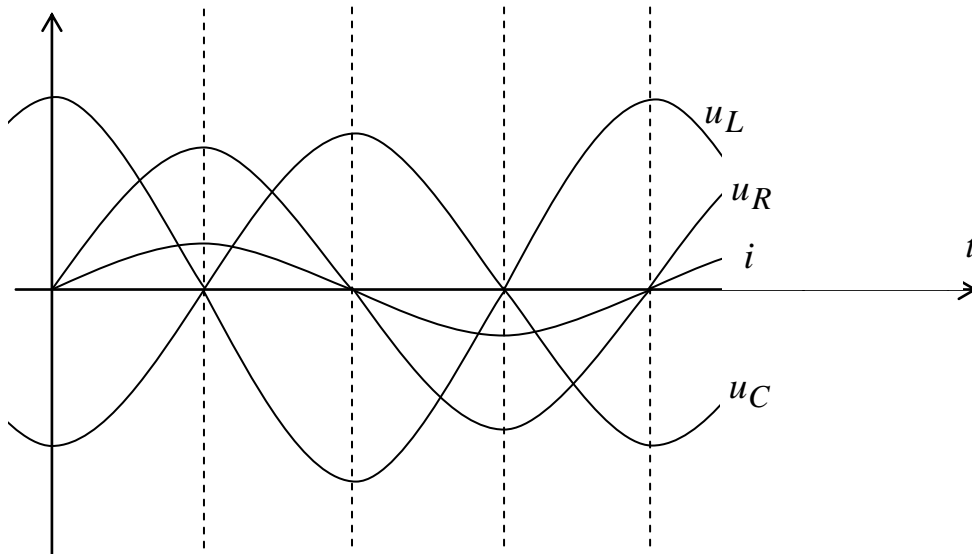


Рис. 2.9. Кривые тока и напряжений при последовательном соединении

Величина  $X = X_L - X_C = \omega L - \frac{1}{\omega C}$  называется реактивным

сопротивлением. В зависимости от знака она может иметь индуктивный ( $X > 0$ ) или емкостной ( $X < 0$ ) характер.



В комплексной форме уравнение (2.22) можно записать

$$\underline{U}_m = \underline{U}_{Rm} + \underline{U}_{Lm} + \underline{U}_{Cm} = U_m e^{j\varphi} = R \underline{I}_m + j\omega L \underline{I}_m - j \frac{1}{\omega C} \underline{I}_m$$

или

$$\underline{U}_m = \left[ R + j \left( \omega L - \frac{1}{\omega C} \right) \right] \cdot \underline{I}_m. \quad (2.23)$$

Это выражение, связывающее комплексы тока и напряжения, называют законом Ома в комплексной форме.

Отношение  $\frac{\underline{U}_m}{\underline{I}_m} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} = \underline{Z}$  называется комплексным сопротивлением:

$$\underline{Z} = R + j \left( \omega L - \frac{1}{\omega C} \right) = R + jX.$$

Действительная часть полного сопротивления –  $R$  называется активным сопротивлением, а мнимая –  $X$  – реактивным.

Для нахождения подводимого напряжения  $U$  и угла сдвига фаз  $\varphi$  можно воспользоваться векторной диаграммой, соответствующей уравнению (2.23).

На рис. 2.10 изображены векторы тока и напряжений цепи при индуктивном и емкостном характерах нагрузки. Из векторных диаграмм видно, что входное напряжение будет равно

$$U = \sqrt{(RI)^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2 I^2} = \sqrt{R^2 + X^2} \cdot I. \quad (2.24)$$

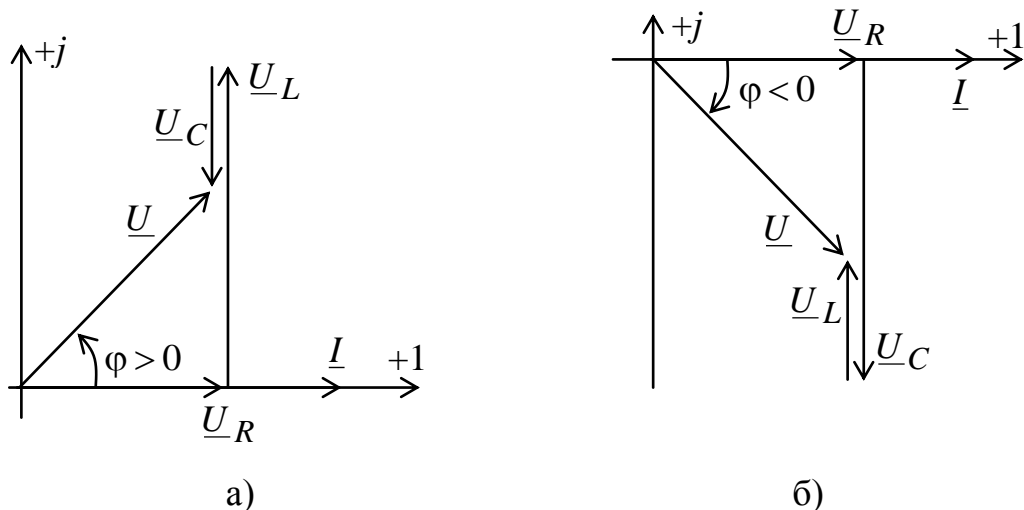


Рис. 2.10. Векторные диаграммы при индуктивном (а) и емкостном (б) характере нагрузки

Из закона Ома следует, что модуль полного сопротивления равен

$$Z = \sqrt{R^2 + X^2} = \sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}. \quad (2.25)$$

Угол фазового сдвига между током и напряжением равен

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{X}{R} = \operatorname{arctg} \frac{\omega L - 1/\omega C}{R}. \quad (2.26)$$

Если задано напряжение  $u = U_m \sin(\omega t + \psi)$ , то ток в последовательно соединенных элементах  $R, L, C$  будет равно

$$i = \frac{U_m}{Z} \sin(\omega t + \psi - \varphi). \quad (2.27)$$

Угол  $\varphi$  положителен при индуктивном характере цепи, т.е. при  $X > 0$ , и отрицателен при емкостном ( $X < 0$ ). На векторной диаграмме положительный угол  $\varphi$  отсчитывается от вектора тока к вектору напряжения против часовой стрелки.

При  $X = X_L - X_C = 0$  ток совпадает по фазе с напряжением. Такой режим работы электрической цепи называется резонансом напряжений. Этот режим характеризуется потреблением только активной мощности. При этом ток в цепи максимален, и напряжения на реактивных элементах могут во много раз превышать входное напряжение ( $X_L = X_C \gg R$ ).

Из выражений (2.25) и (2.26) можно получить

$$R = Z \cos \varphi, \quad X = Z \sin \varphi. \quad (2.28)$$

На рис. 2.11 изображены соответствующие треугольники сопротивлений.

Умножив правые и левые части выражения (2.28) на  $I$ , получим

$$U_a = RI = Z \cos \varphi \cdot I = U \cos \varphi,$$

$$U_p = XI = Z \sin \varphi \cdot I = U \sin \varphi.$$

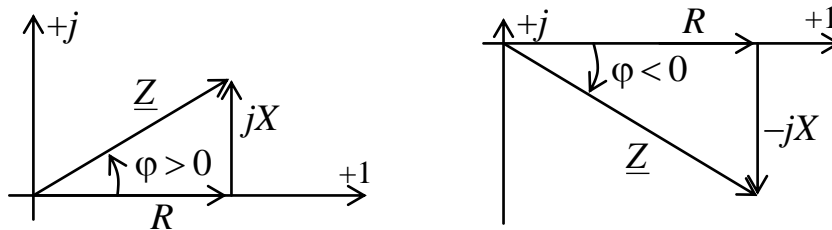


Рис. 2.11. Треугольники сопротивлений

Величины  $U_a$  и  $U_p$  называются активной и реактивной составляющими напряжения.

$$U = \sqrt{U_a^2 + U_p^2}.$$

Для характеристики катушек индуктивности пользуются понятием добротности катушки  $Q_L = X_L/R$ , которая равна тангенсу угла сдвига фаз  $\varphi$ . Чем ниже величина  $R$ , тем выше добротность катушки.

## 2.14. Резонансные явления в цепях синусоидального тока

### 2.14.1. Колебательные (резонансные) цепи

Колебательными или резонансными цепями называются электрические цепи, в которых могут возникать колебания электрических зарядов.

Резонанс – это такой режим электрической цепи, содержащей конденсаторы и катушки индуктивности, при котором интенсивность вынужденных колебаний электрических зарядов максимальна.

При последовательном соединении катушек индуктивности и конденсаторов наблюдается резонанс напряжений, при параллельном – резонанс токов.

Резонанс может возникать при определенном соотношении параметров цепей или при какой-то подаваемой частоте питания. Частоты, при которых наблюдается резонанс, называются резонансными.

Одной из характерных особенностей резонанса является совпадение по фазе тока и напряжения на входе цепи, поэтому в пассивных двухполюсниках можно выделить *фазовый резонанс*.

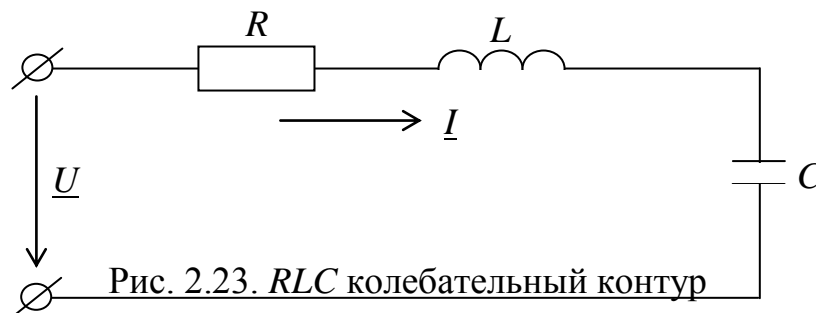
Принято различать резонанс напряжений – для последовательного соединения элементов  $R$ ,  $L$ ,  $C$  и резонанс токов – для цепей с параллельным соединением этих элементов.

### 2.14.2. Резонанс в последовательном контуре

Рассмотрим простейший колебательный контур (рис. 2.23).

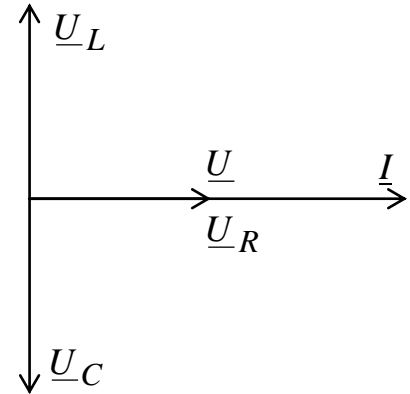
Комплексное сопротивление цепи

$$\underline{Z} = R + jX = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right). \quad (2.35)$$



Резонанс наступает при  $X = \omega L - 1/\omega C = 0$ .

Напряжения на индуктивности и емкости при этом оказываются равными друг другу по величине ( $U_L = X_L I = U_C = X_C I$ ) и скомпенсированными друг с другом. Приложенное напряжение падает только на активном сопротивлении. Полное сопротивление  $Z$  при  $X = 0$  будет равно  $Z = \sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2} = R$  и при заданном напряжении ток  $I$  достигает максимального значения  $I_{\max}$ .



Условие равенства  $\omega L = 1/\omega C$  показывает, что в общем случае резонансных условий можно достичь, изменяя или параметры цепи  $L$  и  $C$  или частоту питания  $\omega$ . Угловая частота

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \omega_0 \quad (2.36)$$

называется резонансной угловой частотой.

Сопротивление

$$\omega_0 L = \frac{1}{\omega_0 C} = \sqrt{\frac{L}{C}} = \rho \quad (2.37)$$

называется характеристическим или волновым.

В том случае, когда активное сопротивление цепи много меньше волнового, напряжения на индуктивности и емкости значительно превосходят по величине напряжение на зажимах цепи. Количественно различие этих величин принято определять с помощью так называемой добротности контура  $Q$ :

$$Q = \frac{U_L}{U} = \frac{U_C}{U} = \frac{\omega_0 L I}{R I} = \frac{I}{\omega_0 C R I} = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{1}{\omega_0 C R} = \frac{\rho}{R}. \quad (2.38)$$

Величина, обратная добротности, называется затуханием

$$d = \frac{1}{Q} = \frac{R}{\rho}. \quad (2.39)$$

Это наименование связано с тем, что при отключении колебательного контура от источника, когда контур замыкается накоротко, колебательный процесс затухает тем интенсивнее, чем больше величина  $d$ .

В режиме резонанса суммарная энергия электрического и магнитного полей остается постоянной. Действительно, если ток в контуре определяется величиной  $i = I_m \sin \omega_0 t$ , то напряжение на емкости будет

$$u_C = \frac{1}{C} \int i \cdot dt = -\frac{I_m}{\omega_0 C} \cos \omega_0 t.$$

Энергия полей будет определяться выражениями

$$W_M = L \frac{I^2}{2} = \frac{LI_m^2}{2} \sin^2 \omega_0 t,$$

$$W_C = \frac{Cu_C^2}{2} = \frac{CI_m^2}{2\omega_0^2 C^2} \cos^2 \omega_0 t = \frac{I_m^2}{2\omega_0^2 C} \cos^2 \omega_0 t.$$

Их сумма

$$W = W_M + W_C = \frac{I_m^2 L}{2} \left( \sin^2 \omega_0 t + \frac{1}{\omega_0^2 LC} \cos^2 \omega_0 t \right).$$

Учитывая, что  $\omega_0 t = \frac{1}{\omega_0 C}$  или  $\omega_0^2 LC = 1$ , будем иметь

$$W = \frac{I_m^2 L}{2} = \text{const.}$$

Кроме факта постоянства суммы энергий электрического и магнитного полей, произведенные выкладки показывают и существующий непрерывный обмен энергиями этих полей. Энергия, поступающая от источника питания, преобразуется в тепло активным сопротивлением. Поэтому вся цепь эквивалентна активному сопротивлению.

### 2.14.3. Частотные характеристики последовательного колебательного контура

Под частотными характеристиками цепи понимают зависимости от частоты тех величин, которые характеризуют ее свойства (рис. 2.24). В рассматриваемом случае такими величинами оказываются индуктивное, емкостное и реактивное сопротивления, напряжения на отдельных участках цепи, а также сдвиг фаз между током и приложенным напряжением. Зависимость тока и напряжений от частоты называют *резонансными кривыми* (рис. 2.25).

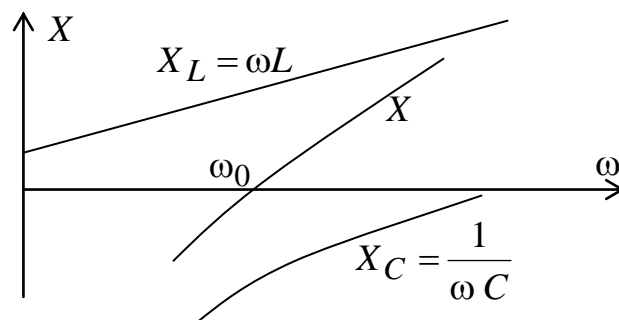


Рис. 2.24. Частотные характеристики

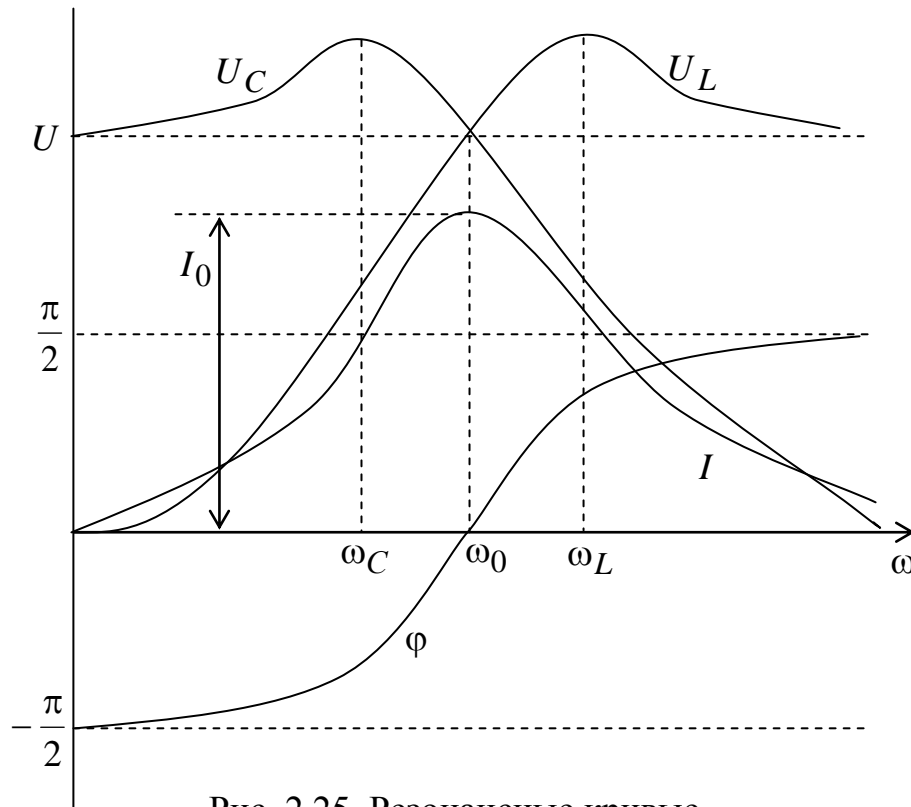


Рис. 2.25. Резонансные кривые

Характер кривых определяется их аналитическими выражениями:

$$X_L = \omega L, X_C = 1/\omega C, X = X_L - X_C = \omega L - 1/\omega C,$$

$$U_L = \omega LI, U_C = \frac{I}{\omega C}, I = \frac{U}{\sqrt{R^2 + X^2}}, \varphi = \operatorname{arctg} \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}.$$

Если учесть, что реальная катушка индуктивности обладает активным сопротивлением провода, а конденсатор - сопротивлением утечки, то при исследовании  $U_L = f_1(\omega)$  и  $U_C = f_2(\omega)$  оказывается, что максимум  $U_L$  наступает при частоте  $\omega_L = \omega_0 \sqrt{\frac{2}{2-d^2}} > \omega_0$ , а максимум  $U_C$  наступает при  $\omega_C = \omega_0 \sqrt{\frac{2-d^2}{2}} < \omega_0$ . Следовательно, расхождение частот  $\omega_L$  и  $\omega_C$  будет тем больше, чем больше затухание  $d$ .

Резонансная кривая тока показывает избирательные свойства последовательного контура. Он обладает наименьшим сопротивлением при частотах, близких к резонансной; при отклонении частоты в ту или другую сторону сопротивление контура растет.

Выражение тока в цепи можно привести к виду

$$I = \frac{U}{Z} = \frac{U}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} = \frac{U}{\sqrt{R^2 + \omega_0^2 L^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{1}{\omega LC \omega_0} \cdot \frac{\omega_0}{\omega_0}\right)^2}} =$$

$$= \frac{U}{R \sqrt{1 + Q^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}},$$

которое показывает, что с возрастанием добротности  $Q = \frac{\omega_0 L}{R}$  кривая  $I = f\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)$  становится более острой; цепь более «избирательна» в своем поведении к резонансной частоте (рис. 2.26).

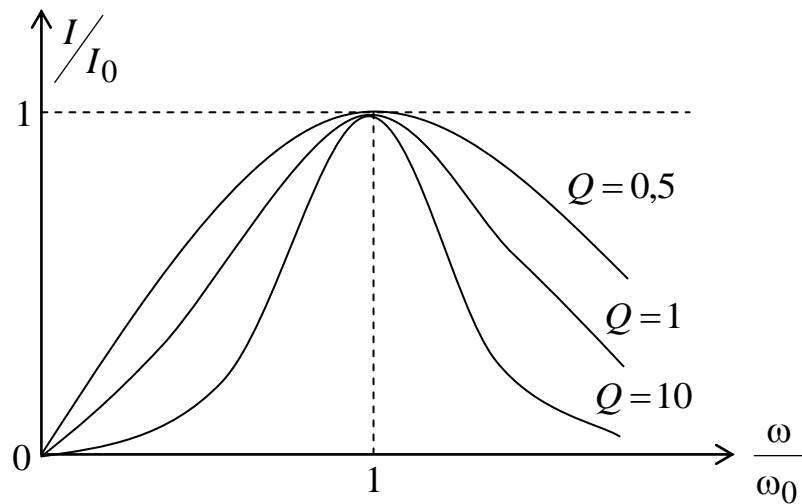


Рис. 2.26. Избирательность контура

## ЛЕКЦИЯ №8

2.8. Ток и напряжение при параллельном соединении  $R, L, C$ 

Пусть к цепи (рис. 2.12) приложено напряжение  $u = U_m \sin \omega t$ . По первому закону Кирхгофа

$$i = i_R + i_L + i_C.$$

Ток в резисторе  $R$  совпадает по фазе с напряжением  $u$ , ток  $i_L$  отстает, а ток  $i_C$  опережает напряжение на угол  $\varphi = \pi/2$ . Следовательно, суммарный ток равен

$$i = I_m \sin(\omega t - \varphi) = \frac{1}{R} U_m \sin \omega t + \frac{1}{\omega L} U_m \sin(\omega t - \pi/2) + \omega C U_m \sin(\omega t + \pi/2) = \frac{1}{R} U_m \sin \omega t + \left( \frac{1}{\omega L} - \omega C \right) \cdot U_m \sin(\omega t - \pi/2). \quad (2.29)$$

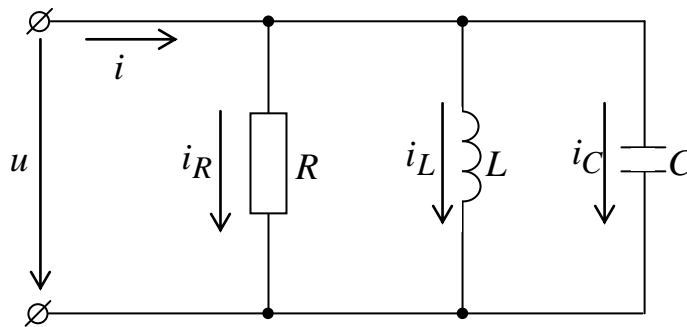


Рис. 2.12. Схема параллельного соединения  $R, L, C$

Это тригонометрическая форма записи I закона Кирхгофа. Величина  $B = B_L - B_C = \frac{1}{\omega L} - \omega C$  называется реактивной проводимостью цепи и может иметь индуктивный ( $B > 0$ ) или емкостной ( $B < 0$ ) характер.

В комплексной форме уравнение (2.29) имеет вид

$$\underline{I}_m = \underline{I}_{Rm} + \underline{I}_{Lm} + \underline{I}_{Cm} = I_m e^{j\varphi} = G \underline{U}_m - j \frac{1}{\omega L} \underline{U}_m + j \omega C \underline{U}_m$$

или

$$\underline{I}_m = \left[ G + j \left( \omega C - \frac{1}{\omega L} \right) \right] \underline{U}_m. \quad (2.30)$$

Отношение  $\frac{\underline{I}_m}{\underline{U}_m} = \frac{\underline{I}}{\underline{U}} = \underline{Y}$  называется комплексной проводимостью.

$$\underline{Y} = G + j \left( \omega C - \frac{1}{\omega L} \right) = G + jB.$$



Действительная часть полной проводимости  $G$  называется активной проводимостью, а мнимая  $B$  – реактивной.

Векторная диаграмма на рис. 2.13 строится по уравнению (2.30).

Прямоугольный треугольник с катетами  $\underline{I}_R$  и  $(\underline{I}_L + \underline{I}_C)$  и гипотенузой  $\underline{I}$  называется треугольником токов. Модуль полного тока равен

$$I = \sqrt{(GU)^2 + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)^2 U^2} \quad (2.31)$$

или  $I = YU$ ,  $I_m = YU_m$ ,

где  $Y = \sqrt{G^2 + B^2} = \sqrt{G^2 + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)^2}$ .

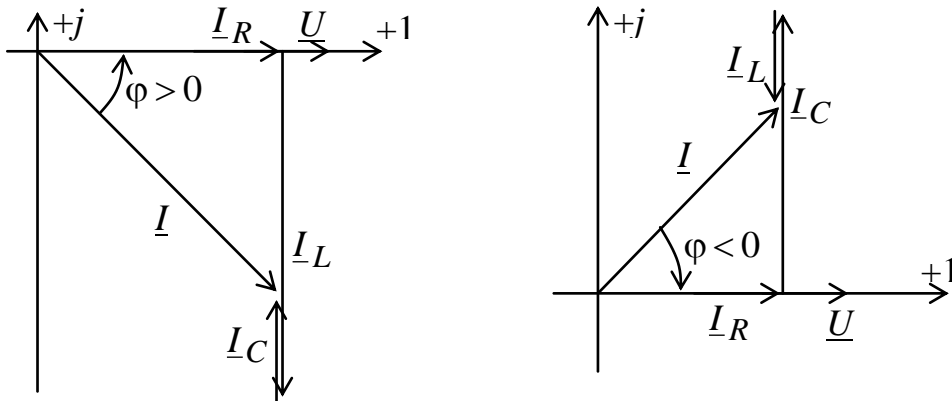


Рис. 2.13. Векторная диаграмма напряжения и токов при параллельном соединении элементов

Угол сдвига фаз

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{B}{G} = \operatorname{arctg} \frac{\omega C - 1/\omega L}{1/R}. \quad (2.32)$$

Если задано напряжение  $u = U_m \sin(\omega t + \psi)$ , то ток в исследуемой цепи равен

$$i = Y U_m \sin(\omega t + \psi - \varphi). \quad (2.33)$$

При  $B_L = B_C$  ( $B = 0$ ) реактивная составляющая тока равна нулю. Такой режим называется резонансом токов. Он характерен малым током, который потребляется от источника.

Активная, реактивная и полная проводимости образуют треугольник проводимостей (рис. 2.14). Из его рассмотрения следует

$$G = Y \cos \varphi, \quad B = Y \sin \varphi.$$

Домножив стороны треугольника на напряжение, получим треугольник токов со сторонами

$$I_a = GU = Y \cos \varphi U = I \cos \varphi;$$

$$I_p = BU = Y \sin \varphi U = I \sin \varphi;$$

$$I = \sqrt{I_a^2 + I_p^2}.$$

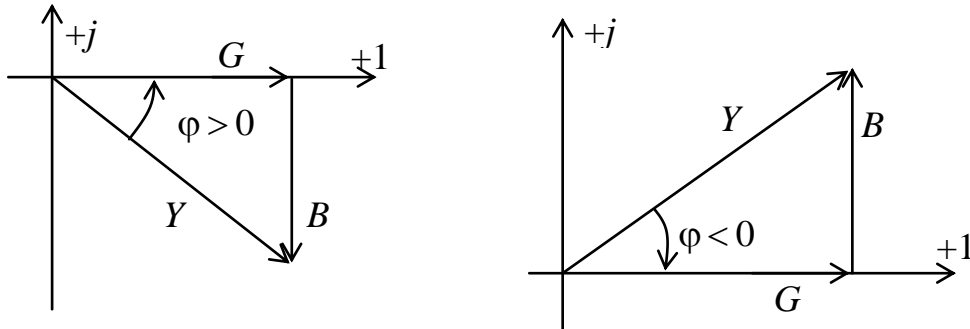


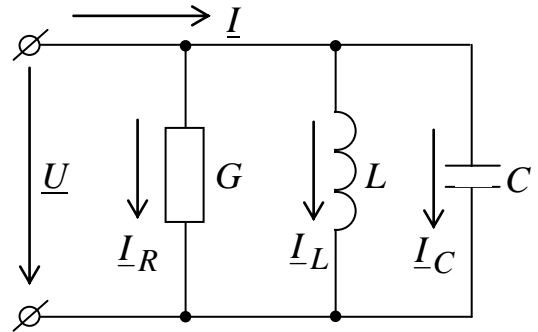
Рис. 2.14. Треугольник проводимостей

Для характеристики конденсаторов применяется понятие добротности конденсатора  $Q_C = B / G = \omega C R$ .

#### 2.14.4. Резонанс в параллельном контуре

Резонанс возникает при условии равенства нулю реактивной проводимости  $B = B_L - B_C = 0$  или  $1/\omega_0 L = \omega_0 C$ .

Взаимная компенсация индуктивной и емкостной проводимостей возникает при условии  $\omega_0^2 LC = 1$ , т.е. при том же условии, при котором имеет место резонанс в последовательном контуре (при резонансе напряжений).



В режиме резонанса токов полная проводимость

$$Y = \sqrt{G^2 + (B_L - B_C)^2} = G$$

достигает своего минимального значения, равного  $G$ , а полное сопротивление цепи при этом, в отличие от резонанса напряжений, имеет максимальное значение. Поэтому ток в неразветвленной части цепи имеет минимальное значение. Соответствующая векторная диаграмма показана на рис. 2.27.

Так как векторы  $I_L$  и  $I_C$  направлены противоположно друг другу и равны по величине, то на векторной диаграмме вектор тока  $I$  в

неразветвленной части цепи равен по величине и направлению вектору  $\underline{I}_R = G\underline{U}$ , изображающему ток в ветви с активным сопротивлением.

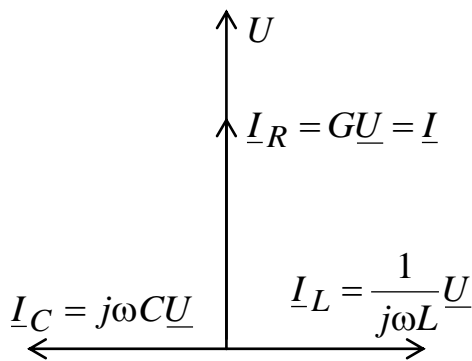


Рис. 2.27. Векторная диаграмма при резонансе токов

При этом может оказаться, что токи в индуктивности и емкости будут превосходить ток в неразветвленной части цепи. Такое положение может возникать, когда  $G < 1/\omega_0 L = \omega_0 C$ .

Поскольку  $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ , то это условие приводит к следующему  $G < \sqrt{C/L}$ .

Величину  $\gamma = \sqrt{C/L}$  называют волновой проводимостью цепи.

Отношение активной проводимости  $G$  к волновой называют затуханием цепи  $\alpha = G/\gamma$ .

Затухание также показывает во сколько раз ток в неразветвленной части цепи меньше (или больше) тока в ветви с емкостью или индуктивностью

$$\frac{G}{\gamma} = \frac{G}{\sqrt{C/L}} = \frac{G}{\omega_0 C} = G\omega_0 L = \alpha.$$

Умножив числитель и знаменатель на напряжение  $U$ , получим

$$\frac{GU}{\gamma U} = \frac{GU}{\omega_0 C U} = \frac{GU}{\frac{1}{\omega_0 L} U} = \frac{I_R}{I_L} = \frac{I_R}{I_C} = \frac{I}{I_L} = \frac{I}{I_C} = \alpha.$$

Величина, обратная затуханию цепи, называется добротностью  $Q$ .

С энергетической точки зрения процессы при параллельном резонансе аналогичны процессам в цепи с последовательным резонансом. Энергия магнитного поля катушки в течение четверти периода тока переходит в энергию электрического поля конденсатора, и в последующую четверть периода возвращается обратно из конденсатора в катушку. Обмен энергиями между полями цепи и источником питания не происходит.

Явление резонанса токов имеет важное значение в электроэнергетике. Так как основными потребителями электроэнергии являются двигатели, которые представляют собой активно-индуктивную нагрузку, то установка потребителей емкостной мощности вблизи приемников позволяет снизить токи, протекающие по ЛЭП, и тем самым уменьшить потери электроэнергии.

### 2.14.5. Частотные характеристики цепи с параллельным соединением $R, L, C$

Считая действующее значение напряжения питания неизменным, рассмотрим зависимости токов в ветвях от частоты питания, представляющие собой резонансные кривые (рис. 2.28).

Ток  $I_R = GU$  в ветви с активным сопротивлением от частоты не зависит и при  $U = \text{const}$  он неизменен.

Ток  $I_C = \omega CU$  представляет собою прямую линию, проходящую через начало координат.

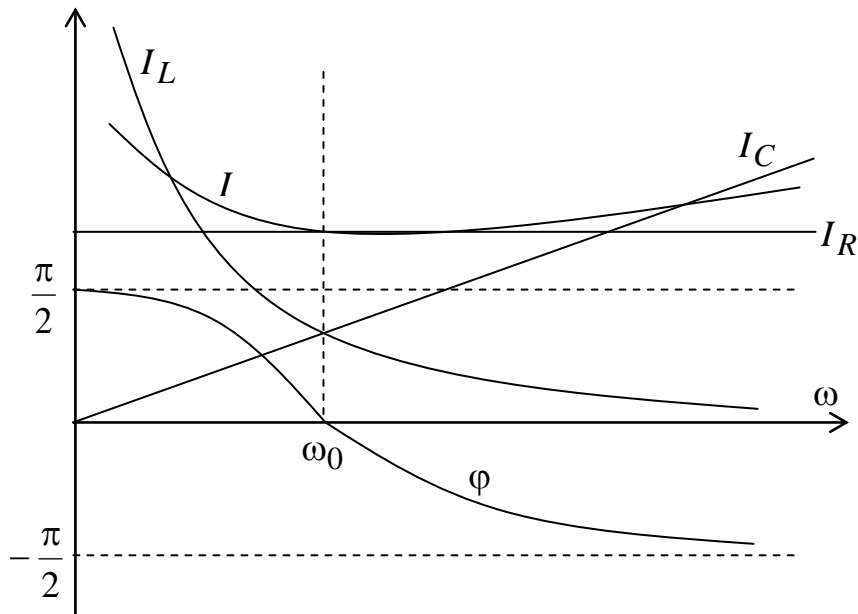


Рис. 2.28. Резонансные кривые

Ток в ветви с индуктивностью  $I_L = U/(\omega L)$  является гиперболой, точка пересечения которой с током в ветви с емкостью определяет величину резонансной частоты  $\omega_0$ .

Ток в неразветвленной части цепи

$$I = U \sqrt{G^2 + \left( \frac{1}{\omega L} - \omega C \right)^2}$$

становится минимальным и равным току в ветви с активной проводимостью при резонансной частоте.

Так как сдвиг фаз между приложенным напряжением и током в неразветвленной части цепи определяется выражением

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{1/\omega L - \omega C}{G},$$

то на участке оси абсцисс  $0-\omega_0$  ток отстает от напряжения, а на участке  $\omega_0 - \infty$  — опережает напряжение; величина же тока при отклонении частоты от резонансного значения возрастает.

Можно показать, что с увеличением добротности зависимость тока от частоты приобретает более заостренную форму.

Угол сдвига фаз  $\varphi$  между током в неразветвленной части цепи и напряжением питания изменяется монотонно, переходя из области положительных значений в область отрицательных в диапазоне  $\pm \pi/2$ .

## ЛЕКЦИЯ №9

### 2.9. Мощность в цепях синусоидального тока

Энергетические процессы в цепях переменного тока являются функциями времени. Рассмотрим мощности отдельных участков цепи с последовательным соединением  $R, L, C$  (рис. 2.15), для чего допустим, что к ней приложено напряжение  $u = U_m \sin(\omega t + \varphi)$  и протекает ток  $i = I_m \sin \omega t$ .

Мощность в активном сопротивлении

$$p_R = R \cdot i^2 = R \cdot (\sqrt{2}I)^2 \sin^2 \omega t = RI^2(1 - \cos 2\omega t).$$

Учитывая  $RI = U_R$ , а также равенство  $U_R = U \cos \varphi$ , полученное из треугольника напряжений, будем иметь

$$p_R = UI \cos \varphi - UI \cos \varphi \cdot \cos 2\omega t = UI \cos \varphi \cdot (1 - \cos 2\omega t).$$

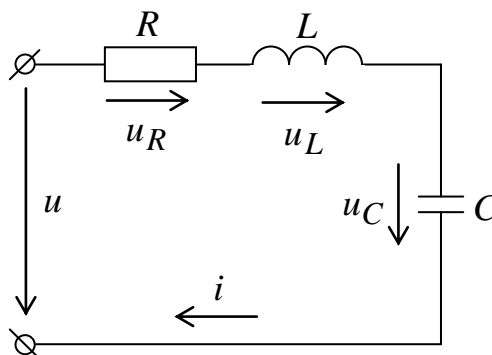


Рис. 2.15. Схема последовательной цепи

Из этого выражения видно:

1) мгновенная мощность в активном сопротивлении всегда положительна (т.е. всегда потребляется);

2) мгновенная мощность колеблется с двойной частотой около своего среднего значения, равного  $UI \cos \varphi$ .

Кривая изменения мощности на активном сопротивлении показана на рис. 2.16.

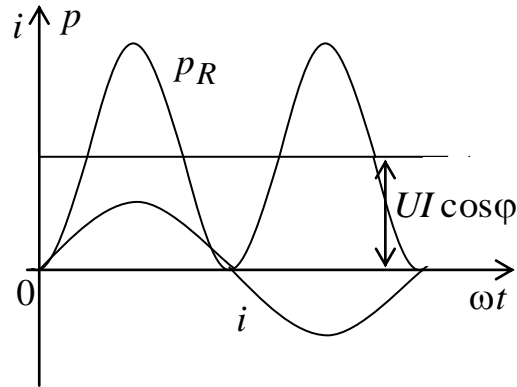


Рис. 2.16. Мгновенная мощность на активном сопротивлении

Мощность в индуктивности

$$p_L = iL \frac{di}{dt} = \omega L (\sqrt{2}I)^2 \sin \omega t \cdot \cos \omega t = \omega LI^2 \sin 2\omega t.$$

Но  $U_L = \omega LI$ , следовательно,  $p_L = U_L I \cos 2\omega t$ . Кривые тока и мощности показаны на рис. 2.17.

Из полученного выражения видно, что мгновенная мощность в индуктивности колеблется с двойной частотой около своего нулевого значения. Следовательно, каждые четверть периода энергия поступает в магнитное поле катушки, чтобы в последующие четверть периода вернуться полностью в источник питания, т.е. идеальная катушка индуктивности энергии не потребляет.

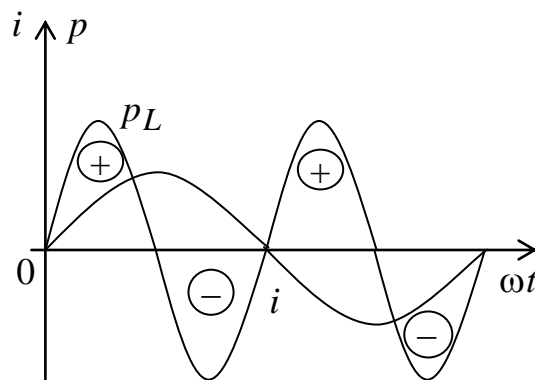


Рис. 2.17. Кривые тока и мощности на индуктивности

Мощность в емкости

$$\begin{aligned}
 p_C &= C \frac{d}{dt} \left( \frac{u_C^2}{2} \right) = i \cdot u_C = i \frac{1}{C} \int i \cdot dt = -\frac{(\sqrt{2} \cdot I^2)^2}{\omega C} \sin \omega t \cdot \cos \omega t = \\
 &= -\frac{1}{\omega C} I^2 \sin 2\omega t = -U_C I \sin 2\omega t.
 \end{aligned}$$

Кривые тока и мощности показаны на рис. 2.18.

Эти выражения показывают, что в конденсаторе емкостью  $C$  энергия не потребляется. Так же, как и в индуктивности, она колеблется около нулевого значения с двойной частотой, поступая от источника и возвращаясь к нему. Следует отметить, что мощности в индуктивности и в емкости колеблются в противофазе. Это говорит о том, что магнитное и электрическое поле способны обмениваться запасами энергии друг с другом.

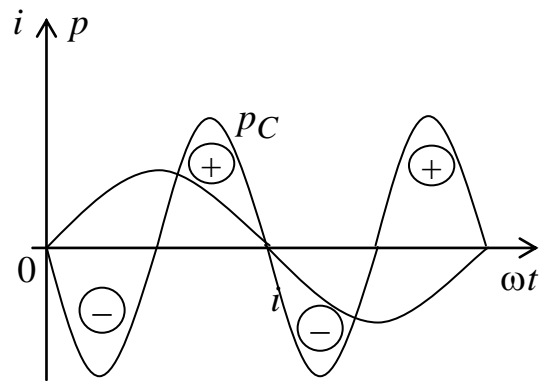


Рис. 2.18. Кривые тока и мощности на емкости

В соответствии с этим суммарная мгновенная мощность, накапливаемая в индуктивности и емкости, будет равна

$$\begin{aligned}
 p_X &= p_L + p_C = (U_L + U_C) I \sin 2\omega t = (\omega L - 1/\omega C) I^2 \sin 2\omega t = \\
 &= X \cdot I^2 \sin 2\omega t = |U_X| = X \cdot I = U \sin \varphi = U \cdot I \sin \varphi \cdot \sin 2\omega t.
 \end{aligned}$$

Этой мощностью, называемой мгновенной реактивной мощностью, реактивные элементы обмениваются не между собой, а с источником питания.

При  $\omega L = 1/\omega C$ , т.е. в режиме резонанса напряжений, эта реактивная мощность равна нулю и катушка и конденсатор обмениваются энергией только между собой, на получая ничего от источника и не возвращая в него.

Определим мгновенную полную мощность.

Если к участку цепи приложено напряжение  $u = U_m \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi)$  и по нему протекает ток  $i = I_m \cdot \sin \omega \cdot t$ , то мгновенная мощность, поступающая в цепь, будет равна

$$p = U_m \sin(\omega t + \varphi) \cdot I_m \sin \omega t = U \cdot I [\cos \varphi - \cos(2\omega t + \varphi)]. \quad (2.34)$$

Она состоит из двух слагающих: постоянной величины  $U \cdot I \cdot \cos \varphi$ , равной постоянной составляющей мгновенной мощности активного сопротивления, и гармонической, имеющей двойную частоту.

Средняя мощность

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T u \cdot i \cdot dt = U \cdot I \cos \varphi.$$

Эта мощность выделяется в приемниках электрической энергии. Множитель  $\cos \varphi$  носит наименование коэффициента мощности.

$$P = Z \cdot I^2 \cos \varphi = R \cdot I^2;$$

$$P = Y \cdot U^2 \cos \varphi = G \cdot U^2.$$

Согласно (2.34) мгновенная мощность колеблется с двойной частотой  $2\omega$  относительно средней мощности  $P = U I \cos \varphi$ .

На рис. 2.19 показаны кривые изменения во времени тока, напряжения и мощности цепи.

Когда ток и напряжение имеют одинаковый знак, мгновенная мощность положительна, и энергия поступает от источника к приемнику, где преобразуется в тепло (на активном сопротивлении) и запасается в магнитном поле катушки индуктивности или в электрическом поле конденсатора. Когда ток и напряжение имеют разные знаки, мгновенная мощность отрицательна, и энергия возвращается от приемника к источнику.

На практике пользуются понятиями активной, реактивной и полной мощности.

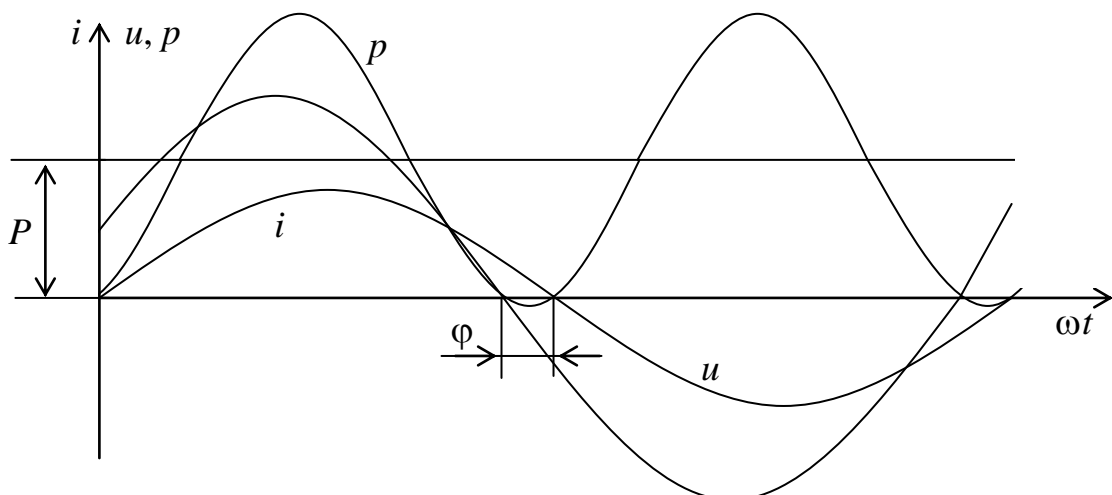


Рис. 2.19. Кривые изменения тока, напряжения и мощности



Под активной мощностью понимают среднее значение полной мгновенной мощности за период

$$P = UI \cos \varphi.$$

Активная мощность никогда не бывает отрицательной, так как ею характеризуется потребление энергии цепью. Единицей измерения активной мощности принят ватт (Вт).

Реактивная мощность ( $Q$ ) характеризует ту часть энергии, которой цепь обменивается с источником без потребления. Ее величина определяется амплитудным значением мгновенной реактивной мощности, выражение которой было ранее получено в виде  $UI \sin \varphi \sin 2\omega t$ . Следовательно,

$$Q = UI \sin \varphi.$$

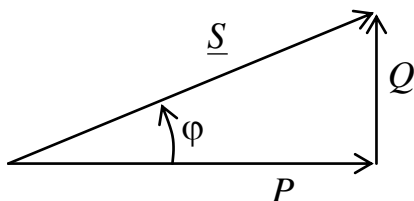
Реактивную мощность принято измерять в вольт-амперах реактивных (ВАр). Она положительна при отстающем токе (когда  $\varphi > 0$ ) и отрицательна при опережающем (когда  $\varphi < 0$ ).

Полезная работа, совершаемая элементами цепи, характеризуется активной мощностью  $P$ . Однако эта мощность зависит от угла сдвига фаз  $\varphi$ , значение которого может меняться в зависимости от режима работы цепи. Следовательно, активная мощность не может быть той расчетной величиной, на которую можно приводить расчет электрических машин, аппаратов и других устройств. Поэтому их характеризуют полной мощностью

$$S = U \cdot I,$$

являющейся произведением действующих значений тока и напряжения. Полная мощность равна наибольшему значению активной мощности, которую можно получить при заданных токе и напряжении. Единицей измерения полной мощности принят вольт-ампер (ВА).

Активная, реактивная и полная мощности связаны между собой соотношениями прямоугольного треугольника, называемого треугольником мощностей (рис. 2.20):



$$S^2 = P^2 + Q^2; \quad S = \sqrt{P^2 + Q^2};$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{Q}{P}; \quad \operatorname{cos} \varphi = \frac{P}{S}.$$

Рис. 2.20. Треугольник мощностей

Необходимо обратить внимание на особенности в понимании активной, реактивной и полной мощностей.

Активная мощность определяет ту работу, которая в среднем совершается (передается) в электрической цепи. Полная и реактивная мощности не определяют ни совершаемой работы, ни передаваемой энергии. Полная мощность, часто называемая кажущейся, является пределом, которого следует добиваться в целях повышения КПД. Реактивная мощность является условной величиной, характеризующей энергию электрических и магнитных полей, имеющих в цепи.

Запишем мощность в комплексной форме

Символическое представление действующих значений тока  $\underline{I}$  и напряжения  $\underline{U}$  позволяет легко и просто найти активную реактивную и полную мощности. Для этого необходимо взять произведение комплексного напряжения  $\underline{U}$  и комплекса  $\underline{I}^*$ , сопряженного с комплексным током  $\underline{I}$

$$\begin{aligned}\underline{S} &= \underline{U} \cdot \underline{I}^* = U e^{j\psi_u} I e^{j\psi_i} = U \cdot I e^{j(\psi_u - \psi_i)} = U \cdot I e^{j\varphi} = \\ &= U \cdot I \cos\varphi + jU \cdot I \sin\varphi = P + jQ = U^2 G + jU^2 B = \\ &= U^2(G + jB) = U^2 \underline{Y} = U^2 / \underline{Z} = I^2 \underline{Z}.\end{aligned}$$

Из этого выражения видно, что вещественная часть комплексной мощности равна активной мощности, мнимая часть – реактивной. Модуль комплексной мощности  $\underline{S}$  равен полной мощности  $S$ .

$$\begin{aligned}P &= \operatorname{Re}[\underline{S}]; \quad Q = \operatorname{Im}[\underline{S}]; \\ S &= \sqrt{\operatorname{Re}^2[\underline{S}] + \operatorname{Im}^2[\underline{S}];} \\ S &= \sqrt{(U \cdot I \cos\varphi)^2 + (U \cdot I \sin\varphi)^2} = U \cdot I.\end{aligned}$$

## 2.10. Баланс мощностей

Из закона сохранения энергии в каждый момент времени видно, что производимая генераторами мощность равна потребляемой мощности. Отсюда следует, что средняя мощность, генерируемая источником, равна средней мощности, потребляемой всеми потребителями. Сумма отдаваемых реактивных мощностей также равна сумме потребляемых реактивных мощностей:

$$\begin{aligned}\sum S_{\text{и}} &= \sum S_{\text{п}} \\ \text{или} \quad \sum P_{\text{и}} &= \sum P_{\text{п}} \quad \text{и} \quad \sum Q_{\text{и}} = \sum Q_{\text{п}}.\end{aligned}$$

## 2.11. Условие передачи максимальной мощности от источника к приемнику электрической энергии

Для определения величины и характера сопротивления  $\underline{Z} = R + jX$ , обеспечивающего максимум передаваемой активной мощности, представим источник электрической энергии как последовательное соединение источника напряжения  $\underline{E} = E\angle 0$  и внутреннего сопротивления  $\underline{Z}_B = R_B + jX_B$  (рис. 2.21).

Мощность приемника будет равна

$$P = R \cdot I^2 = \frac{R \cdot E^2}{(R + R_B)^2 + (X + X_B)^2}.$$

При любом активном сопротивлении приемника  $R$  мощность будет максимальна, если суммарное реактивное сопротивление  $X + X_B = 0$ , т.е. при  $X = -X_B$ . В этом случае

$$P_m = \frac{R \cdot E^2}{(R + R_B)^2}.$$

Взяв производную по  $R$  и приравняв ее нулю, находим, что  $P_m$  будет иметь наибольшее значение при  $R = R_B$ .

Таким образом, приемник получает от источника наибольшую активную мощность тогда, когда его комплексное сопротивление оказывается сопряженным с внутренним сопротивлением источника  $\underline{Z} = \underline{Z}_B^*$ .

При этом условии

$$(P_m)_{\max} = \frac{E^2}{4R_B}.$$

КПД в этом случае будет равно

$$\eta = \frac{R \cdot I^2}{(R + R_B) I^2} = 0,5.$$

В энергетических установках такой режим передачи максимальной мощности невыгоден из-за низкого КПД.

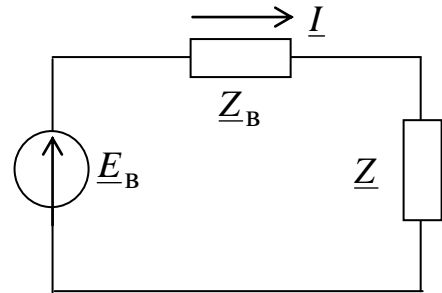


Рис. 2.21. Схема электропередачи

## 2.12. Применение символического метода к расчету электрических цепей

### Закон Ома.

Выражение закона Ома в символической форме было получено ранее. Применительно к изображениям действующих значений он записывался в виде

$$\underline{I} = \underline{U} / \underline{Z}; \quad \underline{U} = \underline{Z} \underline{I}; \quad \underline{U} = \underline{I} / \underline{Y}; \quad \underline{I} = \underline{Y} \underline{U}.$$

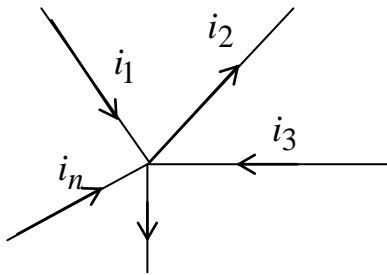
Этими выражениями учитывается не только связь между действующими значениями тока и напряжения, но и сдвиг фаз между ними.

### I закон Кирхгофа.

Для мгновенных значений токов, сходящихся в каком-либо узле цепи закон записывается в виде  $\sum i_k = 0$ .

Если  $i_k = I_{km} \sin(\omega t + \psi_k)$ , то изображение вращающегося вектора амплитуды токов будет

$$\underline{I}_{km}(\omega) = I_{km} e^{j(\omega t + \psi_k)} = I_{km} e^{j\psi_k} e^{j\omega t} = \underline{I}_{km} e^{j\omega t}$$



Взяв сумму всех векторов и приравняв ее нулю, получим

$$\sum \underline{I}_{km} e^{j\omega t} = 0 \text{ или } e^{j\omega t} \cdot \sum \underline{I}_{km} = 0.$$

Отсюда  $\sum \underline{I}_{km} = 0$ . Учитывая, что  $\underline{I}_k = \underline{I}_{km} / \sqrt{2}$ , для действующих значений можно записать  $\sum \underline{I}_k = 0$ .

### II закон Кирхгофа.

Применительно к контуру цепи для мгновенных значений ЭДС и напряжений второй закон имеет вид  $\sum_{k=1}^n e_k = \sum_{k=1}^n u_k$ .

В случае синусоидальных величин, когда  $u_k = U_{km} \sin(\omega t + \psi_{u_k})$  и  $e_k = E_{km} \sin(\omega t + \psi_{e_k})$ , закон можно представить в виде вращающихся изображающих векторов

$$\sum \underline{E}_{km} e^{j\omega t} = \sum \underline{U}_{km} e^{j\omega t} = \sum \underline{Z}_k \underline{I}_{km} e^{j\omega t}.$$

$$\text{Отсюда } \sum \underline{E}_{km} = \sum \underline{U}_{km} = \sum \underline{Z}_k \underline{I}_{km}.$$

Здесь  $\underline{E}_{km} = E_{km} e^{j\psi_{e_k}}$ ;  $\underline{U}_{km} = U_{km} e^{j\psi_{u_k}}$ ;  $\underline{I}_{km} = I_{km} e^{j\psi_{i_k}}$  – комплексы амплитуд ЭДС, напряжений и токов  $k$ -й ветви контура.

Принимая во внимание связь между амплитудными и действующими значениями, выражение закона можно записать в виде:

$$\sum \underline{E}_k = \sum \underline{U}_k = \sum \underline{Z}_k \underline{I}_k.$$

Если в какой-либо  $k$ -й ветви имеются последовательно соединенные элементы  $R_k, L_k, C_k$ , то

$$\underline{Z}_k = R_k + j\omega L_k + \frac{1}{j\omega C_k} = R_k + j\left(\omega L_k - \frac{1}{\omega C_k}\right) = R_k + jX_k.$$

Тогда для этой ветви получим

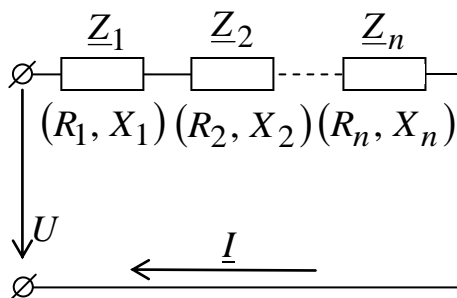
$$\underline{Z}_k \underline{I}_k = \left[ R_k + j\left(\omega L_k - \frac{1}{\omega C_k}\right) \right] \cdot \underline{I}_k = R_k \underline{I}_k + jX_k \underline{I}_k.$$

Как и в случае цепей постоянного тока, перед составлением уравнений по II закону Кирхгофа необходимо задавать положительные направления ЭДС, токов и напряжений во всех ветвях цепи, обозначив эти направления стрелками.

Можно показать, что все методы расчета цепей постоянного тока применимы и для расчета цепей синусоидального тока, если использовать при этом символическое изображение функций.

Следует четко представлять, что при расчете цепей синусоидального тока реальные направления величин периодически изменяются. Поэтому произвол в выборе положительных направлений отражается на их фазах: изменение выбранного положительного направления на противоположное меняет фазу на  $180^\circ$ , что соответствует изменению направления изображающего вектора на обратное.

### Последовательное соединение элементов.



По II закону Кирхгофа имеем

$$\underline{U} = \sum \underline{U}_k = \sum \underline{Z}_k \underline{I} = \underline{I} \sum \underline{Z}_k = \underline{Z} \cdot \underline{I}$$

Учитывая, что  $\underline{Z}_k = R_k + jX_k$ , общее сопротивление можно представить в виде

$$\underline{Z} = \sum \underline{Z}_k = \sum R_k + j \sum X_k = R + jX.$$

Следовательно,  $R = \sum R_k$ ;  $X = \sum X_k$ .

Таким образом, общее активное сопротивление последовательного соединения равно арифметической сумме активных сопротивлений всех элементов, а общее реактивное – алгебраической сумме сопротивлений реактивных элементов.

На основании вышеизложенного

$$\begin{aligned} RI^2 &= I^2 \sum R_k = \sum R_k I^2; & P &= \sum P_k = \sum R_k I^2; \\ XI^2 &= I^2 \sum X_k = \sum X_k I^2; & Q &= \sum Q_k = \sum X_k I^2. \end{aligned}$$

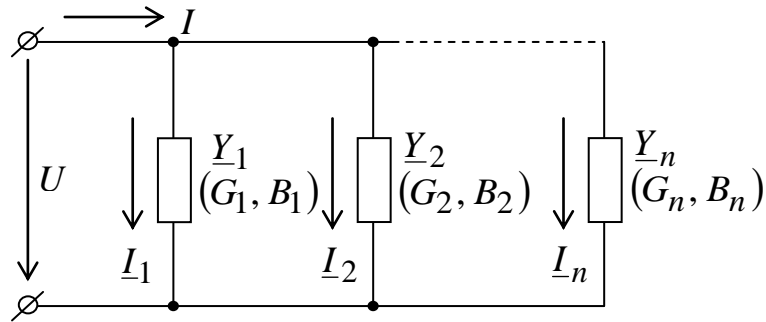
Следовательно, активная мощность  $P$  равна арифметической сумме активных мощностей, а реактивная – алгебраической сумме реактивных мощностей элементов.

### Параллельное соединение элементов.

По I закону Кирхгофа общий ток на входе цепи будет

$$\underline{I} = \sum \underline{I}_k = \sum \underline{Y}_k \underline{U} = \underline{U} \sum \underline{Y}_k = \underline{U} \cdot \underline{Y}_k,$$

где  $\underline{Y} = G_k + jB_k$  – комплексная проводимость  $k$ -го участка.



Таким образом, комплексная проводимость всей цепи при параллельном соединении равна алгебраической сумме комплексных проводимостей отдельных участков

$$\underline{Y} = \sum \underline{Y}_k = \sum G_k + j \sum B_k = G + jB.$$

Следовательно,  $G = \sum G_k$ ;  $B = \sum B_k$ .

Таким образом, активная проводимость равна арифметической сумме активных проводимостей отдельных ветвей, а реактивная – алгебраической сумме реактивных проводимостей.

Пользуясь полученными результатами, получим

$$\begin{aligned} GU^2 &= U^2 \sum G_k = \sum G_k U^2; & P &= \sum P_k = \sum G_k U^2; \\ BU^2 &= U^2 \sum B_k = \sum B_k U^2; & Q &= \sum Q_k = \sum B_k U^2. \end{aligned}$$

Следовательно, активная мощность  $P$  равна арифметической сумме активных мощностей, а реактивная – алгебраической сумме реактивных мощностей всех параллельных ветвей.

## 2.13. Топографические диаграммы

Наглядное, качественное и количественное представление о величинах и фазовых соотношениях, устанавливающихся в цепи между напряжениями, обеспечивают топографические диаграммы. Каждой точке электрической цепи синусоидального тока соответствует потенциал, который можно изобразить на комплексной плоскости в виде вектора. Потенциал одной из точек, как правило, принимают равным нулю. Совокупность векторов на плоскости, изображающих потенциалы различных точек цепи, когда каждой точке схемы соответствует определенная точка на плоскости векторов, называется топографической диаграммой. На такой диаграмме напряжение

между двумя любыми точками цепи определяется разностью двух векторов, изображающих их потенциалы (рис. 2.22).

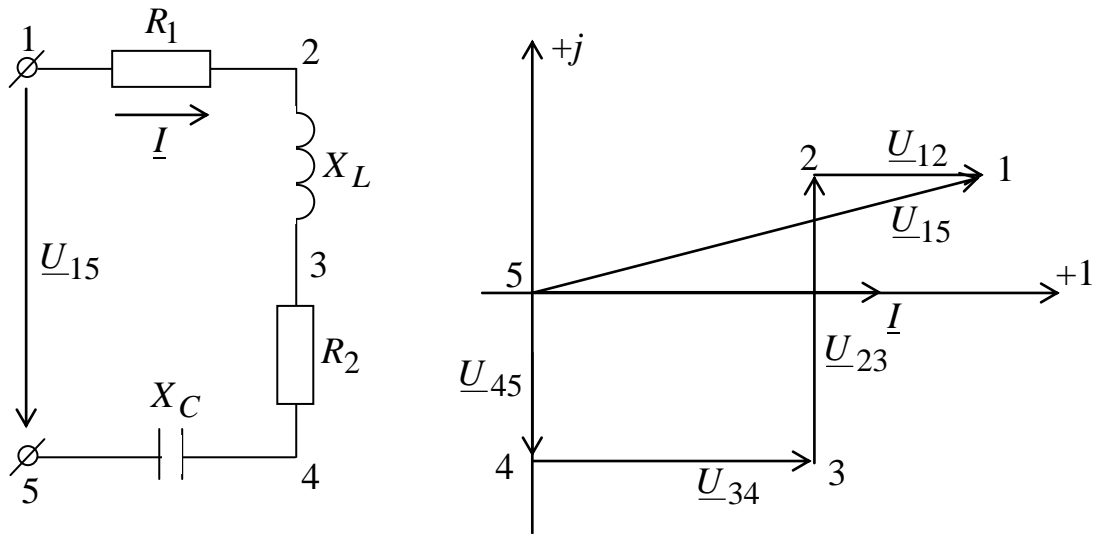


Рис. 2.22. Цепь и ее топографическая диаграмма

Примем потенциал  $\varphi_5 = 0$ . Обход будем осуществлять навстречу положительному направлению тока  $I$ :

$$\underline{U}_{45} = -jX_C I; \quad \underline{U}_{34} = R_2 I;$$

$$\underline{U}_{23} = jX_L I; \quad \underline{U}_{12} = R_1 I.$$

Вектор напряжения на диаграмме направлен к точке высшего (уменьшаемого) потенциала, а то же напряжение на схеме указывается стрелкой, направленной от высшего потенциала к низшему.

### Самостоятельная работа

Методы расчета электрических цепей синусоидального тока.  
Топографические диаграммы.

[Л 9.1.3, с. 92–100]

## ЛЕКЦИЯ №10

### 3. ИНДУКТИВНО СВЯЗАННЫЕ ЦЕПИ

#### 3.1. Основные положения и определения

При изменении магнитного поля, связанного с каким-либо витком, в последнем наводится ЭДС, которая определяется скоростью изменения магнитного потока, независимо от того, чем вызвано изменение этого потока. В катушке, состоящей из большого числа витков, наводится ЭДС,

пропорциональная скорости изменения потокосцепления. Потокосцепление – это сумма магнитных потоков, сцепленных с отдельными витками данной катушки. Если все витки катушки пронизываются одним и тем же магнитным потоком, то потокосцепление равно произведению магнитного потока на число витков.

При рассмотрении цепей гармонического тока мы учитывали лишь явление самоиндукции, т.е. наведение ЭДС в электрической цепи при изменении потокосцепления самоиндукции из-за тока в этой цепи. Отношение потокосцепления самоиндукции к току характеризовалось скалярной величиной – индуктивностью  $L$ .

Явление взаимной индукции связано с наведением ЭДС в цепи при изменении потокосцепления взаимной индукции в связи с изменением тока в другой цепи. Такие две электрические цепи называются индуктивно связанными цепями.

Отношение потокосцепления взаимной индукции в одной цепи к току в другой характеризуется взаимной индуктивностью  $M$ , которая также является скалярной величиной.

Если потокосцепление  $W_1 F_{M2}$  первой цепи обусловлено током  $i_2$  второй цепи, то взаимная индуктивность цепей определяется как

$$M_{12} = \frac{W_1 \Phi_{M2}}{i_2}. \quad (3.1)$$

Соответственно потокосцепление  $W_2 F_{M1}$  второй цепи, обусловленное током  $i_1$  первой цепи характеризуется взаимной индуктивностью

$$M_{21} = \frac{W_2 \Phi_{M1}}{i_1}. \quad (3.2)$$

Для линейных электрических цепей выполняется равенство  $M_{12} = M_{21}$ . Поэтому индексы у параметра взаимной индуктивности можно упустить.

Справедливость последнего равенства можно доказать, если выразить  $F_{M1}$  и  $F_{M2}$  через соответствующие намагничивающие силы  $i_1 W_1$  и  $i_2 W_2$  и магнитную проводимость путей, по которым замыкаются эти потоки

$$\lambda_M = \sum \frac{\mu_a}{l}.$$

$$\begin{cases} M_{12} = \frac{W_1 (i_2 W_2 \lambda_M)}{i_2} = W_1 W_2 \lambda_M \\ M_{21} = \frac{W_2 (i_1 W_1 \lambda_M)}{i_1} = W_1 W_2 \lambda_M. \end{cases} \quad (3.3)$$



Величина  $M$  пропорциональна произведению чисел витков катушек и магнитной проводимости пути общего потока, которая зависит от магнитной проницаемости среды и взаимного расположения катушек.

Свойство взаимности для индуктивно связанных цепей: если ток, проходящий в первой цепи, обуславливает во второй цепи потокосцепление взаимной индукции  $W_2 F_{M1}$ , то такой же ток, проходящий во второй цепи, обусловит в первой цепи потокосцепление взаимной индукции  $W_1 F_{M2}$  той же величины.

### 3.2. Полярности индуктивно связанных катушек

Определим ЭДС взаимной индукции.

Положительные направления тока и создаваемого им потока согласуются всегда по правилу правого винта. Условимся, положительные направления токов  $i_1$  и  $i_2$  в двух индуктивно связанных катушках считать согласными, если положительные направления создаваемых ими магнитных потоков самоиндукции и взаимной индукции совпадают.

На рис. 3.1а, б показано согласное включение двух катушек. Зажимы катушек, относительно которых токи  $i_1$  и  $i_2$  направлены одинаково, называются одноименными или однополярными. Два одноименных зажима обозначаются точками.

Одноименные зажимы индуктивно связанных катушек характерны тем, что при одинаковом направлении токов  $i_1$  и  $i_2$  относительно этих зажимов магнитные потоки самоиндукции и взаимной индукции в каждой катушке складываются. Поэтому при вычерчивании электрических схем достаточно наметить на схеме одноименные зажимы индуктивно связанных катушек.

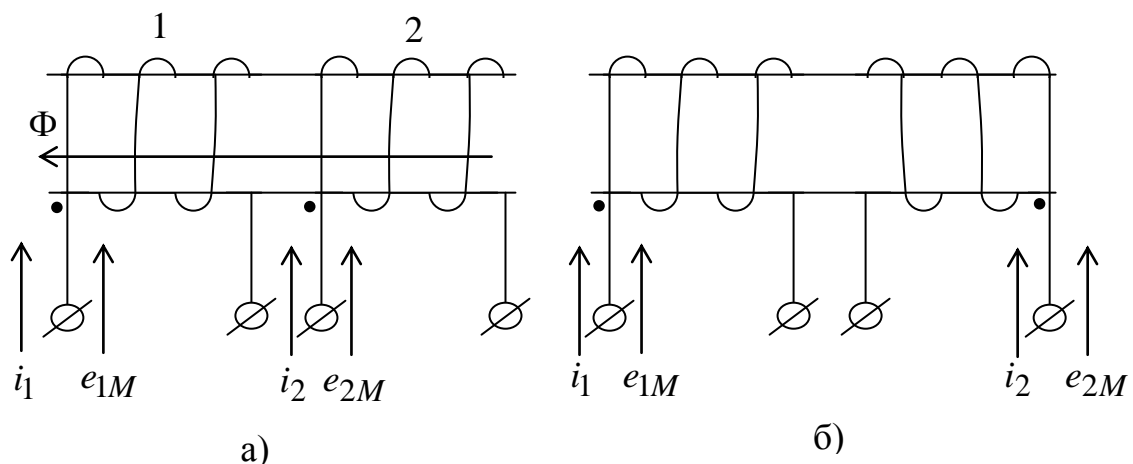


Рис. 3.1. Согласное включение катушек

ЭДС взаимной индукции при согласном включении

$$\begin{cases} e_{M1} = -\frac{W_1 d\Phi_{M2}}{dt} = -M \frac{di_2}{dt} \\ e_{M2} = -\frac{W_2 d\Phi_{M1}}{dt} = -M \frac{di_1}{dt} \end{cases} \quad (3.4)$$

На рис. 3.2а показано согласное, а на рис. 3.2б – встречное включение катушек.

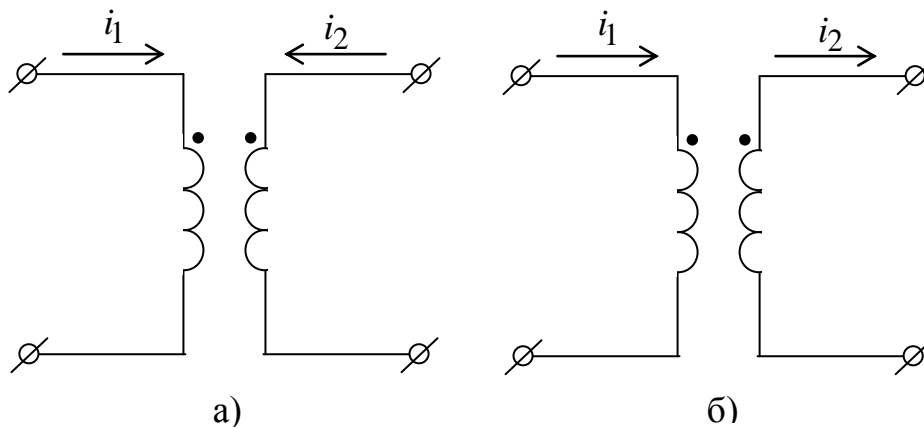


Рис. 3.2. Согласное (а) и встречное (б) включение катушек

Одноименные зажимы двух индуктивно связанных катушек обладают той особенностью, что подведение к одной из них тока, возрастающего по величине, вызывает возрастание потенциала на одноименном зажиме второй катушки. На этом правиле основан один из методов нахождения одноименных зажимов индуктивно связанных катушек.

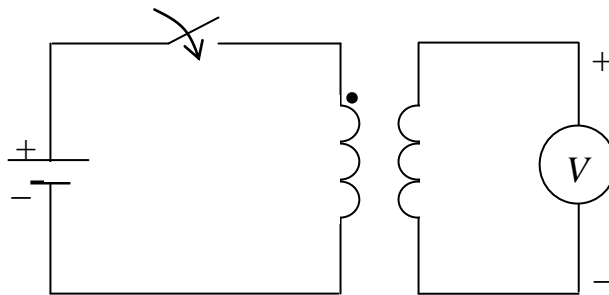


Рис. 3.3. Схема определения полярности катушек

Одна из катушек включается в цепь постоянного напряжения, а к другой присоединяется вольтметр постоянного тока. Если в момент замыкания цепи источника стрелка вольтметра отклоняется в сторону

положительных показаний, то одноименные зажимы катушек определены верно.

При встречном включении катушек (рис. 3.2б) ЭДС взаимной индукции равны

$$\begin{cases} e_{M1} = \frac{W_1 d\Phi_{M2}}{dt} = M \frac{di_2}{dt} \\ e_{M2} = \frac{W_2 d\Phi_{M1}}{dt} = M \frac{di_1}{dt}. \end{cases} \quad (3.5)$$

Рассмотрим последовательное соединение двух индуктивно связанных катушек (рис. 3.4).

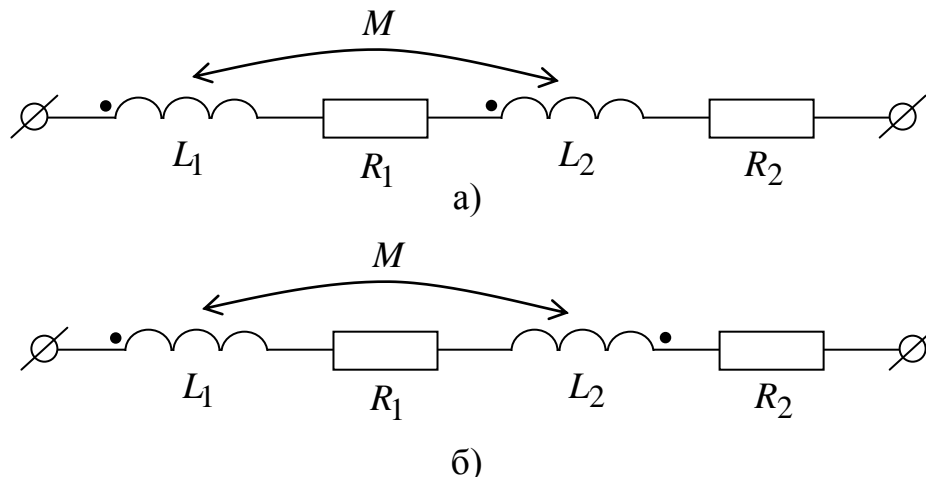


Рис. 3.4. Согласно и встречное последовательное включение катушек

При согласном направлении токов (рис. 3.4а) ЭДС взаимной индукции  $e_{M1} = -M \frac{di_2}{dt}$  и  $e_{M2} = -M \frac{di_1}{dt}$ , совпадающие по направлению с токами, могут быть заменены падениями напряжения  $u_{M1} = -e_{M1}$  и  $u_{M2} = -e_{M2}$ . Если учесть, что  $i_1 = i_2 = i$ , то суммарное напряжение цепи будет

$$\begin{aligned} u_{\text{согл}} &= R_1 i_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} + R_2 i_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt} = \\ &= (R_1 + R_2) i + (L_1 + L_2 + 2M) \frac{di}{dt}. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Две катушки можно заменить одной с активным сопротивлением  $(R_1 + R_2)$  и индуктивностью  $(L_1 + L_2 + 2M)$ . Наличие взаимной индукции при согласном включении катушек, соединенных последовательно, увеличивает индуктивность цепи.

При встречном направлении токов

$$\begin{aligned} u_{\text{встр}} &= R_1 i_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} - M \frac{di_2}{dt} + R_2 i_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} - M \frac{di_1}{dt} = \\ &= (R_1 + R_2) i + (L_1 + L_2 - 2M) \frac{di}{dt}. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Наличие взаимной индукции при встречном включении катушек уменьшает индуктивность цепи.

На рис. 3.5 представлены топографические диаграммы напряжений при согласном и встречном включении катушек.

Расчет разветвленной электрической цепи при наличии взаимной индуктивности может быть проведен одним из известных методов с учетом падений напряжений в сопротивлениях взаимной индуктивности.

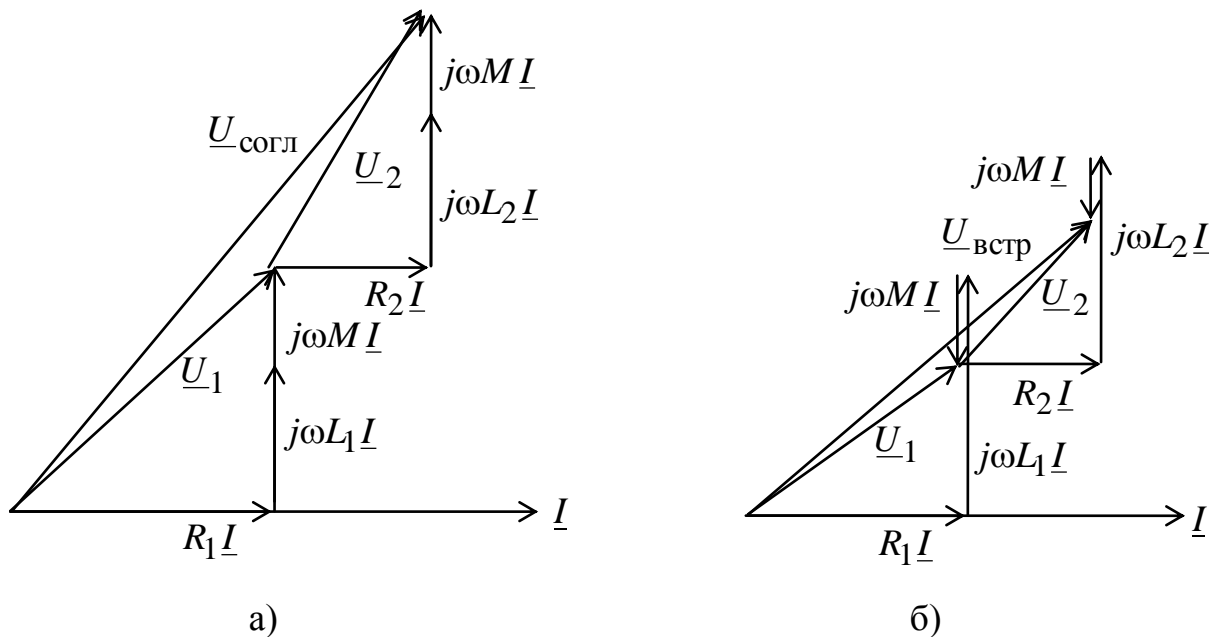


Рис. 3.5. Топографические диаграммы напряжений при согласном (а) и встречном включении катушек

### 3.5. Передача энергии между индуктивно связанными элементами

Всю цепь за исключением индуктивно связанных элементов представим в виде активного четырехполюсника (рис. 3.7).

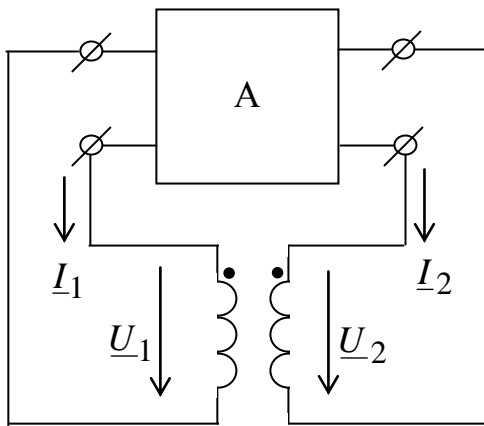


Рис. 3.7. Выделение индуктивно связанных катушек из цепи

Комплексные мощности, обусловленные взаимной индуктивностью

$$\begin{aligned} \underline{S}_{1M} &= \underline{U}_{1M} \underline{I}_1 = j\omega M \underline{I}_2 \underline{I}_1 = j\omega M I_2 I_1 e^{j(\psi_2 - \psi_1)} = \\ &= -\omega M I_2 I_1 \sin(\psi_2 - \psi_1) + j\omega M I_2 I_1 \cos(\psi_2 - \psi_1); \\ \underline{S}_{2M} &= \underline{U}_{2M} \underline{I}_2 = j\omega M \underline{I}_1 \underline{I}_2 = -\underline{S}_{1M}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$P_{1M} = -P_{2M} = \omega M I_1 I_2 \sin(\psi_1 - \psi_2).$$

При указанных направлениях токов и напряжений положительное значение мощности соответствует притоку энергии от активного четырехполюсника к рассматриваемым элементам, а отрицательное – передаче энергии в четырехполюсник.

Суммарная активная мощность, обусловленная взаимной индукцией и поступающая в оба элемента, равна нулю:

$$P_{1M} + P_{2M} = 0.$$

При  $0 < \psi_1 - \psi_2 < \pi$   $P_{1M} > 0$ , а  $P_{2M} < 0$  и энергия передается от четырехполюсника через первый элемент и возвращается через второй.

При  $-\pi < \psi_1 - \psi_2 < 0$   $P_{1M} < 0$ , а  $P_{2M} > 0$ .

### 3.6. Уравнения схемы замещения трансформатора

### без ферромагнитного сердечника

Трансформатор представляет собой аппарат, передающий энергию из одной цепи в другую посредством электромагнитной индукции. Он применяется для различных целей, но чаще всего предназначается для преобразования величин переменных напряжений и токов. Трансформатор состоит из двух или нескольких индуктивно связанных обмоток, насаженных на общий сердечник.

На рис. 3.8 активные сопротивления обмоток условно вынесены и изображены отдельно. Обмотка трансформатора, присоединяемая к источнику питания, называется первичной, а обмотка, к которой подключается нагрузка – вторичной. При заданной полярности зажимов обмоток трансформатора на рис. 3.8 токи направлены встречно, что не имеет принципиального значения.

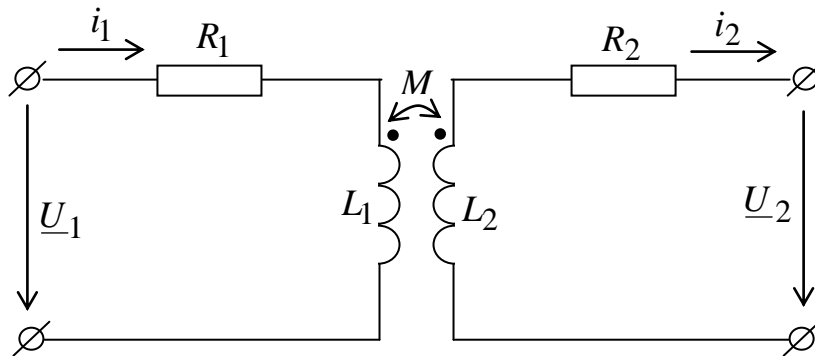


Рис. 3.8. Электрические элементы трансформатора

Уравнения трансформатора в дифференциальной форме:

$$\begin{cases} u_1 = R_1 i_1 + L \frac{di_1}{dt} - M \frac{di_2}{dt} \\ -u_2 = R_2 i_2 + L \frac{di_2}{dt} - M \frac{di_1}{dt}. \end{cases} \quad (3.16)$$

В комплексной форме записи:

$$\begin{cases} \underline{U}_1 = (R_1 + j\omega L_1) \underline{I}_1 - j\omega M \underline{I}_2 \\ -\underline{U}_2 = (R_2 + j\omega L_2) \underline{I}_2 - j\omega M \underline{I}_1. \end{cases} \quad (3.17)$$

Первичные и вторичные обмотки имеют магнитную связь. На практике при расчетах удобнее заменить эту магнитную связь на электрическую.

$$\begin{cases} \underline{U}_1 = [R_1 + j\omega(L_1 - M) + j\omega M] \underline{I}_1 - j\omega M \underline{I}_2 \\ -\underline{U}_2 = [R_2 + j\omega(L_2 - M) + j\omega M] \underline{I}_2 - j\omega M \underline{I}_1 \end{cases} \quad (3.18)$$

Последние уравнения являются контурными для следующей схемы (рис. 3.8).

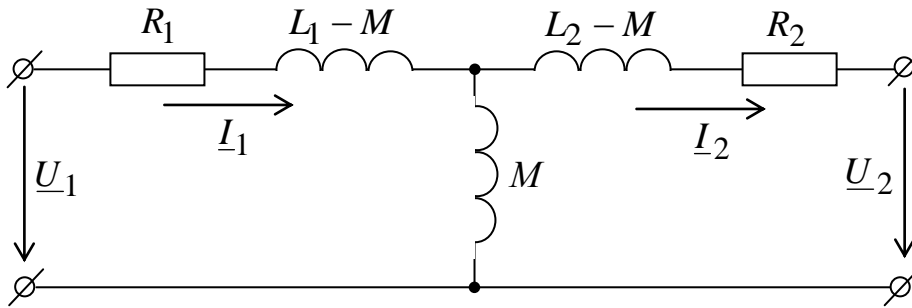


Рис. 3.8. Схема замещения трансформатора

Эта схема может рассматриваться в качестве схемы замещения трансформатора без ферромагнитного сердечника. В схеме замещения, в отличие от предыдущей, первичная и вторичная цепи трансформатора связаны не индуктивно, а электрически. Входящие в эту схему разности  $L_1 - M$  и  $L_2 - M$  имеют физический смысл только при одинаковом числе витков  $W_1$  и  $W_2$ . В этом случае они представляют собой индуктивности рассеяния  $L_{s1}$  и  $L_{s2}$  обмоток трансформатора.

Для изображения таким образом трансформатора с разным чисел витков обмоток осуществляют приведение трансформатора. Приведение заключается в том, что напряжение  $\underline{U}_2$  и ток  $\underline{I}_2$  заменяются величинами, приведенными к первичной обмотке: напряжение  $\underline{U}_2$  умножается на  $n$ , а ток  $\underline{I}_2$  делится на  $n$ , где  $n = W_1/W_2$  — отношение чисел витков, называемое коэффициентом трансформации. Внесем изменения в (3.17)

$$\begin{cases} \underline{U}_1 = (R_1 + j\omega L_1) \underline{I}_1 - j\omega nM \frac{\underline{I}_2}{n} \\ -n\underline{U}_2 = n^2(R_2 + j\omega L_2) \frac{\underline{I}_2}{n} - jn\omega M \underline{I}_1 \end{cases} \quad (3.19)$$

Схема замещения приведенного трансформатора представлена на рис. 3.9.

Уравнения (3.19) можно преобразовать к такому виду, чтобы они стали контурными для схемы на рис. 3.9:

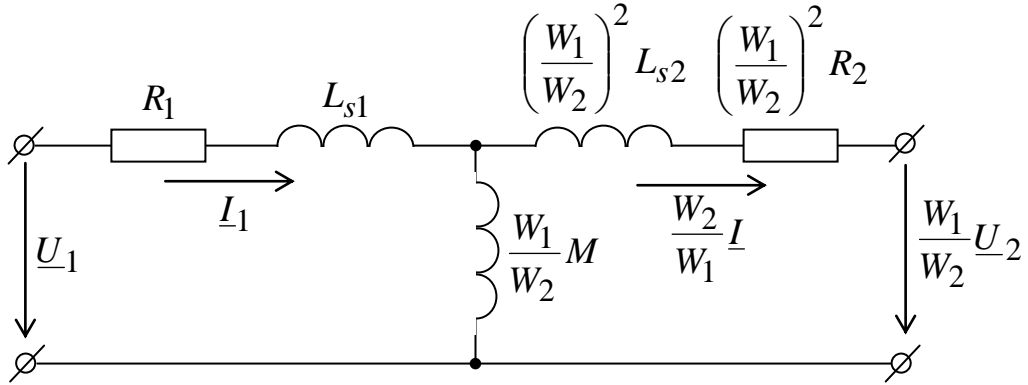


Рис. 3.9. Схема замещения приведенного трансформатора

$$\begin{cases} \underline{U}_1 = [R_1 + j\omega(L_1 - nM)]I_1 + j\omega nM I_1 - j\omega nM \frac{I_2}{n} \\ -n\underline{U}_2 = n^2 \left[ R_2 + j\omega \left( L_2 - \frac{M}{n} \right) \right] \frac{I_2}{n} + jn\omega M \frac{I_2}{n} - jn\omega M I_1. \end{cases} \quad (3.20)$$

Приведенная схема замещения трансформатора содержит индуктивность  $\frac{W_1}{W_2}M$  в поперечной ветви, которую называют ветвью намагничивания. Намагничивающая сила, определяющая общий магнитный поток, который пронизывает обмотки  $W_1$  и  $W_2$ , при встречном направлении токов равна

$$i_1 W_1 - i_2 W_2 = W_1 \left( i_1 - i_2 \frac{W_2}{W_1} \right) = \left( i_1 - \frac{i_2}{n} \right) W_1. \quad (3.21)$$

Ток  $i_1 - \frac{i_2}{n} \left( I_1 - \frac{I_2}{n} \right)$ , проходящий через ветвь намагничивания, называется намагничивающим током трансформатора. Построим векторную диаграмму приведенного трансформатора (рис. 3.10).

При построении диаграммы в качестве исходного вектора принят приведенный вторичный ток. Падение напряжения от приведенного вторичного тока  $I_2/n$  в приведенном вторичном сопротивлении  $R_2 n^2$  и индуктивном сопротивлении рассеяния  $\omega L_{s2} n^2$  вторичной обмотки складываются с приведенным вторичным напряжением  $n\underline{U}_2$ , которое опережает ток  $I_0/n$  на угол  $\varphi_2$ . Полученное напряжение равно падению напряжения в индуктивном сопротивлении ветви намагничивания  $j\omega nM(I_1 - I_2/n)$ . Ток намагничивания отстает от напряжения на угол  $90^\circ$ . Первичный ток находится как геометрическая сумма токов  $I_2/n$  и  $(I_1 - I_2/n)$ . Падения



напряжения от тока  $\underline{I}_1$  в  $R_1$  и  $\omega L_{s1}$  геометрически складываются с напряжением на ветви намагничивания, образуя первичное напряжение.

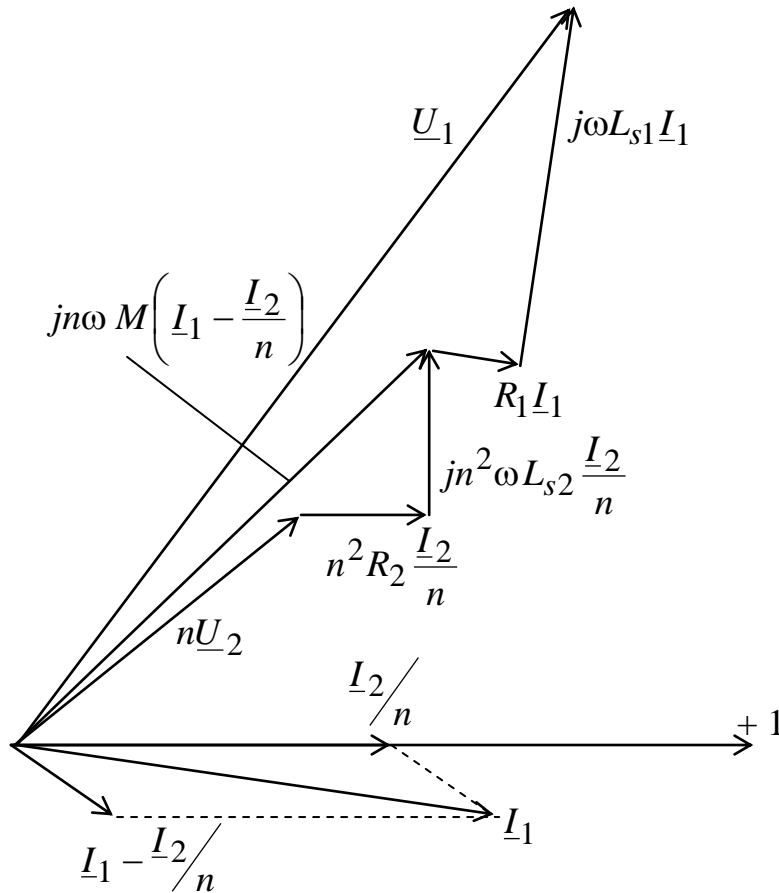


Рис. 3.10. Векторная диаграмма приведенного трансформатора

Так как вторичные электрические величины  $\underline{U}_2$  и  $\underline{I}_2$  в последней схеме приведены к первичной обмотке, то данная схема приведенного трансформатора не эквивалентна исходной. Эквивалентной будет так называемая схема идеального трансформатора, у которого при любых условиях отношение  $U_1/U_2$  равно отношению  $I_2/I_1 = n$ . Идеальный трансформатор не имеет потерь энергии и при разомкнутой вторичной обмотке ток через его первичную обмотку не проходит. Реально таких трансформаторов нет, но по свойствам к нему близок трансформатор с коэффициентом связи примерно равным единице и со столь большим числом витков, что сопротивление  $j\omega M$  практически равно бесконечности.

### 3.7. Входное сопротивление трансформатора

Если нагрузка  $\underline{Z}_H$  присоединена к источнику через трансформатор, то

$$\begin{cases} \underline{U}_1 = (R_1 + j\omega L_1)\underline{I}_1 - j\omega M \underline{I}_2 \\ 0 = -j\omega M \underline{I}_1 + (R_2 + j\omega L_2 + \underline{Z}_H)\underline{I}_2 \end{cases}$$

Вторичный ток

$$\underline{I}_2 = \frac{j\omega M \underline{I}_1}{R_2 + j\omega L_2 + \underline{Z}_H}$$

Сопротивление на входных зажимах трансформатора

$$\underline{Z}_{\text{вх}} = \frac{\underline{U}_1}{\underline{I}_1} = R_1 + j\omega L_1 + \frac{(\omega M)^2}{R_2 + j\omega L_2 + \underline{Z}_H}$$

Третье слагаемое в правой части последнего уравнения представляет собой комплексное сопротивление, вносимое из вторичной цепи в первичную. Эквивалентная схема замещения показана на рис. 3.11.

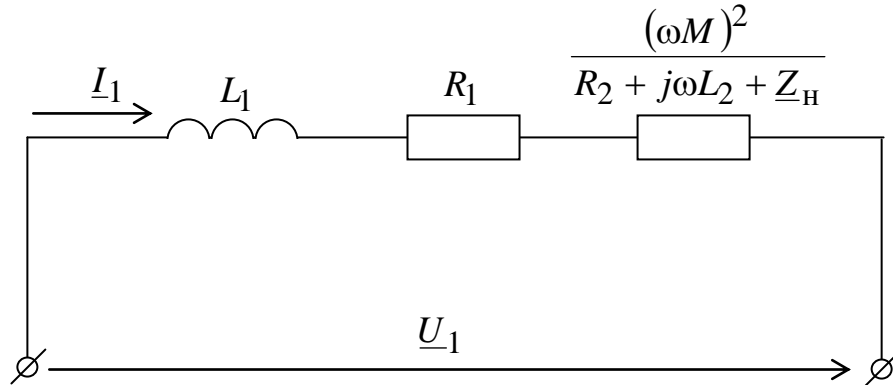


Рис. 3.11. Эквивалентная схема трансформатора

В зависимости от характера сопротивления нагрузки мнимая часть вносимого сопротивления может быть больше или меньше нуля.

В случае идеального трансформатора

$$n = \frac{\underline{U}_1}{\underline{U}_2} = \frac{\underline{I}_2}{\underline{I}_1}; \quad \underline{Z}_{\text{вх}} = \frac{\underline{U}_1}{\underline{I}_1} = \frac{n \underline{U}_2}{\underline{I}_2/n} = n^2 \underline{Z}_H$$

Идеальный трансформатор изменяет сопротивление нагрузки пропорционально  $n^2$  без изменения его угла. Это свойство используется, когда необходимо выровнять сопротивление источника и нагрузки (для увеличения мощности источника)

$$n = \sqrt{\frac{\underline{Z}_{\text{вх}}}{\underline{Z}_1}}$$

где  $\underline{Z}_{\text{вх}}$  – требуемая величина сопротивления.

## ЛЕКЦИЯ №11

### 7. ЦЕПИ ТРЕХФАЗНОГО ТОКА

#### 7.1. Основные понятия многофазных цепей

Многофазной системой называется совокупность электрических цепей, называемых фазами, в которых действуют синусоидальные напряжения одной и той же частоты, отличающиеся друг от друга по амплитуде и фазе.

Среди многофазных систем чаще используются симметричные многофазные системы, в которых ЭДС, напряжения и токи равны соответственно друг другу по величине и сдвинуты по фазе на угол

$$\alpha = 2 \cdot \pi / m, \quad (7.1)$$

где  $m$  – число фаз.

На практике встречаются двух-, трех-, шести- и двенадцатифазные системы.

Наибольшее распространение получила трехфазная система, созданная в 90-х годах 19-го столетия М.О. Доливо-Добровольским. При этом им был разработан трехфазный асинхронный двигатель – наиболее простой по конструкции преобразователь электрической энергии в механическую.

Схематичная конструкция трехфазного синхронного генератора показана на рис. 7.1.

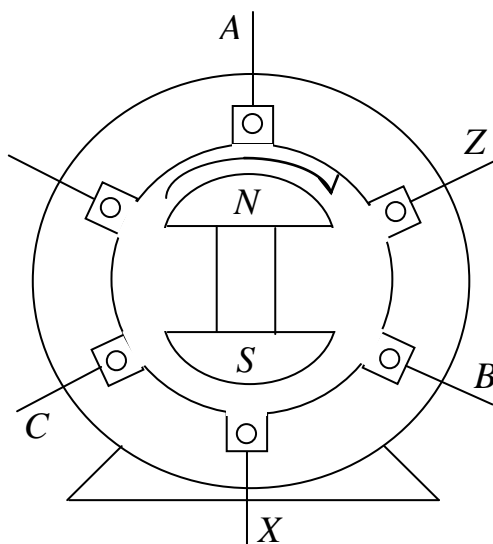


Рис. 7.1. Конструкция трехфазного синхронного генератора

Каждая из фаз обмотки статора здесь представлена двумя проводами, образующими виток. Начала и концы обмоток фаз обозначены,

соответственно,  $A-X$ ,  $B-Y$ ,  $C-Z$ . К ним подсоединяется внешняя цепь. Обмотки статора сдвинуты в пространстве на угол  $\alpha = 2 \cdot \pi / 3$  рад = 120 электрических градусов.

Ротор, представляющий собой электромагнит постоянного тока, выполняется таким образом, чтобы магнитное поле в воздушном зазоре распределялось по синусоидальному закону. Поэтому ротор, приводимый во вращение первичным двигателем, наводит в фазах обмотки статора синусоидальные ЭДС. Наводимые в обмотках ЭДС максимальны, когда ось полюсов ротора пересекает проводники статора. Для различных обмоток это происходит в разные моменты времени. Поэтому наводимые ЭДС не совпадают по фазам

$$\begin{cases} e_A = E_{mA} \sin(\omega t + \psi) \\ e_B = E_{mB} \sin(\omega t + \psi - 2\pi/3) \\ e_C = E_{mC} \sin(\omega t + \psi - 4\pi/3) = E_{mC} \sin(\omega t + \psi + 2\pi/3). \end{cases} \quad (7.2)$$

В дальнейшем будем полагать угол  $\psi = 0$ .

График изменения мгновенных значений ЭДС для этого случая изображен на рис. 7.2.

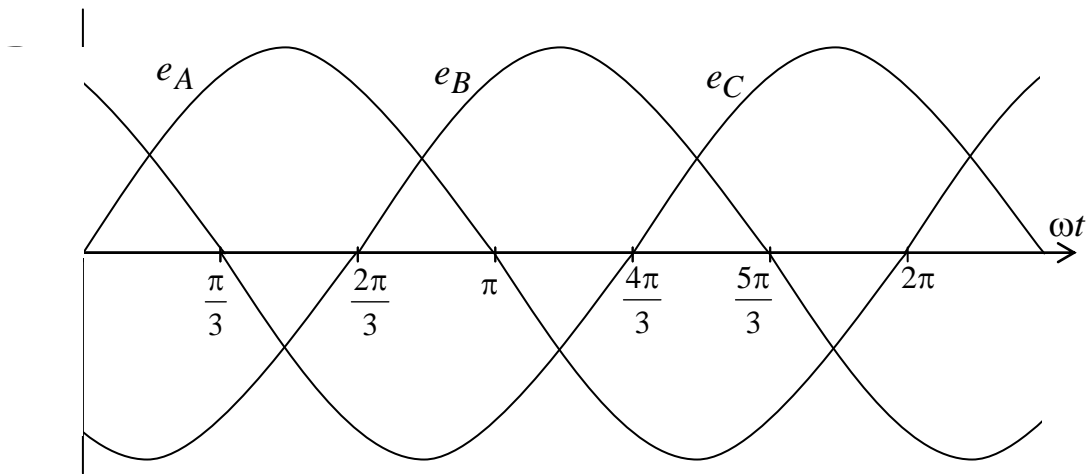


Рис. 7.2. График изменения мгновенных значений ЭДС

Комплексные действующие значения ЭДС запишутся как

$$\begin{cases} \underline{E}_A = \frac{E_{mA}}{\sqrt{2}} \\ \underline{E}_B = \frac{E_{mB}}{\sqrt{2}} \cdot e^{-j2\pi/3} \\ \underline{E}_C = \frac{E_{mC}}{\sqrt{2}} \cdot e^{-j4\pi/3} = \frac{E_{mC}}{\sqrt{2}} \cdot e^{j2\pi/3}. \end{cases} \quad (7.3)$$

Векторная диаграмма имеет вид, показанный на рис. 7.3.

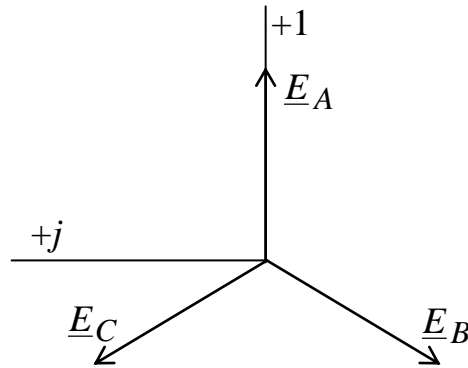


Рис. 7.3. Векторная диаграмма ЭДС

Порядок, в котором ЭДС генератора проходят максимум, называется последовательностью фаз или порядком чередования фаз. При указанном на рис.7.1 направлении вращения ротора последовательность фаз  $ABC$ . Если изменить направление вращения последовательность фаз будет обратной ( $ACB$ ).

Рассмотренная совокупность ЭДС называется трехфазной системой ЭДС. Такая система называется симметричной, если все ЭДС (напряжения, токи) равны по амплитуде и сдвинуты между собой на один и тот же угол  $2\pi/3$ .

Если эти условия не выполняются, то система называется несимметричной. Несимметрия бывает трех видов:

- 1) амплитудная, когда  $E_A \neq E_B \neq E_C$ ;
- 2) фазовая, когда  $\psi_A - \psi_B \neq \psi_B - \psi_C \neq \psi_C - \psi_A$ ;
- 3) комбинированная, когда не равны друг другу и амплитуды, и фазовые сдвиги различных фаз.

## 7.2. Схемы соединения обмоток генератора и приемников

Впервые многофазные системы были применены П.Н. Яблочковым для питания изобретенных им электрических свечей. В его установках обмотки многофазных генераторов присоединялись к электрически не связанным друг с другом линиям, питавшим отдельные группы свечей. Подобные многофазные системы называются несвязанными. На рис. 7.4 показана несвязанная трехфазная система.

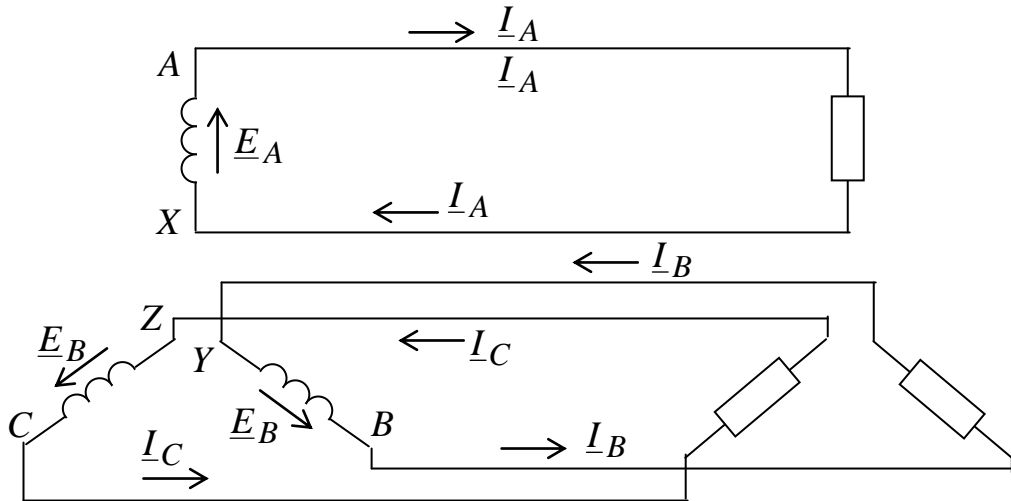


Рис. 7.4. Несвязанная трехфазная система

Существенным недостатком несвязанных систем является наличие большого числа проводов, что приводит к повышенному расходу проводниковых материалов и к увеличению электрических потерь в линиях. Поэтому в настоящее время применяются многофазные системы цепей, соединенные друг с другом, которые называются связанными. Связанная многофазная система образует одну сложную разветвленную цепь, поэтому она просто называется многофазной цепью.

## ЛЕКЦИЯ №12

Существует два основных способа соединения обмоток генераторов, трансформаторов и приемников: соединение «звездой» и соединение «многоугольником» (для трехфазной цепи – «треугольником»).

При соединении «звездой» все концы фазных обмоток генератора объединяют в одну точку (рис. 7.5).

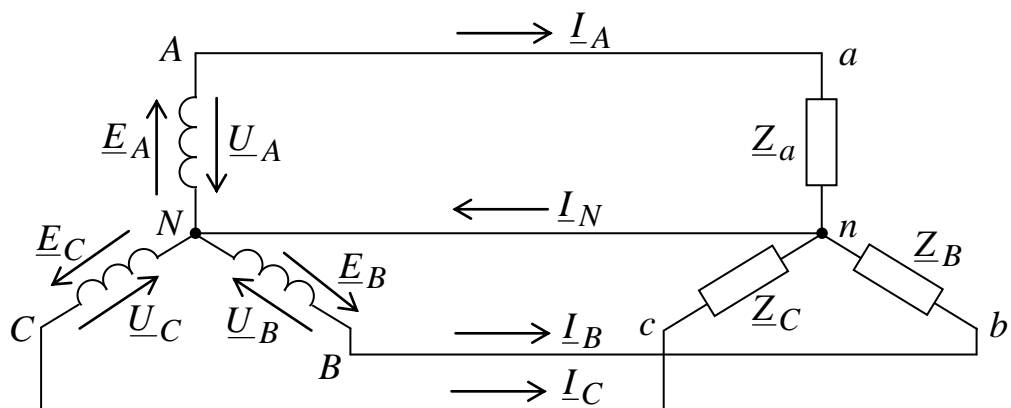


Рис. 7.5. Схема соединения «звезда с нейтральным проводом»

Общие точки фаз генератора и приемника называются нейтральными ( $N$  и  $n$ ) или нулевыми ( $0$  и  $0_1$ ), а соединяющий их провод – нейтральным или нулевым. Остальные провода, соединяющие фазы генератора и приемника, называются линейными. При соединении «треугольником» (рис. 7.6) фазные обмотки генераторов соединяются последовательно таким образом, чтобы начало последующей обмотки соединялось с концом предыдущей.

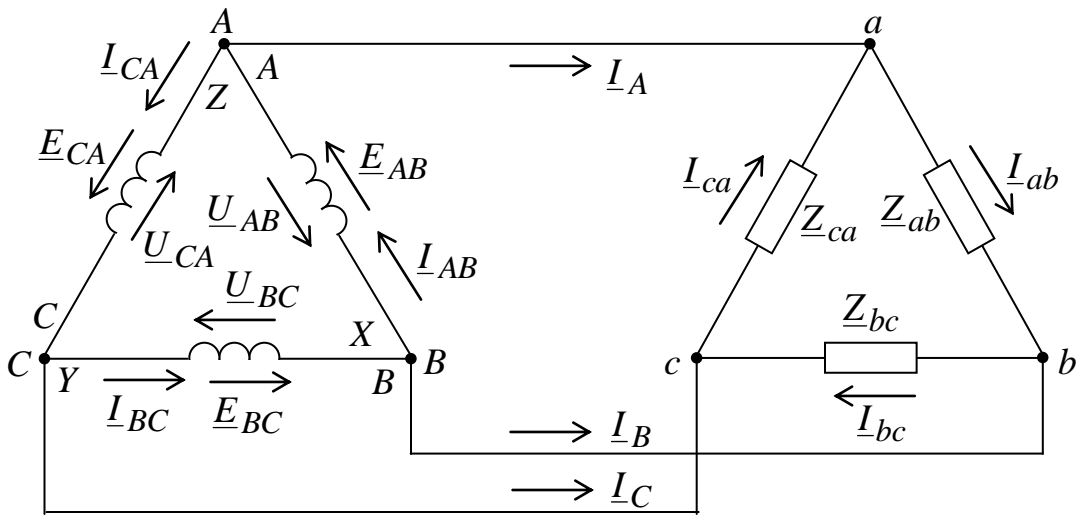


Рис. 7.6. Соединение фаз источника и нагрузки «треугольником»

Последовательное кольцевое соединение обмоток генератора не приводит к их короткому замыканию, как это было бы при подобном соединении аккумуляторов, так как в симметричной системе сумма ЭДС, действующих в контуре треугольника, в любой момент времени равна нулю

$$\begin{aligned}
 e &= E_m \left[ \sin \omega t + \sin \left( \omega t - \frac{2\pi}{3} \right) + \sin \left( \omega t + \frac{2\pi}{3} \right) \right] = \\
 &= |\sin(x \pm y) = \sin x \cdot \cos y \pm \sin y \cdot \cos x| = \\
 &= E_m \left( \sin \omega t + \sin \omega t \cdot \cos \frac{2\pi}{3} - \cos \omega t \cdot \sin \frac{2\pi}{3} + \right. \\
 &\quad \left. + \sin \omega t \cdot \cos \frac{2\pi}{3} + \cos \omega t \cdot \sin \frac{2\pi}{3} \right) = \\
 &= E_m \sin \omega t \cdot \left( 1 + 2 \cdot \cos \frac{2\pi}{3} \right) = 0.
 \end{aligned}$$

Схемы соединения обмоток источника и приемников не зависят друг от друга. В одной и той же цепи могут быть различные схемы соединения источника и приемников.

Лучи звезды или ветви треугольника называются фазами приемника или генератора. Сопротивления фаз называются фазными сопротивлениями. ЭДС, наводимые в фазах источника, напряжения на фазах источника и приемника, токи в фазах называются, соответственно, фазными ЭДС,

напряжениями и токами ( $E_\phi$ ,  $U_\phi$ ,  $I_\phi$ ). Напряжения между линейными проводами и токи в них называются линейными напряжениями и токами ( $U_\Delta$ ,  $I_\Delta$ ).

Необходимо отметить, что для схемы «звезда» токи в фазах равны линейным ( $I_\phi = I_\Delta$ ), а для схемы «треугольник» равны между собой соответствующие фазные и линейные напряжения ( $U_\phi = U_\Delta$ ).

Принятые положительные направления ЭДС, напряжений и токов показаны на рис. 7.5 и 7.6.

### 7.3. Симметричный режим трехфазной цепи

Трехфазная цепь и трехфазный приемник называются симметричными, если комплексные сопротивления всех фаз одинаковы:

$$\underline{Z}_a = \underline{Z}_b = \underline{Z}_c = \underline{Z}$$

или

$$Z_a = Z_b = Z_c = Z \quad \text{è} \quad \varphi_a = \varphi_b = \varphi_c = \varphi.$$

В противном случае они называются несимметричными.

Будем рассматривать работу трехфазных цепей, когда к ним приложена симметричная система напряжений.

## ЛЕКЦИЯ №13

### 7.3.1. Соединение «звездой»

На рис. 7.7 показано соединение нагрузки «звездой» с нейтральным проводом.

К каждой фазе приемника прикладывается соответствующее напряжение источника. Напряжения источника образуют симметричную систему векторов. Так как  $\underline{Z}_a = \underline{Z}_b = \underline{Z}_c = \underline{Z}$ , то каждый из векторов токов сдвинут относительно фазного напряжения на один и тот же угол  $\varphi$ , и, следовательно, векторы фазных токов также образуют симметричную систему. Если

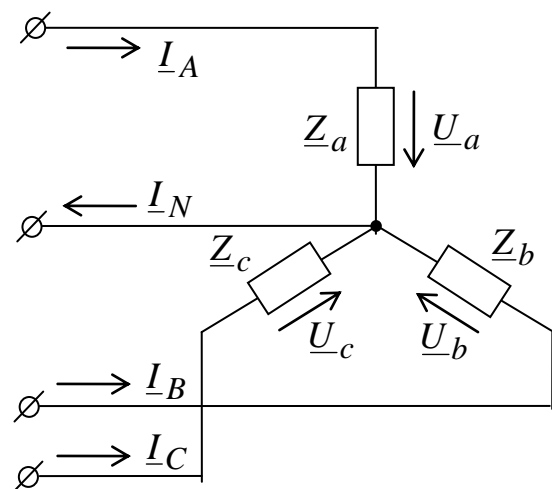


Рис. 7.7. Соединение нагрузки «звездой» с нейтральным проводом



сопротивления приемника носят активно-индуктивный характер ( $\varphi > 0$ ), то векторная диаграмма токов и напряжений имеет следующий вид (рис. 7.8).

Ток в нейтральном проводе будет равен нулю:

$$\underline{I}_N = \underline{I}_A + \underline{I}_B + \underline{I}_C = 0.$$

В этом можно убедиться, если просуммировать проекции векторов токов на действительную и мнимую оси. Отсутствие тока в нулевом проводе делает его не нужным. Поэтому для симметричных приемников можно не применять нулевой провод.

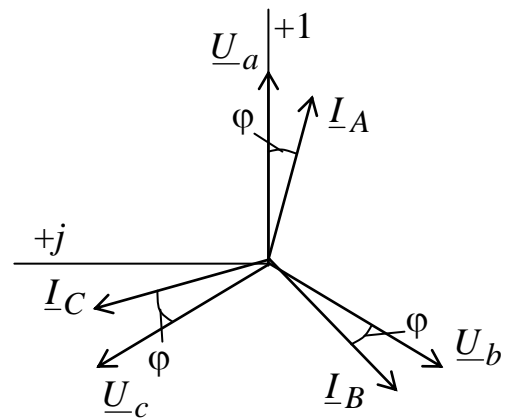


Рис. 7.8. Векторная диаграмма при активно-индуктивной нагрузке

**Линейные напряжения определяются как разность фазных напряжений**

$$\begin{cases} \underline{U}_{AB} = \underline{U}_A - \underline{U}_B \\ \underline{U}_{BC} = \underline{U}_B - \underline{U}_C \\ \underline{U}_{CA} = \underline{U}_C - \underline{U}_A \end{cases} \quad (7.4)$$

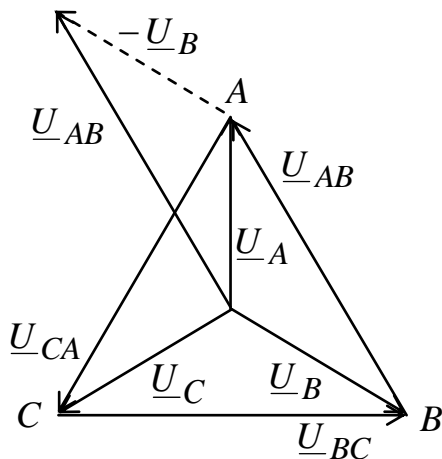


Рис. 7.9. Топографическая диаграмма напряжений

Топографическая диаграмма напряжений имеет вид, показанный на рис. 7.9.

Рассматривая треугольник  $ANB$  и учитывая, что  $U_A = U_B = U_C = U_\phi$  и  $U_{AB} = U_{BC} = U_{CA} = U_\lambda$ , будем иметь

$$U_{AB} = U_A \cos 30^\circ + U_B \cos 30^\circ =$$

$$= 2U_\phi \sqrt{3}/2 = \sqrt{3}U_\phi = U_\lambda$$

Линейные и фазные токи равны друг другу. Следовательно, в

симметричной трехфазной системе:

$$U_{\text{л}} = \sqrt{3}U_{\text{ф}}, \quad I_{\text{л}} = I_{\text{ф}}.$$

### 7.3.2. Соединение «треугольником»

К каждой фазе приемника с сопротивлением  $Z_{ab} = Z_{bc} = Z_{ca} = Z$  прикладывается линейное напряжение источника (рис. 7.10). Векторная диаграмма напряжений образует звезду. Причем линейные напряжения равны фазным

$$U_{ab} = U_{bc} = U_{ca} = U_{\text{л}} = U_{\text{ф}}.$$

Фазные токи сдвинуты относительно соответствующих напряжений на угол  $\varphi$ . Линейные токи в соответствии с первым законом Кирхгофа определяются как разность фазных токов:

$$\begin{cases} \underline{I}_A = \underline{I}_{ab} - \underline{I}_{ca} \\ \underline{I}_B = \underline{I}_{bc} - \underline{I}_{ab} \\ \underline{I}_C = \underline{I}_{ca} - \underline{I}_{bc} \end{cases} \quad (7.5)$$

Из этой системы следует, что сумма линейных токов

$$\sum_{k=1}^3 \underline{I}_k = 0,$$

т.е. на векторной диаграмме они образуют замкнутый треугольник токов.

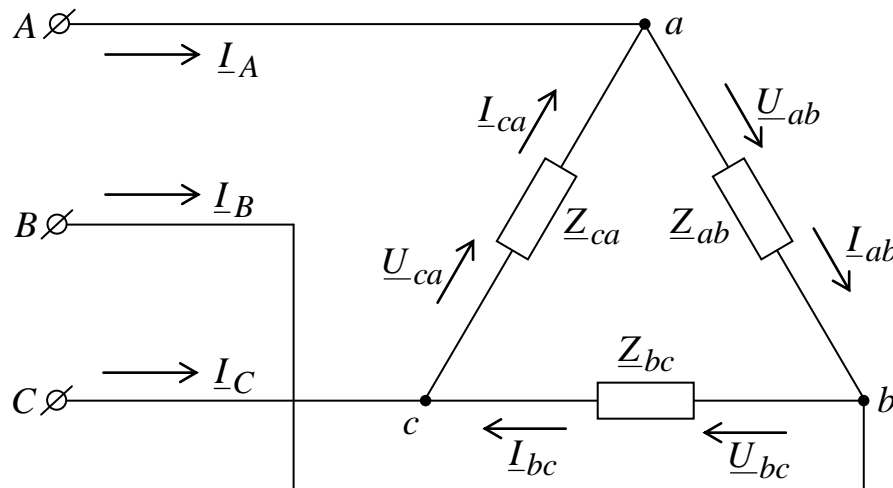


Рис. 7.10. Соединение нагрузки «треугольником»

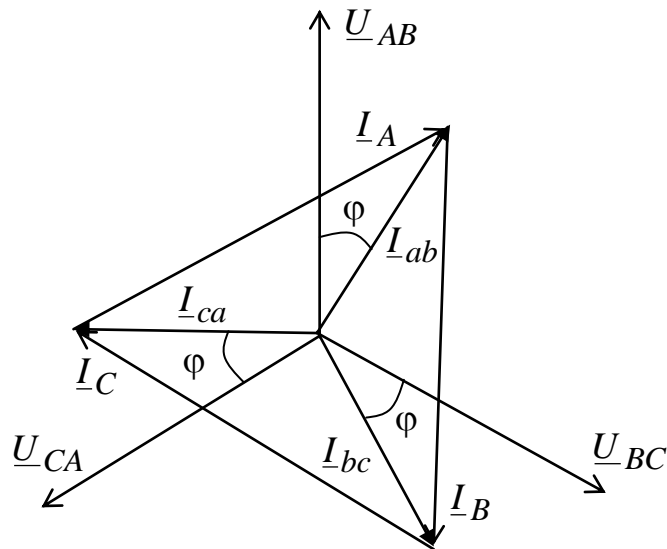


Рис. 7.11. Векторная диаграмма токов и напряжений при соединении нагрузки «треугольником»

Для активно-индуктивной нагрузки ( $\varphi > 0$ ) векторная диаграмма имеет вид, показанный на рис. 7.11. Так как линейные токи образуют равносторонний треугольник, то фазные и линейные токи находятся в соотношении

$$I_{\text{л}} = \sqrt{3}I_{\text{ф}}.$$

Таким образом, в симметричной трехфазной цепи при соединении «треугольником» имеем соотношение

$$U_{\text{ф}} = U_{\text{л}}; \quad I_{\text{л}} = \sqrt{3}I_{\text{ф}}.$$

В целом необходимо отметить, что сумма линейных напряжений (всегда) и сумма линейных токов (в трехпроводной цепи) равны нулю.

#### 7.3.4. Расчет симметричных трехфазных цепей

Рассмотрим принцип расчета трехфазных симметричных цепей на конкретном примере цепи (рис. 7.12).

В цепи имеются приемники различных групп одинаковых сопротивлений, включенных не только в рассечку линий, но и по схеме звезда и треугольник.

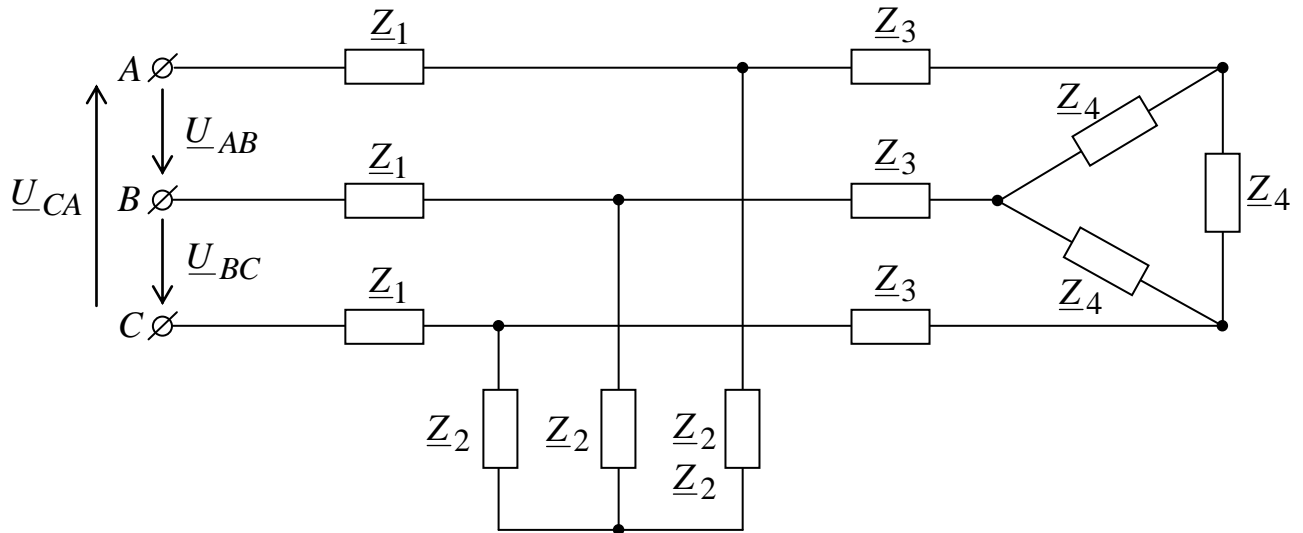


Рис. 7.12. Смешанное соединение симметричной нагрузки

Заданы линейные напряжения  $U_{AB} = U_{BC} = U_{CA}$ . В симметричной цепи режимы работы разных фаз отличаются только начальными фазами. При этом, отличие всех величин одной фазы от соответствующих другой одинаково. Это позволяет рассчитывать режим всей цепи по параметрам режима одной из фаз, составив для нее эквивалентную схему.

Для получения эквивалентной схемы в рассматриваемом примере целесообразно заменить треугольник сопротивлений  $Z_4$  эквивалентной «звездой» сопротивлений  $Z_4$ , используя ранее выведенные формулы (см. 1.15). Вследствие равенства сопротивлений сторон треугольника сопротивлениям лучей звезды будут одинаковы. Поэтому можно использовать любую из формул пересчета, например, для первого луча:

$$\underline{Z}_Y = \frac{\underline{Z}_{12} \cdot \underline{Z}_{31}}{\underline{Z}_{12} + \underline{Z}_{23} + \underline{Z}_{31}} = \left| \begin{array}{l} \underline{Z}_{12} = \underline{Z}_{21} \\ \underline{Z}_{31} = \underline{Z}_4 \end{array} \right| = \frac{\underline{Z}_4^2}{3\underline{Z}_4} = \frac{\underline{Z}_4}{3}.$$

Схема цепи после эквивалентной замены будет иметь вид, показанный на рис. 7.13.

В симметричной цепи все нейтральные (нулевые) точки имеют одинаковый потенциал. Поэтому точки  $n_1, n_2$  можно соединить проводом, не нарушая этим режим работы цепи (на схеме – пунктирная линия). Очевидно, относительно потенциала этих точек определяются фазные напряжения  $U_A, U_B, U_C$ , величина которых в  $\sqrt{3}$  раз меньше заданных линейных.

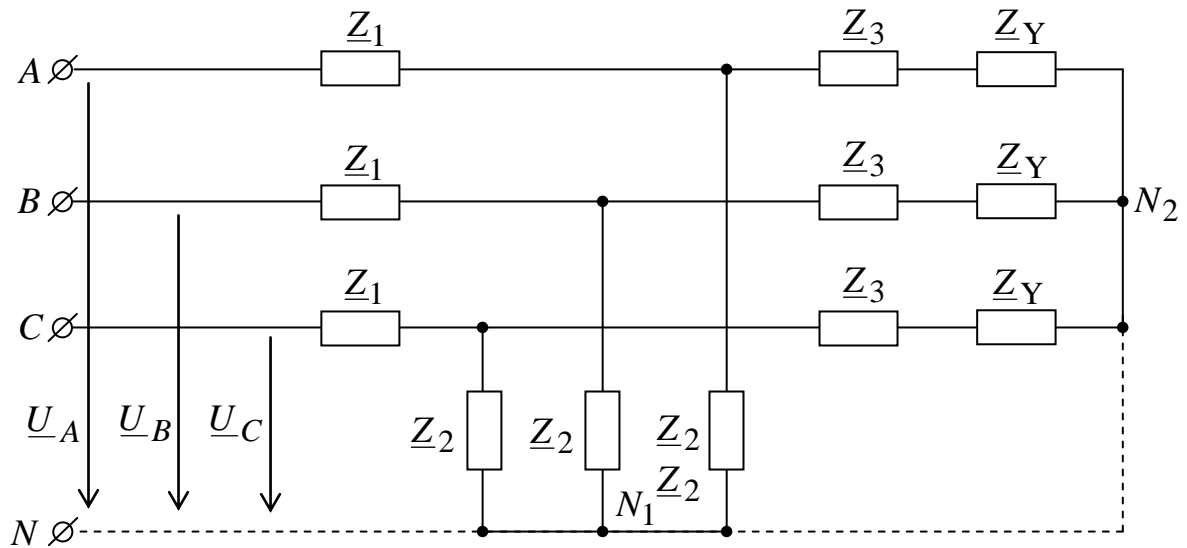


Рис. 7.13. Схема цепи после преобразования

В симметричной цепи сопротивления всех фаз одинаковы; одинаковы и сопротивления в соответствующих группах. Поэтому выделим из цепи какую-либо одну фазу, отбросив все другие. В качестве примера на рис. 7.14 изображена схема фазы  $A$ .

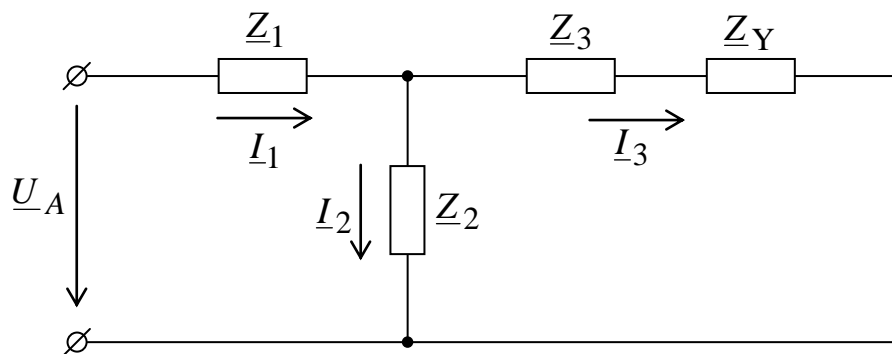


Рис. 7.14. Расчетная схема фазы  $A$

Токи в этой схеме могут быть легко рассчитаны, например, методом преобразования. В каждом из элементов любой из групп ток сдвинут по фазе относительно токов в других элементах той же группы на равные углы  $\pm 2\pi/3$ .

При переходе от токов эквивалентной звезды сопротивлений к фазным токам исходного треугольника следует иметь в виду, что при расчете однофазной схемы будет рассчитан ток  $I_3$ , являющийся линейным током треугольника сопротивлений исходной схемы. В этом случае ток в фазах треугольника будет в  $\sqrt{3}$  раз меньше линейного тока.

#### 7.4. Расчет несимметричных режимов трехфазных цепей с нагрузкой статического характера

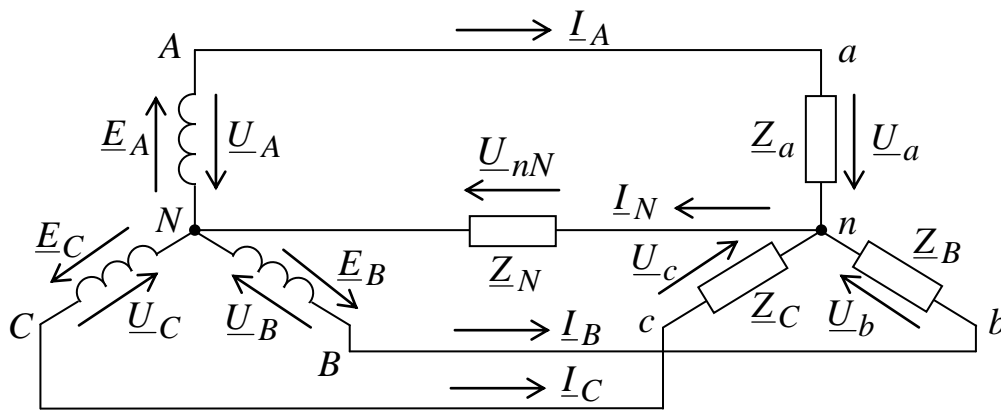


Рис. 7.15. Расчетная схема несимметричной нагрузки

Трехфазные электрические двигатели при конструктивной симметрии магнитной цепи и симметричной системе напряжения питания можно заменять эквивалентными схемами, состоящими из трех одинаковых сопротивлений, соединяемых «звездой» или «треугольником». При несимметрии напряжения питания, а также при конструктивной несимметрии машины такая эквивалентная замена оказывается недопустимой вследствие возникающего влияния режима работы (например, частоты вращения) на величину составляющих комплексного сопротивления отдельных фаз. Поэтому несимметричные режимы трехфазных цепей приходится рассчитывать иными методами, среди которых большое развитие получил метод симметричных составляющих, который будет рассмотрен позднее. Сейчас будем рассматривать несимметричный режим цепей при условии так называемой статической нагрузки, т.е. такой нагрузки, когда сопротивления фаз различны, но независимы от протекающего тока и не влияют друг на друга. Кроме того, не будем учитывать падения напряжения на внутренних сопротивлениях фаз источника. Пусть известна симметричная система фазных напряжений источника  $\underline{U}_A$ ,  $\underline{U}_B$ ,  $\underline{U}_C$ . Неучет падений напряжения на внутренних сопротивлениях фаз источника позволяет заданные напряжения приписать ЭДС самого источника, т.е. положить  $\underline{U}_A = \underline{E}_A$ ,  $\underline{U}_B = \underline{E}_B$ ,  $\underline{U}_C = \underline{E}_C$ . В этой схеме два узла, поэтому для определения напряжения между нулевыми точками приемника и источника можно применить метод двух узлов. Положив  $\varphi_N = 0$ , будем иметь

$$\varphi_n = \underline{U}_{nN} = \frac{\underline{Y}_a \underline{U}_A + \underline{Y}_b \underline{U}_B + \underline{Y}_c \underline{U}_C}{\underline{Y}_a + \underline{Y}_b + \underline{Y}_c + \underline{Y}_N}, \quad (7.8)$$

где  $\underline{Y}_a = 1/\underline{Z}_a$ ,  $\underline{Y}_b = 1/\underline{Z}_b$ ,  $\underline{Y}_c = 1/\underline{Z}_c$ ,  $\underline{Y}_N = 1/\underline{Z}_N$  – проводимости ветвей, присоединенных к узлу  $n$ .

Зная напряжение  $\underline{U}_{nN}$  между нейтральными точками и учитывая равенство  $\varphi_N = 0$ , можно найти токи в линиях по закону Ома:

$$\begin{aligned} \underline{I}_A &= \frac{-(\underline{\varphi}_n - \underline{\varphi}_N) + \underline{U}_A}{\underline{Z}_a} = (\underline{U}_A - \underline{\varphi}_n) \underline{Y}_a = (\underline{U}_A - \underline{U}_{nN}) \underline{Y}_a, \\ \underline{I}_B &= \frac{-\underline{\varphi}_n + \underline{U}_B}{\underline{Z}_b} = (\underline{U}_B - \underline{U}_{nN}) \underline{Y}_b, \\ \underline{I}_C &= \frac{-\underline{\varphi}_n + \underline{U}_C}{\underline{Z}_c} = (\underline{U}_C - \underline{U}_{nN}) \underline{Y}_c, \\ \underline{I}_N &= \frac{\underline{U}_{nN}}{\underline{Z}_N} = \underline{U}_{nN} \underline{Y}_N, \end{aligned}$$

Векторная и топографическая диаграмма напряжений, соответствующая одному из возможных несимметричных режимов, изображена на рис.7.16.

Интерес представляют два предельных случая.

Случай 1. Нулевые точки источника и приемника соединены толстым медным проводом, а расстояние между ними настолько мало, что можно считать  $Z_N = 0$  ( $Y_N = \infty$ ).

В этом случае  $\underline{U}_{nN} = 0$  и, следовательно, напряжения на фазах приемника равны фазным напряжениям источника питания ( $\underline{U}_A = \underline{U}_a$ ,  $\underline{U}_B = \underline{U}_b$ ,  $\underline{U}_C = \underline{U}_c$ ). Ток в каждой фазе может быть рассчитан по закону Ома независимо от токов других фаз. (Расчет становится похожим на расчет токов в симметричной системе, однако его необходимо выполнять для всех трех фаз, а не для одной.)

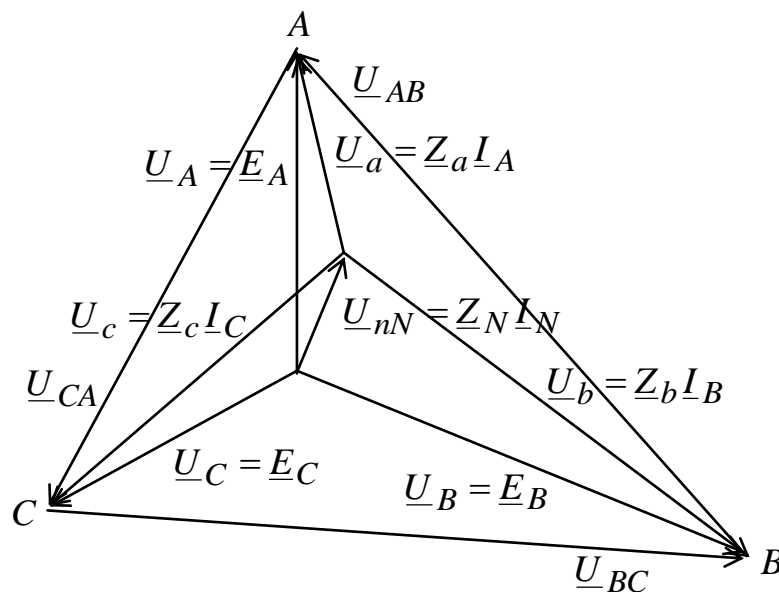
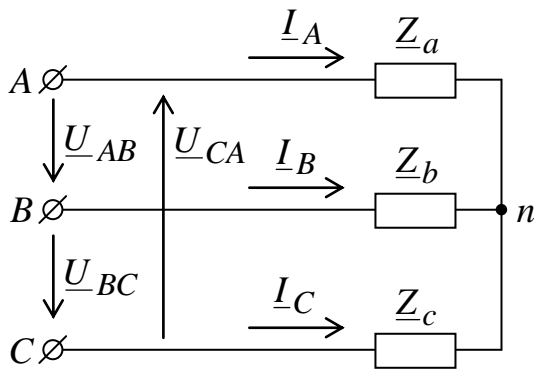


Рис. 7.16. Векторная диаграмма напряжений

Случай 2. Нейтральный провод отсутствует  $Z_N = \infty$  ( $Y_N = 0$ ). При этом

$$\underline{U}_{nN} = \frac{\underline{Y}_a \underline{U}_A + \underline{Y}_b \underline{U}_B + \underline{Y}_c \underline{U}_C}{\underline{Y}_a + \underline{Y}_b + \underline{Y}_c},$$

и расчет можно выполнять по изложенной методике, если заданными являются фазные напряжения. Однако чаще задаются не фазные, а линейные напряжения  $\underline{U}_{AB}$ ,  $\underline{U}_{BC}$ ,  $\underline{U}_{CA}$  (рис. 7.17). В этом случае приходится идти другим путем.



Обозначим напряжения на фазах нагрузки:

$$\underline{U}_a = \underline{U}_{An} = \underline{Z}_a \underline{I}_A;$$

$$\underline{U}_b = \underline{U}_{Bn} = \underline{Z}_b \underline{I}_B;$$

$$\underline{U}_c = \underline{U}_{Cn} = \underline{Z}_c \underline{I}_C.$$

Отсюда

$$\underline{I}_A = \underline{Y}_a \underline{U}_a;$$

$$\underline{I}_B = \underline{Y}_b \underline{U}_b;$$

$$\underline{I}_C = \underline{Y}_c \underline{U}_c.$$

Рис. 7.17. Расчетная схема

В соответствии с первым законом Кирхгофа  $\underline{I}_A + \underline{I}_B + \underline{I}_C = 0$ .

Подставив сюда значения токов, будем иметь:  
 $\underline{Y}_a \underline{U}_a + \underline{Y}_b \underline{U}_b + \underline{Y}_c \underline{U}_c = 0$ .

Из рассмотрения контуров  $AnB$  и  $AnC$  имеем два контурных уравнения

$$\underline{U}_{AB} = \underline{Z}_a \underline{I}_A - \underline{Z}_b \underline{I}_B = \underline{U}_a - \underline{U}_b;$$

$$\underline{U}_{CA} = \underline{Z}_c \underline{I}_C - \underline{Z}_a \underline{I}_A = \underline{U}_c - \underline{U}_a.$$

Отсюда

$$\underline{U}_b = \underline{U}_a - \underline{U}_{AB};$$

$$\underline{U}_c = \underline{U}_a + \underline{U}_{CA}.$$

Подставив в узловое уравнение, получим

$$\underline{Y}_a \underline{U}_a + \underline{Y}_b (\underline{U}_a - \underline{U}_{AB}) + \underline{Y}_c (\underline{U}_a + \underline{U}_{CA}) = 0,$$

или

$$(\underline{Y}_a + \underline{Y}_b + \underline{Y}_c) \underline{U}_a = \underline{Y}_b \underline{U}_{AB} - \underline{Y}_c \underline{U}_{CA}.$$

Тогда фазное напряжение  $\underline{U}_a$  будет равно

$$\underline{U}_a = \frac{\underline{Y}_b \underline{U}_{AB} - \underline{Y}_c \underline{U}_{CA}}{\underline{Y}_a + \underline{Y}_b + \underline{Y}_c}.$$

Рассматривая другие контуры и составляя для них уравнения, после аналогичных преобразований получим

$$\underline{U}_b = \frac{\underline{Y}_c \underline{U}_{BC} - \underline{Y}_a \underline{U}_{AB}}{\underline{Y}_a + \underline{Y}_b + \underline{Y}_c}; \quad \underline{U}_c = \frac{\underline{Y}_a \underline{U}_{CA} - \underline{Y}_b \underline{U}_{BC}}{\underline{Y}_a + \underline{Y}_b + \underline{Y}_c}.$$



Зная фазные напряжения и нагрузки фаз, находим токи

$$\underline{I}_a = \frac{\underline{U}_a}{\underline{Z}_a}; \quad \underline{I}_b = \frac{\underline{U}_b}{\underline{Z}_b}; \quad \underline{I}_c = \frac{\underline{U}_c}{\underline{Z}_c}.$$

Рассмотрим расчет несимметричной нагрузки, соединенной «треугольником»  $\underline{Z}_{ab} \neq \underline{Z}_{bc} \neq \underline{Z}_{ca}$  (рис. 7.18).

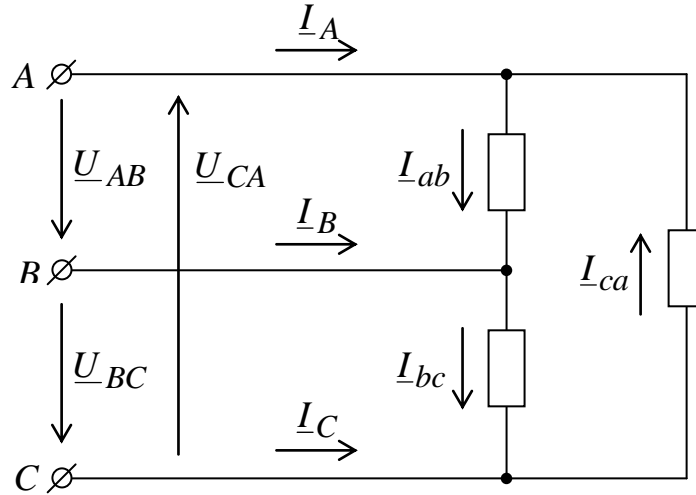


Рис. 7.18. Схема для расчета несимметричной нагрузки

Обычно задаются линейные напряжения  $\underline{U}_{AB}$ ,  $\underline{U}_{BC}$ ,  $\underline{U}_{CA}$ .

Фазные токи будут равны

$$\underline{I}_{ab} = \frac{\underline{U}_{AB}}{\underline{Z}_{ab}}; \quad \underline{I}_{bc} = \frac{\underline{U}_{BC}}{\underline{Z}_{bc}}; \quad \underline{I}_{ca} = \frac{\underline{U}_{CA}}{\underline{Z}_{ca}}.$$

Линейные токи определяются из выражений

$$\underline{I}_A = \underline{I}_{ab} - \underline{I}_{ca} = \frac{\underline{U}_{AB}}{\underline{Z}_{ab}} - \frac{\underline{U}_{CA}}{\underline{Z}_{ca}};$$

$$\underline{I}_B = \underline{I}_{bc} - \underline{I}_{ab} = \frac{\underline{U}_{BC}}{\underline{Z}_{bc}} - \frac{\underline{U}_{AB}}{\underline{Z}_{ab}};$$

$$\underline{I}_C = \underline{I}_{ca} - \underline{I}_{bc} = \frac{\underline{U}_{CA}}{\underline{Z}_{ca}} - \frac{\underline{U}_{BC}}{\underline{Z}_{bc}}.$$

## ЛЕКЦИЯ №14

## 7.3.3. Мощность в симметричной трехфазной системе

Мощность трехфазного приемника можно определить как сумму мощностей отдельных фаз.

Для соединения «звездой»

$$\begin{aligned} \underline{S} &= \underline{U}_a \underline{I}_a + \underline{U}_b \underline{I}_b + \underline{U}_c \underline{I}_c = \\ &= U_a I_a e^{j(\psi_{u_a} - \psi_{i_a})} + U_b I_b e^{j(\psi_{u_b} - \psi_{i_b})} + U_c I_c e^{j(\psi_{u_c} - \psi_{i_c})}. \end{aligned}$$

Для соединения «треугольником»

$$\begin{aligned} \underline{S} &= \underline{U}_{ab} \underline{I}_{ab} + \underline{U}_{bc} \underline{I}_{bc} + \underline{U}_{ca} \underline{I}_{ca} = \\ &= U_{ab} I_{ab} e^{j(\psi_{u_{ab}} - \psi_{i_{ab}})} + U_{bc} I_{bc} e^{j(\psi_{u_{bc}} - \psi_{i_{bc}})} + U_{ca} I_{ca} e^{j(\psi_{u_{ca}} - \psi_{i_{ca}})}. \end{aligned}$$

Так как в симметричной трехфазной системе фазные напряжения, токи и углы сдвига фаз равны между собой, то мощность будет равна

$$\underline{S} = 3U_{\phi} I_{\phi} e^{j\varphi}.$$

Принимая во внимание, что при соединении ветвей приемника «звездой»  $U_{\text{л}} = \sqrt{3}U_{\phi}$ ;  $I_{\text{л}} = I_{\phi}$ , а при соединении «треугольником»  $U_{\text{л}} = U_{\phi}$ ;  $I_{\text{л}} = \sqrt{3}I_{\phi}$ , мощность в обоих случаях будет выражаться одной и той же формулой

$$\underline{S} = 3U_{\phi} I_{\phi} e^{j\varphi} = 3 \frac{U_{\text{л}} I_{\text{л}} e^{j\varphi}}{\sqrt{3}} = \sqrt{3} U_{\text{л}} I_{\text{л}} e^{j\varphi}.$$

При этом модуль полной мощности, активная и реактивная мощности запишутся как

$$\begin{aligned} S &= \sqrt{3} U_{\text{л}} I_{\text{л}}; \\ P &= \sqrt{3} U_{\text{л}} I_{\text{л}} \cos \varphi; \\ Q &= \sqrt{3} U_{\text{л}} I_{\text{л}} \sin \varphi. \end{aligned}$$

Нельзя забывать, что в этих выражениях угол  $\varphi$  является углом сдвига фаз между фазными токами и напряжениями.

Мгновенное значение мощности симметричной трехфазной системы постоянно во времени. Докажем это на примере соединения «звездой».

Пусть в трехфазной системе существуют следующие токи и напряжения:

$$u_A = \sqrt{2} U_{\phi} \sin \omega t;$$

$$\begin{aligned}
 u_B &= \sqrt{2}U_\phi \sin(\omega t - 2\pi/3); \\
 u_C &= \sqrt{2}U_\phi \sin(\omega t + 2\pi/3); \\
 i_A &= \sqrt{2}I_\phi \sin(\omega t - \varphi); \\
 i_B &= \sqrt{2}I_\phi \sin(\omega t - \varphi - 2\pi/3); \\
 i_C &= \sqrt{2}I_\phi \sin(\omega t - \varphi + 2\pi/3).
 \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned}
 p_a &= u_a \cdot i_a = 2U_\phi I_\phi \sin \omega t \cdot \sin(\omega t - \varphi) = \\
 &= U_\delta I_\delta \cos \varphi - U_\delta I_\delta \cos(2\omega t - \varphi); \\
 p_b &= u_b \cdot i_b = 2U_\phi I_\phi \sin(\omega t - 2\pi/3) \cdot \sin(\omega t - \varphi - 2\pi/3) = \\
 &= U_\delta I_\delta \cos \varphi - U_\delta I_\delta \cos(2\omega t - \varphi - 2\pi/3); \\
 p_c &= u_c \cdot i_c = 2U_\phi I_\phi \sin(\omega t + 2\pi/3) \cdot \sin(\omega t - \varphi - 4\pi/3) = \\
 &= U_\delta I_\delta \cos \varphi - U_\delta I_\delta \cos(2\omega t - \varphi - 4\pi/3); \\
 p &= p_a + p_b + p_c = 3U_\phi I_\phi \cos \varphi - U_\phi I_\phi [\cos(2\omega t - \varphi) + \\
 &+ \cos(2\omega t - \varphi - 2\pi/3) + \cos(2\omega t - \varphi - 4\pi/3)] = 3U_\phi I_\phi \cos \varphi.
 \end{aligned}$$

Сумма переменных гармонических составляющих двойной частоты, заключенных в скобки, равна нулю. Поэтому мгновенная мощность в симметричной системе  $p = 3U_\phi I_\phi \cos \varphi = P$  является величиной постоянной, независимой от времени.

Подобные многофазные системы называются уравновешенными. Применение уравновешенных систем благотворно сказывается на работе электрических машин, так как при этом значение мгновенного момента на их валу остается постоянным.

### 7.5. Мощность в трехфазных цепях

Мощность трехфазного приемника можно определить как сумму мощностей отдельных фаз:

$$\overset{*}{S} = \overset{*}{U}_A \overset{*}{I}_A + \overset{*}{U}_B \overset{*}{I}_B + \overset{*}{U}_C \overset{*}{I}_C,$$

где  $\overset{*}{U}_A, \overset{*}{U}_B, \overset{*}{U}_C$  – комплексы действующих значений напряжений фаз,

$\overset{*}{I}_A, \overset{*}{I}_B, \overset{*}{I}_C$  – сопряженные комплексы фазных токов.

Раскрыв правую часть равенства, будем иметь

$$\underline{S} = U_A I_A \cos \varphi_A + U_B I_B \cos \varphi_B + U_C I_C \cos \varphi_C + \\ + j(U_A I_A \sin \varphi_A + U_B I_B \sin \varphi_B + U_C I_C \sin \varphi_C).$$

Вещественная часть этого выражения представляет собой активную мощность, мнимая – реактивную:

$$P = U_A I_A \cos \varphi_A + U_B I_B \cos \varphi_B + U_C I_C \cos \varphi_C = \sum_{k=1}^3 P_k,$$

$$Q = U_A I_A \sin \varphi_A + U_B I_B \sin \varphi_B + U_C I_C \sin \varphi_C = \sum_{k=1}^3 Q_k.$$

Следовательно,

$$\underline{S} = P + jQ = \sum_{k=1}^3 P_k + j \sum_{k=1}^3 Q_k.$$

Измерение мощности в симметричной трехфазной системе может быть выполнено посредством одного ваттметра, включаемого в любую фазу.

При этом токовая обмотка ваттметра включается в рассечку линейного провода, а обмотка напряжения – к нулевой точке (рис. 7.19). Если же нейтральная точка недоступна, то создается искусственная нейтральная точка путем включения трех одинаковых сопротивлений «звездой» (рис. 7.20).

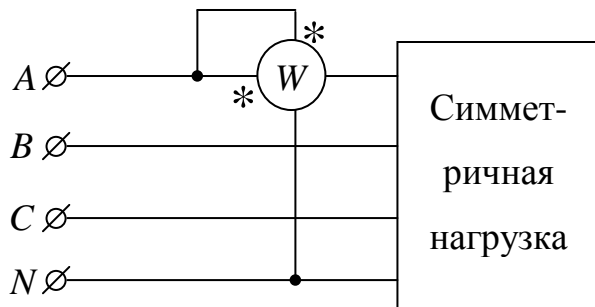


Рис. 7.19. Измерение мощности одним ваттметром

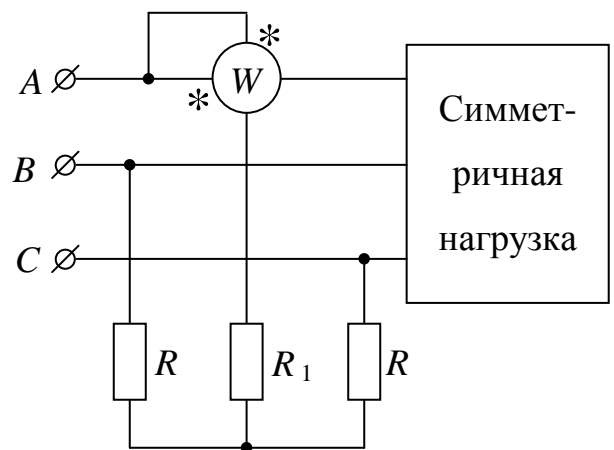


Рис. 7.20. Измерение мощности одним ваттметром в трехпроводной цепи

В этом случае следует учитывать, что в состав сопротивления должно входить сопротивление обмотки напряжения ваттметра. Иначе говоря, должно соблюдаться равенство  $R_1 + R_B = R$ . Общая мощность будет равна утроенной мощности, измеряемой одним ваттметром.

Измерение мощности в несимметричных трехфазных цепях может быть выполнено двумя методами в зависимости от наличия или отсутствия нулевого провода.

### 1. Метод трех ваттметров.

В четырехпроводной системе, т.е. при наличии нулевого провода, используется схема, показанная на рис. 7.21.

Его также можно применять и в трехпроводной несимметричной системе при условии создания искусственной нулевой точки (рис. 7.22). При этом в случае одинаковых ваттметров, сопротивления  $R$  должны быть одинаковыми. Общая мощность цепи будет равна сумме мощностей, измеряемых каждым прибором.

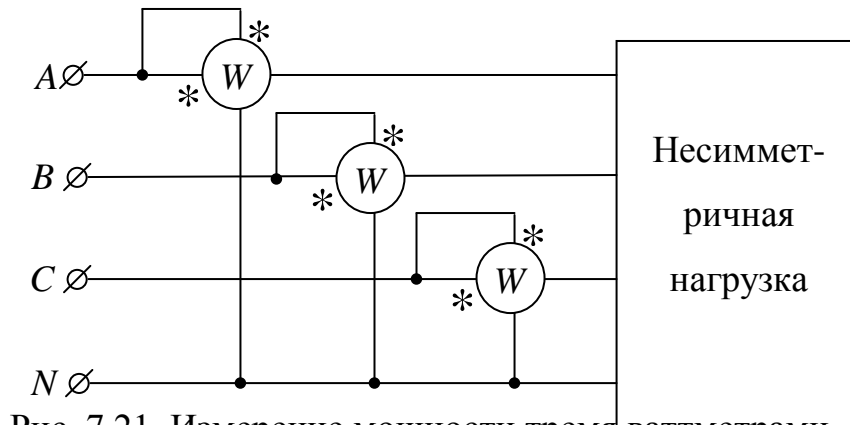


Рис. 7.21. Измерение мощности тремя ваттметрами в четырехпроводной цепи

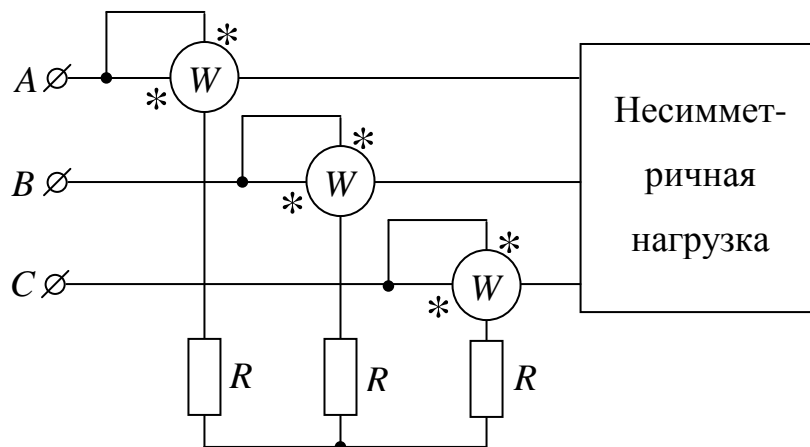


Рис. 7.22. Измерение мощности тремя ваттметрами в трехпроводной цепи

### 2. Метод двух ваттметров.

Этот метод используется в трехпроводных цепях. Вывод о возможности использования двух ваттметров можно получить из следующих

соображений: полная мощность определяется равенством

$$\underline{S} = \underline{U}_A \underline{I}_A + \underline{U}_B \underline{I}_B + \underline{U}_C \underline{I}_C.$$

Из выражения первого закона Кирхгофа, составленного для узла  $n$ , можно выразить любой ток через два других. Для схемы, представленной на

рис. 7.23, целесообразно выразить ток фазы  $C$   $\underline{I}_C = -\underline{I}_A - \underline{I}_B$ .

Подставив его в исходное равенство, получим

$$\begin{aligned} \underline{S} &= \underline{U}_A \underline{I}_A + \underline{U}_B \underline{I}_B - \underline{U}_C \underline{I}_A - \underline{U}_C \underline{I}_B = (\underline{U}_A - \underline{U}_C) \underline{I}_A + (\underline{U}_B - \underline{U}_C) \underline{I}_B = \\ &= \underline{U}_{AC} \underline{I}_A + \underline{U}_{BC} \underline{I}_B. \end{aligned}$$

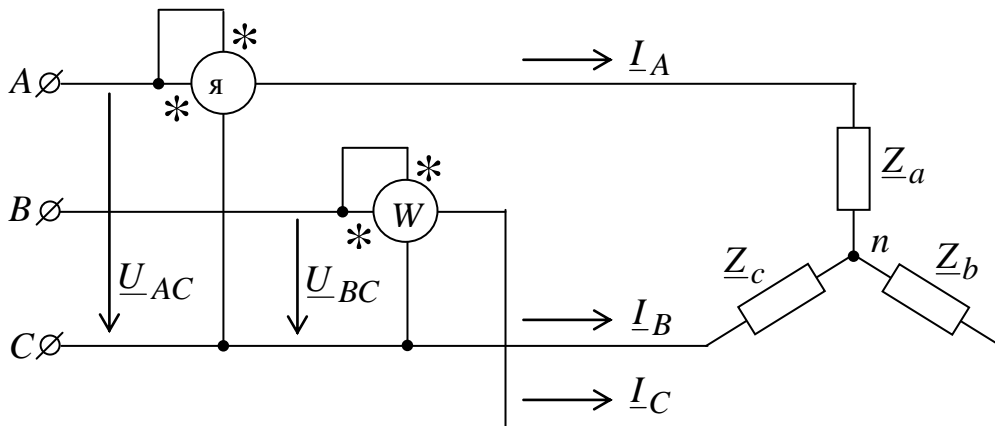


Рис. 7.23. Измерение мощности двух ваттметрами

В частном случае, возможно, что показания одного ваттметра могут быть отрицательными. Поэтому можно говорить об алгебраической сумме показаний ваттметров.

## 7.9. Симметричные составляющие несимметричных трехфазных систем

В границах линейных соотношений в электрических цепях любую несимметричную систему: напряжений, ЭДС, токов, магнитных потоков и т.д. можно представить тремя симметричными системами: прямой, обратной и нулевой последовательностями чередования фаз. Такое представление позволяет задачу анализа несимметричного режима работы цепи в условиях влияния сопротивлений фаз друг на друга, когда неприменим принцип взаимности, свести к рассмотрению, в общем случае, трех более простых симметричных режимов, определяемых каждой симметричной составляющей; характеристики несимметричного режима определяются суммированием соответствующих характеристик симметричных.

Основные положения метода представления несимметричной системы симметричными составляющими рассмотрим на примере несимметричной системы фазных напряжений (рис. 7.28).

В соответствии с этим методом векторы симметричных составляющих будут записаны в виде следующих векторов:

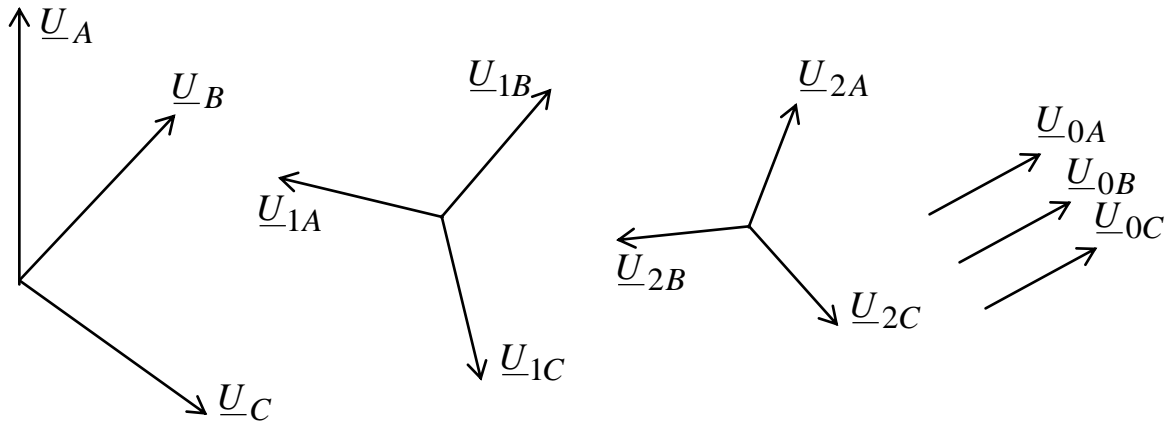


Рис. 7.28. Несимметричная трехфазная система векторов и ее разложение на симметричные составляющие

1) векторы, составляющие прямую последовательность чередования фаз

$$\underline{U}_{1A}, \underline{U}_{1B} = \underline{U}_{1A} e^{-j2\pi/3}, \underline{U}_{1C} = \underline{U}_{1A} e^{-j4\pi/3} = \underline{U}_{1A} e^{j2\pi/3};$$

2) векторы, составляющие обратную последовательность чередования фаз

$$\underline{U}_{2A}, \underline{U}_{2B} = \underline{U}_{2A} e^{j2\pi/3}, \underline{U}_{2C} = \underline{U}_{2A} e^{j4\pi/3} = \underline{U}_{2A} e^{-j2\pi/3};$$

3) векторы, составляющие нулевую последовательность чередования фаз

$$\underline{U}_{0A} = \underline{U}_{0B} = \underline{U}_{0C}.$$

Фазовый множитель  $e^{j2\pi/3}$  называется оператором поворота и обозначается буквой  $a$ :

$$a = e^{j2\pi/3} = \cos 2\pi/3 + j \sin 2\pi/3 = -1/2 + j\sqrt{3}/2.$$

Умножение любого вектора на оператор поворота соответствует повороту этого вектора на  $120^\circ$  против часовой стрелки

$$\underline{U} \cdot a = U \cdot e^{j\psi_U} \cdot e^{j2\pi/3} = U \cdot e^{j(\psi_U + 2\pi/3)}.$$

Если возвести оператор поворота в квадрат, то получим

$$a^2 = e^{j2\pi/3} \cdot e^{j2\pi/3} = e^{j4\pi/3} = e^{-j2\pi/3} = \cos 2\pi/3 - j \sin 2\pi/3 = -1/2 - j\sqrt{3}/2.$$

Отсюда следует, что умножение вектора на  $a^2$  соответствует его повороту на  $120^\circ$  по часовой стрелке.

Можно показать, что

$$a^3 = e^{j2\pi} = 1; \quad a^4 = a^3 \cdot a = a; \quad a^5 = a^3 \cdot a^2 \text{ и т.д.}$$

Величины  $1$ ,  $a$ ,  $a^2$  образуют симметричную систему единичных векторов. Их сумма будет равна

$$1 + a + a^2 = 1 - 1/2 + j\sqrt{3}/2 - 1/2 - j\sqrt{3}/2 = 0,$$

а разность операторов поворота

$$a - a^2 = -1/2 + j\sqrt{3}/2 + 1/2 + j\sqrt{3}/2 = j\sqrt{3}.$$

С учетом введенного понятия о фазовом множителе и связанных с ним соотношений векторы прямой обратной и нулевой последовательностей фаз запишутся:

$$\text{прямая последовательность} \quad - \underline{U}_{1A}, \quad \underline{U}_{1B} = a^2 \cdot \underline{U}_{1A}, \quad \underline{U}_{1C} = a \cdot \underline{U}_{1A};$$

$$\text{обратная последовательность} \quad - \underline{U}_{2A}, \quad \underline{U}_{2B} = a \cdot \underline{U}_{2A}, \quad \underline{U}_{2C} = a^2 \cdot \underline{U}_{2A};$$

$$\text{нулевая последовательность} \quad - \underline{U}_{0A} = \underline{U}_{0B} = \underline{U}_{0C}.$$

Векторы исходной несимметричной системы представляются в виде геометрической суммы векторов симметричных составляющих:

$$\underline{U}_A = \underline{U}_{1A} + \underline{U}_{2A} + \underline{U}_{0A};$$

$$\underline{U}_B = \underline{U}_{1B} + \underline{U}_{2B} + \underline{U}_{0B} = a^2 \cdot \underline{U}_{1A} + a \cdot \underline{U}_{2A} + \underline{U}_{0A};$$

$$\underline{U}_C = \underline{U}_{1C} + \underline{U}_{2C} + \underline{U}_{0C} = a \cdot \underline{U}_{1A} + a^2 \cdot \underline{U}_{2A} + \underline{U}_{0A}.$$

Если для упрощения опустить индекс  $A$  в правой части, то получим

$$\underline{U}_A = \underline{U}_1 + \underline{U}_2 + \underline{U}_0;$$

$$\underline{U}_B = a^2 \cdot \underline{U}_1 + a \cdot \underline{U}_2 + \underline{U}_0; \quad (7.9)$$

$$\underline{U}_C = a \cdot \underline{U}_1 + a^2 \cdot \underline{U}_2 + \underline{U}_0.$$

Здесь  $\underline{U}_1$ ,  $\underline{U}_2$ ,  $\underline{U}_0$  – векторы напряжений прямой, обратной и нулевой последовательностей фазы  $A$ . Их называют опорными векторами симметричных составляющих. Если решить последнюю систему уравнений относительно неизвестных опорных векторов при известных фазных напряжениях исходной несимметричной системы, то получим



$$\begin{aligned}\underline{U}_1 &= (\underline{U}_A + a \cdot \underline{U}_B + a^2 \cdot \underline{U}_C) / 3; \\ \underline{U}_2 &= (\underline{U}_A + a^2 \cdot \underline{U}_B + a \cdot \underline{U}_C) / 3; \\ \underline{U}_0 &= (\underline{U}_A + \underline{U}_B + \underline{U}_C) / 3.\end{aligned}\quad (7.10)$$

Выражения (7.9) и (7.10) позволяют решить задачу определения векторов несимметричной системы по известным симметричным составляющим и наоборот – по известным векторам исходной системы находить опорные векторы симметричных составляющих.

### 7.10. Основные свойства трехфазных цепей в отношении симметричных составляющих

1. Симметричные системы линейных и фазных токов и напряжений содержат составляющие только прямой последовательности.

2. Ток в нейтральном проводе равен утроенному значению тока нулевой последовательности:

$$\begin{aligned}\underline{I}_N &= \underline{I}_A + \underline{I}_B + \underline{I}_C; \\ \underline{I}_0 &= (\underline{I}_A + \underline{I}_B + \underline{I}_C) / 3,\end{aligned}$$

следовательно,  $\underline{I}_N = 3\underline{I}_0$ .

3. В трехпроводной системе отсутствуют линейные токи нулевой последовательности:

$$3\underline{I}_0 = \underline{I}_A + \underline{I}_B + \underline{I}_C = 0.$$

4. Система линейных напряжений не содержит составляющей нулевой последовательности, так как сумма линейных напряжений всегда равна нулю. Степень несимметрии линейных напряжений оценивается коэффициентом несимметрии  $\varepsilon$ , представляющим отношение составляющей обратной последовательности к составляющей прямой  $\varepsilon = U_2 / U_1$ .

5. Фазные напряжения симметричного приемника, соединенного «звездой», при несимметричных линейных напряжениях не содержат составляющих нулевой последовательности. Как было показано ранее

$$\underline{U}_a = \frac{\underline{Y}_b \underline{U}_{AB} - \underline{Y}_c \underline{U}_{CA}}{\underline{Y}_a + \underline{Y}_b + \underline{Y}_c}; \quad \underline{U}_b = \frac{\underline{Y}_c \underline{U}_{CA} - \underline{Y}_a \underline{U}_{AB}}{\underline{Y}_a + \underline{Y}_b + \underline{Y}_c}; \quad \underline{U}_c = \frac{\underline{Y}_a \underline{U}_{CA} - \underline{Y}_b \underline{U}_{BC}}{\underline{Y}_a + \underline{Y}_b + \underline{Y}_c}.$$

При  $\underline{Y}_a = \underline{Y}_b = \underline{Y}_c = \underline{Y}$

$$\underline{U}_a = \frac{\underline{U}_{AB} - \underline{U}_{CA}}{3}; \quad \underline{U}_b = \frac{\underline{U}_{CA} - \underline{U}_{AB}}{3}; \quad \underline{U}_c = \frac{\underline{U}_{CA} - \underline{U}_{BC}}{3}.$$

Тогда  $3\underline{U}_0 = \underline{U}_A + \underline{U}_B + \underline{U}_C = 0$ .

6. Симметричные составляющие нулевой последовательности фазных напряжений несимметричного приемника при несимметрии линейных

напряжений равны напряжению  $\underline{U}_{nN}$  между нейтральными точками  $N$  и  $n$  симметричного и несимметричного приемников.

### **Самостоятельная работа**

Трёхфазные цепи при статической и динамической нагрузках.  
[Л 9.1.3, с. 169–182]

## ЛЕКЦИЯ №15

### 8. НЕСИНУСОИДАЛЬНЫЕ ТОКИ

#### 8.1. Несинусоидальные ЭДС, напряжения и токи

До сих пор рассматривались линейные цепи при действии постоянных или синусоидальных источников. На практике ЭДС, напряжения и токи в той или иной степени отличаются от постоянных или синусоидальных, причем зависимость от времени может быть периодической, почти периодической и непериодической.

В машинных генераторах искажения формы кривой возникают из-за несинусоидального распределения магнитной индукции вдоль воздушного зазора. В цепях с нелинейными элементами (электрическая дуга, катушка со стальным сердечником, вентили) даже при синусоидальных ЭДС возникают несинусоидальные напряжения и токи. В различных областях радиотехники, автоматики и т.д. применяются статические генераторы, вырабатывающие импульсы пилообразной, ступенчатой и прямоугольной формы. Все перечисленные сигналы относятся к периодическим токам.

Если сложить несколько синусоидальных сигналов разной частоты, то получим непериодический сигнал, который имеет периодическую огибающую, и свойства такого сигнала близки к свойствам периодических сигналов. Поэтому подобные сигналы называются почти периодическими.

При передаче последовательности импульсов или в случае помех и шумов приходится иметь дело с непериодическими сигналами.

Во всех задачах со сложными несинусоидальными кривыми необходимо свести сложную задачу к более простой и применить методы расчета простых цепей.

Всякая периодическая функция  $f(\omega t)$ , удовлетворяющая условиям Дирихле, т.е. имеющая на всяком конечном интервале конечное число разрывов первого рода и конечное число максимумов и минимумов, может быть разложена в тригонометрический ряд:

$$\begin{aligned} f(\omega t) &= A_0 + A_{1m} \sin(\omega t + \psi_1) + A_{2m} \sin(2\omega t + \psi_2) + \dots = \\ &= A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_{km} \sin(k\omega t + \psi_k). \end{aligned} \quad (8.1)$$

Первый член ряда  $A_0$  называется постоянной составляющей или нулевой гармоникой, второй член  $A_{1m}\sin(\omega t + \psi_1)$  – основной или первой гармоникой, а остальные члены вида  $A_{km}\sin(k\omega t + \psi_k)$  при  $k > 1$  носят название высших гармоник;  $\omega = 2\pi/T$  – основная угловая частота;  $T$  – период несинусоидальной периодической функции.

После раскрытия синуса суммы это выражение запишется как

$$f(\omega t) = A_0 + B_{1m}\sin\omega t + \dots + B_{km}\sin k\omega t + C_{1m}\cos\omega t + \dots + C_{km}\cos k\omega t = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (B_{km}\sin k\omega t + C_{km}\cos k\omega t). \quad (8.2)$$

Здесь  $B_{km} = A_{km}\cos\psi_k$ ;  $C_{km} = A_{km}\sin\psi_k$ .

Коэффициенты  $A_0$ ,  $B_{km}$ ,  $C_{km}$  могут быть вычислены при помощи следующих интегралов:

$$A_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\omega t) d(\omega t);$$

$$B_{km} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\omega t) \sin k\omega t \cdot d(\omega t); \quad (8.3)$$

$$C_{km} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\omega t) \cos k\omega t \cdot d(\omega t).$$

Постоянная составляющая равна среднему значению функции за период.

Введя условно отрицательные частоты, исходную функцию можно записать в более компактном виде:

$$f(\omega t) = \frac{1}{2} \sum_{-\infty}^{\infty} (B_{km}\sin k\omega t + C_{km}\cos k\omega t). \quad (8.4)$$

Постоянная составляющая в этом выражении получается при  $k = 0$ .

Если воспользоваться формулой Эйлера

$$\sin k\omega t = \frac{1}{2j} (e^{jk\omega t} - e^{-jk\omega t}),$$

$$\cos k\omega t = \frac{1}{2} (e^{jk\omega t} + e^{-jk\omega t}),$$

то получим

$$f(\omega t) = \frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left( \underline{F}_{km} e^{jk\omega t} + \underline{F}_{km}^* e^{-jk\omega t} \right), \quad (8.5)$$

$$\text{где } \underline{F}_{km} = \frac{1}{2} (G_{km} - jB_{km}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\omega t) e^{-jk\omega t} d(\omega t).$$

С учетом того, что  $\underline{F}_{-km} = \underline{F}_{km}^*$ , а  $\underline{F}_{-km}^* = \underline{F}_{km}$ , это выражение можно упростить:

$$f(\omega t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} F_{km} e^{jk\omega t}. \quad (6.6)$$

Комплексная форма записи ряда Фурье имеет большое значение при частотном анализе свойств электрических цепей.

Значительное число функций, с которыми приходится иметь дело в электротехнике, удовлетворяют условию  $f(\omega t) = -f(\omega t + \pi)$ . Такие функции называются симметричными относительно оси абсцисс. Они не содержат четных гармоник и постоянной составляющей:

$$f(\omega t) = A_{1m} \sin(\omega t + \psi_1) + A_{3m} \sin(3\omega t + \psi_3) + \dots \quad (6.7)$$

В схемах выпрямления приходится иметь дело с функциями, удовлетворяющими условию  $f(\omega t) = f(-\omega t)$ . Такие функции называются симметричными относительно оси ординат. Они не содержат синусных составляющих:

$$f(\omega t) = A_0 + A_{1m} \cos\omega t + A_{2m} \cos 2\omega t + \dots \quad (8.8)$$

Совокупность гармонических составляющих несинусоидальной периодической функции называется ее дискретным частотным спектром. Спектр можно характеризовать некоторой зависимостью  $A_{km}$  (спектр амплитуд) и  $\psi_k$  (спектр фаз) от частоты  $k\omega$ .

## 8.2. Максимальные, действующие и средние значения несинусоидальных периодических ЭДС, напряжений и токов

Периодическая функция  $f(\omega t)$ , помимо гармонических составляющих, характеризуется: максимальным значением за период  $a_{\max}$ , действующим значением

$$A = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T f^2(\omega t) dt}$$

и средним по модулю значением

$$A_{\text{ср}} = \frac{1}{T} \int_0^T |f(\omega t)| dt.$$

Если кривая  $f(\omega t)$  симметрична относительно оси абсцисс и в течение половины периода ни разу не меняет знак, то среднее по модулю значение равно среднему значению за половину периода. Если за весь период функция ни разу не изменяет знак, то среднее по модулю значение равно постоянной составляющей.

В расчетах обычно пользуются действующими значениями. Если кривая периодически изменяющейся функции разложена в тригонометрический ряд, то действующее значение может быть найдено следующим образом:

$$A^2 = \frac{1}{T} \int_0^T \left[ \sum_{k=0}^{\infty} A_{km} \sin(k\omega t + \psi_k) \right]^2 dt = \frac{1}{T} \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^T A_{km}^2 \sin^2(k\omega t + \psi_k) dt + \\ + \frac{1}{T} \sum_{\substack{i=0 \\ k=0 \\ i \neq k}}^{\infty} \int_0^T A_{im} A_{km} \sin(i\omega t + \psi_i) \sin(k\omega t + \psi_k) dt.$$

Каждый из интегралов в последней сумме равен нулю, поэтому

$$A^2 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{T} \int_0^T A_{km}^2 \sin^2(k\omega t + \psi_k) dt = A_0^2 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A_{km}^2}{2} = A_0^2 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k^2 = \sum_{k=0}^{\infty} A_k^2. \quad (8.8)$$

Следовательно,

$$A = \sqrt{\sum_{k=0}^{\infty} A_k^2}. \quad (8.9)$$

Таким образом, действующее значение периодической несинусоидальной функции зависит только от действующих значений ее гармоник и не зависит от их начальных фаз  $\psi_k$ .

Если известны действующие значения гармонических составляющих какой-то несинусоидальной функции, то действующее значение найдем по формуле

$$U = \sqrt{U_0^2 + U_1^2 + U_2^2 + \dots} \quad (8.10)$$

При оценке несинусоидальных функций в электроэнергетике пользуются коэффициентом формы кривой  $k_\Phi$ , коэффициентом амплитуды  $k_a$ , коэффициентом искажения  $k_{\text{и}}$ .

Коэффициент формы определяется как отношение действующего значения к среднему по модулю значению:

$$k_\Phi = A/A_{\text{ср}}. \quad (8.11)$$

Для синусоиды  $k_{\phi} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} = 1,11$ .

Коэффициент амплитуды равен отношению максимального значения к действующему значению

$$k_a = a_{\max}/A. \quad (8.12)$$

Для синусоиды  $k_a = \sqrt{2} = 1,41$ .

Коэффициент искажения определяется как отношение действующего значения основной гармоники к действующему значению всей кривой

$$k_{\text{и}} = A_1/A. \quad (8.13)$$

Для синусоиды  $k_{\text{и}} = 1$ .

В электронике для оценки искажений пользуются коэффициентом гармоник, который равен отношению действующего значения высших гармоник к действующему значению основной гармоники

$$k = \frac{1}{A_1} \sqrt{\sum_{k=2}^{\infty} A_k^2}. \quad (8.14)$$

Для синусоиды  $k = 0$ .

### 8.3. Несинусоидальные кривые с периодической огибающей

Это кривые, относящиеся к классу почти периодических. Они также разлагаются на гармонические составляющие. Период таких кривых обычно во много раз превышает период любой из составляющих и может стремиться к бесконечности. К числу явлений, характеризующих такими кривыми, относятся биения и модуляции.

*Биения.* Простейший случай получается при сложении двух синусоид с равными амплитудами, но не равными частотами  $\omega_1$  и  $\omega_2$ , причем  $\omega_1 > \omega_2$ :

$$f(t) = A_m (\sin \omega_1 t + \sin \omega_2 t). \quad (8.15)$$

Преобразуя сумму синусов, получим

$$f(t) = 2A_m \cos \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t \cdot \sin \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t. \quad (8.16)$$

Можно считать, что кривая  $f(t)$  представляет собой синусоиду с угловой частотой  $\omega = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$ , амплитуда которой изменяется по

косинусоиде со значительно меньшей угловой частотой  $\Omega = \frac{\omega_1 - \omega_2}{2}$ , тогда

$$f(t) = 2A_m \cos \Omega t \cdot \sin \omega t. \quad (8.17)$$

Частотой биений называется частота  $f_{\text{б}} = \Omega/\pi$ , равная числу максимумов огибающей кривой в единицу времени.

Пример несинусоидальной кривой с периодической огибающей показан на рис. 8.1.

Период биений  $T_{\text{б}} = \frac{\pi}{\Omega}$  в общем случае не равен периоду кривой  $f(t)$ .

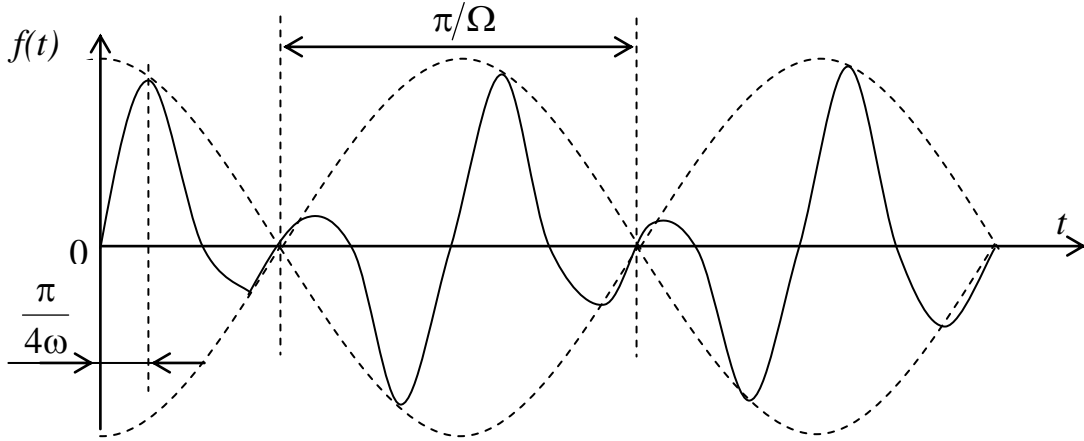


Рис. 8.1. Несинусоидальная функция с периодической огибающей

*Модулированные колебания.* Синусоидально изменяющаяся величина  $f(t) = A_m \sin(\omega t + \psi)$  задается тремя параметрами: амплитудой  $A_m$ , угловой частотой  $\omega$  и начальной фазой  $\psi$ . Эти величины не зависят от времени. Однако для передачи различного рода сигналов применяются генераторы, в которых одна из этих величин изменяется по некоторому заданному закону. Изменение во времени одного из параметров  $A_m$ ,  $\omega$  или  $\psi$  называют модуляцией. Различают амплитудную, частотную и фазовую модуляции.

Пусть функция, изменяющаяся с частотой  $\omega_0$  и амплитудой  $A_m(t)$ , модулирована гармоническим сигналом с частотой  $\Omega < \omega_0$  относительно среднего значения  $A_{0m}$ , т.е. с законом изменения  $A_m(t)$  (рис.8.2):

$$f(t) = A_m(t) \sin \omega_0 t = A_{0m} (1 + m \cos \Omega t) \sin \omega_0 t. \quad (8.18)$$

Частота  $\omega_0$  называется несущей частотой, частота  $\Omega$  – модулирующей частотой,  $m$  – коэффициентом модуляции.

При определении токов или напряжений модулированные по амплитуде колебания могут быть разложены на синусоидальные составляющие

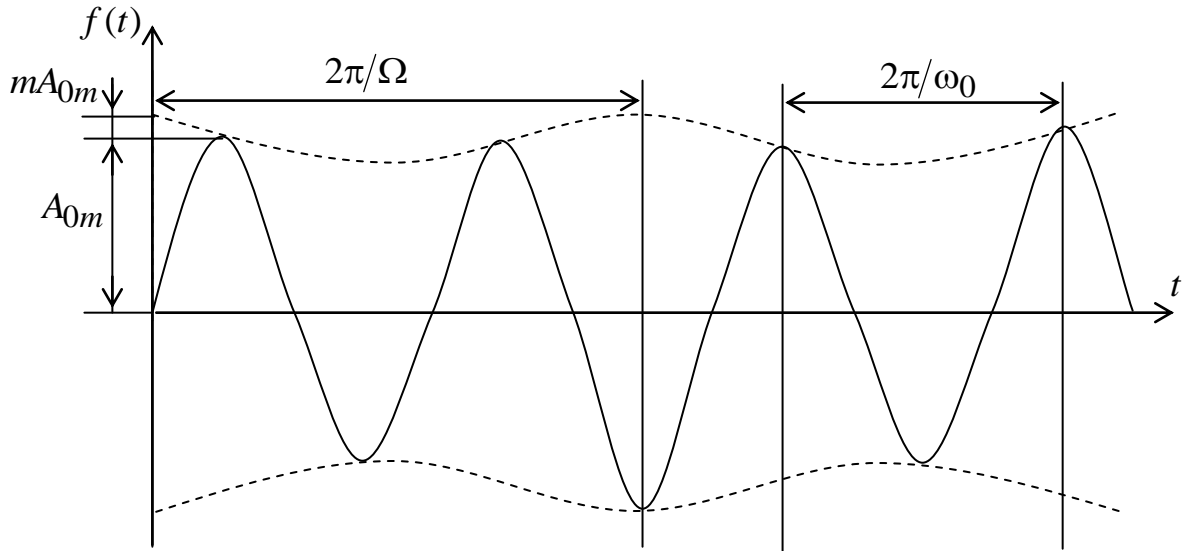
$$\cos \Omega t \cdot \sin \omega_0 t = [\sin(\omega_0 - \Omega)t + \sin(\omega_0 + \Omega)t]/2.$$

Тогда

$$f(t) = A_{0m} \sin \omega_0 t + A_{2m} (\sin \omega_1 t + \sin \omega_2 t), \quad (8.19)$$

где  $A_{2m} = mA_{0m}/2$ ;  $\omega_1 = \omega_0 - \Omega$ ;  $\omega_2 = \omega_0 + \Omega$ .



Рис. 8.2. Модулированная функция  $f(t)$ 

Таким образом, простейшие модулированные по амплитуде колебания могут быть представлены в виде суммы трех синусоидальных колебаний с несущей частотой  $\omega_0$ , боковыми частотами  $\omega_1$ ,  $\omega_2$  и постоянными амплитудами.

Под действующим значением колебаний с периодической огибающей, описываемых функцией  $f(t) = F(\Omega t) \sin \omega_0 t$ , обычно понимают действующее значение огибающей, деленное на  $\sqrt{2}$ :

$$A = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T F^2(\Omega t) dt}, \quad (8.20)$$

где  $T = 2\pi/\Omega$ .

Этим выражением можно пользоваться, если исследуется непериодический процесс за достаточно большой промежуток времени.

#### 8.4. Расчет цепей с несинусоидальными периодическими ЭДС, напряжениями и токами

Если в линейной цепи действует один или несколько источников несинусоидальных периодических ЭДС и токов, то расчет такой цепи распадается на три этапа:

- 1) разложение ЭДС и токов источников на постоянную и синусоидальные составляющие;
- 2) применение принципа наложения и расчет токов и напряжений в цепи для каждой из составляющих в отдельности;

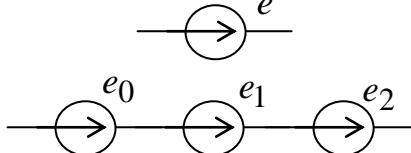
3) совместное рассмотрение решений, полученных для каждой из составляющих.

Основную часть расчета представляет второй этап.

Если, например, задана несинусоидальная ЭДС вида

$$e = E_0 + E_{1m} \sin(\omega_1 t + \psi_1) + E_{2m} \sin(\omega_2 t + \psi_2), \quad (8.21)$$

то действие источника такой ЭДС аналогично действию трех последовательно соединенных источников ЭДС (рис. 8.3):

$$\begin{aligned} e_0 &= E_0; \\ e_1 &= E_{1m} \sin(\omega_1 t + \psi_1); \\ e_2 &= E_{2m} \sin(\omega_2 t + \psi_2). \end{aligned}$$


The diagram illustrates the equivalent circuit for a non-sinusoidal EMF source. It shows three DC voltage sources, labeled  $e_0$ ,  $e_1$ , and  $e_2$ , connected in series. A fourth DC voltage source, labeled  $e$ , is connected in parallel with this series combination. Each source is represented by a circle with an arrow pointing to the right, indicating the direction of the EMF.

Рис. 8.3. Представление несинусоидальной ЭДС

Применив принцип наложения, и рассмотрев действие каждой из составляющих ЭДС в отдельности, можно найти составляющие токов во всех участках цепи.

Мгновенное значение тока в какой-либо  $k$ -й ветви равно сумме мгновенных значений составляющих токов:

$$i_k = I_{0k} + i_{1k} + i_{2k}.$$

Таким образом, расчет линейной цепи с несинусоидальными ЭДС сводится к решению  $n$  задач с синусоидальными ЭДС и одной задачи с постоянными ЭДС.

При решении каждой из этих задач необходимо учитывать, что для различных частот индуктивные и емкостные сопротивления неодинаковы. Индуктивное сопротивление для  $k$ -й гармоники  $k$  раз больше, а емкостное, наоборот, в  $k$  раз меньше, чем для первой:

$$X_{Lk} = k\omega L = kX_{L1}; \quad X_{Ck} = 1/k\omega C = X_{C1}/k.$$

Вследствие этого при напряжении, близком к синусоидальному, ток в емкости может иметь резко несинусоидальную форму из-за высших гармоник. В то же время из-за роста индуктивного сопротивления даже при резко несинусоидальной кривой напряжения форма кривой тока нередко приближается к синусоиде.

При расчете каждой из гармоник можно пользоваться комплексным методом и строить векторные диаграммы для каждой гармоники. Однако недопустимо суммирование векторов и сложение комплексных напряжений и токов различных гармоник. Так как векторные диаграммы отражают величины и фазы токов и напряжений в какой-то момент времени. На комплексной плоскости векторы различных гармоник должны вращаться с

разной скоростью и получить устойчивую картину невозможно. При вычерчивании кривых отдельных гармоник следует учитывать, что период гармоника обратно пропорционален ее номеру. Следовательно, если по оси абсцисс отложено  $\omega t$ , то, соблюдая один и тот же масштаб, вместо углов  $\alpha_k$  надо откладывать углы  $\alpha_k/k$ .

### 8.5. Мощность в цепи несинусоидального тока

Активная мощность периодического тока произвольной формы определяется как средняя мощность за период:

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T u \cdot i \cdot dt. \quad (8.22)$$

Если мгновенные значения выразить в виде рядов Фурье, то получим

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T \left[ \sum_{k=0}^{\infty} U_{km} \sin(k\omega t + \psi_{u_k}) \right] \cdot \left[ \sum_{k=0}^{\infty} I_{km} \sin(k\omega t + \psi_{i_k}) \right] dt.$$

Так как среднее за период значение произведения синусоидальных функций различной частоты равно нулю, то

$$\begin{aligned} p &= \frac{1}{T} \int_0^T \sum_{k=0}^{\infty} U_{km} I_{km} \sin(k\omega t + \psi_{u_k}) \cdot \sin(k\omega t + \psi_{i_k}) dt = \\ &= U_0 I_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{U_{km} I_{km} \cos \varphi_k}{2} = \sum_{k=0}^{\infty} U_k I_k \cos \varphi_k, \end{aligned} \quad (8.23)$$

где  $\varphi_k = \psi_{u_k} - \psi_{i_k}$ .

Средняя мощность несинусоидального тока равна сумме средних мощностей отдельных гармоник.

По аналогии с синусоидальными токами вводится понятие полной мощности  $S$ , равной произведению действующих значений тока и напряжения:

$$S = UI = \sqrt{\sum_{k=0}^{\infty} U_k^2 \sum_{k=0}^{\infty} I_k^2}. \quad (8.24)$$

Отношение активной мощности к полной называют коэффициентом мощности ( $\kappa$  – каппа) и иногда приравнивают косинусу некоторого условного угла  $\upsilon$ :

$$\kappa = P/S = \cos \upsilon. \quad (8.25)$$

Реактивная мощность цепи равна сумме реактивных мощностей отдельных гармоник:

$$Q = \sum_{k=1}^{\infty} Q_k = \sum_{k=1}^{\infty} U_k I_k \sin \varphi_k. \quad (8.26)$$

Для несинусоидальных токов квадрат полной мощности, как правило, больше суммы квадратов активной и реактивной мощностей:

$$S^2 > P^2 + Q^2.$$

### 8.6. Высшие гармоники в трехфазных цепях

В трехфазных цепях кривые напряжения обычно имеют одинаковую форму и сдвинуты друг относительно друга на треть периода, т.е.

$$u_A = f(t); \quad u_B = f(t - T/3); \quad u_C = f(t + T/3).$$

где  $T$  – период основной частоты.

Пусть  $u_{Ak} = U_{km} \sin(k\omega t + \psi_k)$ .

Учитывая, что  $\omega T = 2\pi$ , и подставляя вместо  $t$  соответственно  $t - T/3$  и  $t + T/3$ , получаем

$$\begin{aligned} u_{Bk} &= U_{km} \sin(k\omega t + \psi_k - 2k\pi/3); \\ u_{Ck} &= U_{km} \sin(k\omega t + \psi_k + 2k\pi/3). \end{aligned}$$

Анализируя эти выражения для различных значений  $k$ , можно заметить, что напряжения гармоник, кратных трем ( $k = 3n$ ), во всех фазах имеют одинаковое значение, т.е. образуют нулевую последовательность. При  $k = 3n + 1$  гармоники трех фаз образуют симметричную систему напряжений, последовательность которой совпадает с последовательностью фаз первой гармоники (прямая последовательность). При  $k = 3n + 2$  гармоники образуют симметричную систему обратной последовательности.

В силовой электроэнергетике, как правило, отсутствуют постоянная составляющая и четные гармоники.

Рассмотрим некоторые частные случаи.

Если фазы генератора соединены «звездой», то при несинусоидальном фазном напряжении линейные напряжения не содержат гармоник, кратных трем, так как они образуют нулевую последовательность. Это приводит к тому, что отношение линейных напряжений к фазным меньше, чем  $\sqrt{3}$ :

$$\begin{aligned} U_{\text{л}} &= \sqrt{U_1^2 + U_3^2 + U_5^2 + U_7^2 + \dots}; \\ U_{\text{л}} &= \sqrt{U_1^2 + U_5^2 + U_7^2 + \dots}, \end{aligned}$$

т.е.  $U_{\text{л}} < \sqrt{3} U_{\text{ф}}$ .

При симметричной нагрузке фазные токи основной частоты и все высшие гармоники, за исключением гармоник, кратным трем, образуют системы прямой и обратной последовательностей, и в сумме дают ноль. Гармоники же порядка, кратного трем, образуют систему нулевой

последовательности, т.е. имеют в любой момент времени одинаковые значения и направления соответственно токов и ЭДС. Поэтому ток в нейтральном проводе равен утроенной сумме токов высших гармоник нулевой последовательности:

$$I_N = 3\sqrt{I_3^2 + I_9^2 + I_{15}^2 + \dots} \quad (8.27)$$

При отсутствии нейтрального провода токи в каждой из фаз не могут содержать высших гармоник, кратных трем, так как в этой схеме сумма токов в любой момент времени должна быть равна нулю. Поэтому в приемнике нет напряжений от токов нулевой последовательности, и между нейтральными точками генератора и симметричного приемника может появиться значительное напряжение, содержащее только гармоники, кратные трем.

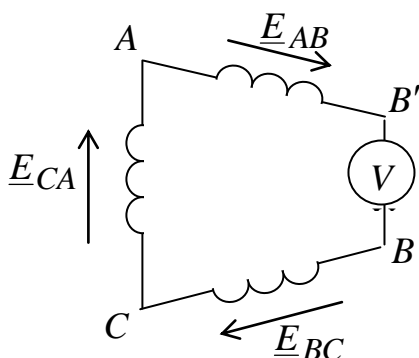
Если фазы генератора соединены «треугольником», то при несинусоидальных ЭДС в фазах, сумма ЭДС, действующих в замкнутом контуре генератора, равна утроенной сумме гармоник, кратных трем. Если включить вольтметр в рассечку треугольника, то он измерит гармоники ЭДС, кратные трем (схема разомкнутого треугольника), так как остальные гармоники в сумме дадут нуль (рис. 8.4). Такая схема может применяться как утроитель частоты.

Если фазы соединены в замкнутый треугольник, то гармоники, кратные трем, вызывают внутренний ток даже в режиме холостого хода. Фазные ЭДС не содержат гармоник, кратных трем, так как они компенсируются падением напряжения на внутренних сопротивлениях фазы.

Поэтому во внешней цепи токи не содержат гармоник порядка, кратного трем.

Фазный ток генератора при симметричной нагрузке

$$I_\phi = \sqrt{I_1^2 + I_3^2 + I_5^2 + I_7^2 + \dots} \quad (8.28)$$



$$U_V = 3\sqrt{E_3^2 + E_9^2 + E_{15}^2 + \dots}$$

Рис. 8.4. Схема разомкнутого треугольника

Линейный ток во внешней цепи

$$I_L = \sqrt{I_1^2 + I_5^2 + I_7^2 + \dots} < \sqrt{3}I_\phi. \quad (8.29)$$

**Пример.**

**Самостоятельная работа**

Однофазные и трехфазные цепи при несинусоидальных источниках.  
[Л 9.1.3, с. 200–221]

## ЛЕКЦИЯ №16

### 9. ПЕРЕХОДНЫЕ ПРОЦЕССЫ В ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЯХ С СОСРЕДОТОЧЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

#### 9.1. Возникновение переходных процессов и законы коммутации

В электрических цепях могут происходить включения и отключения пассивных или активных цепей, короткие замыкания отдельных участков, различного рода переключения, внезапные изменения параметров и т.д. В результате таких изменений, называемых коммутационными или просто *коммутациями*, которые будем считать происходящими мгновенно, в цепи возникают переходные процессы, заканчивающиеся спустя некоторое (теоретически бесконечно большое) время после коммутации.

Примем следующие обозначения:

$t = 0$  – начало отсчета времени переходного процесса;

$0_-$  – момент времени непосредственно перед мгновенной коммутацией;

$0_+$  – момент времени непосредственно сразу после мгновенной коммутации.

В индуктивном элементе ток (и магнитный поток) непосредственно после коммутации в момент, который и назван моментом коммутации, сохраняет значение, которое он имел непосредственно перед коммутацией, т.е. при  $t = 0_-$  и дальше начинает изменяться именно с этого значения. Записанное в математической форме это явление называется первым законом коммутации:

$$i_L(0_-) = i_L(0) = i_L(0_+).$$

Так, при включении ветви с катушкой, в которой не было тока, ток в этой ветви в момент коммутации равен нулю. Если для такой ветви допустить, что в момент коммутации ток изменяется скачком, то напряжение на индуктивном элементе  $u_L = L \frac{di}{dt}$  будет бесконечно большим и не будет выполняться II закон Кирхгофа.

На емкостном элементе напряжение (и заряд) сохраняет в момент коммутации то значение, которое оно имело непосредственно перед коммутацией, и в дальнейшем изменяется, начиная именно с этого значения. Это явление называется вторым законом коммутации:

$$u_C(0_+) = u_C(0) = u_C(0_-).$$

Так, при включении ветви с конденсатором, который не был заряжен, напряжение в момент коммутации равно нулю. Если допустить, что в момент коммутации напряжение на емкостном элементе изменится скачком, то ток  $i_C = C \frac{du_C}{dt}$  будет бесконечно большим, и в цепи не будет выполняться II закон Кирхгофа.

С энергетической точки зрения невозможность мгновенного изменения тока  $i_L$  и напряжения  $u_C$  объясняется невозможностью скачкообразного изменения запасенной в индуктивном и емкостном элементах энергии, так как такое изменение энергии требует бесконечно большой мощности.

## 9.2. Переходные, установившиеся и свободные процессы

Рассмотрим общие вопросы расчета переходных процессов на простом примере – включение  $RLC$  – цепи к источнику ЭДС  $e$ , которая изменяется во времени непрерывно и задана каким-либо аналитическим выражением:

$$Ri + L \frac{di}{dt} + u_C = e, \quad (9.1)$$

где  $i$  – ток переходного процесса, который будем называть переходным током;  $u_C = u_C(0) + \frac{1}{C} \int_0^t i \cdot dt$  – напряжение на конденсаторе.

Когда с переходным процессом можно не считаться, наступает принужденный режим. Принужденный режим, создаваемый источником произвольной периодически изменяющейся ЭДС (или током) называется *установившимся*.

В установившемся режиме

$$Ri_y + L \frac{di_y}{dt} + u_{Cy} = e, \quad (9.2)$$

где  $i_y$ ,  $u_{Cy}$  – ток и напряжение установившегося режима (установившийся ток и установившееся напряжение).

Если вычесть из уравнения (9.1) уравнение (9.2) и обозначить  $i_{св} = i - i_y$ , то

$$Ri_{св} + L \frac{di_{св}}{dt} + u_{Cсв} = 0. \quad (9.3)$$

Разности токов и напряжений переходного процесса и принужденного режима называются током и напряжением свободного процесса или просто свободным током и напряжением.



Процесс, происходящий в цепи, можно рассматривать состоящим из двух накладывающихся друг на друга процессов – установившегося, который как бы наступил сразу, и свободного, имеющего место только во время переходного процесса:

$$\begin{aligned}i &= i_y + i_{св}; \\u_L &= u_{Ly} + u_{Lсв}; \\u_C &= u_{Cy} + u_{Cсв}; \\u_R &= u_{Ry} + u_{Rсв}.\end{aligned}$$

Конечно, физически существуют только переходные токи и напряжения, и разложение их на составляющие является удобным математическим приемом, облегчающим расчет переходных процессов.

Разложение переходных токов и напряжений соответствует правилу решения линейных неоднородных дифференциальных уравнений, согласно которому общее решение равно сумме частного решения неоднородного уравнения и общего решения однородного уравнения.

*Свободный ток* представляет собой общее решение однородного дифференциального уравнения (9.3), и в его выражении должны быть постоянные интегрирования, число которых равно порядку дифференциального уравнения.

*Установившийся ток* – частное решение неоднородного дифференциального уравнения (7.1), которое получается из общего решения неоднородного дифференциального уравнения при равных нулю постоянных интегрирования.

При интегрировании дифференциальных уравнений появляются постоянные интегрирования, которые определяют из начальных условий.

*Начальные условия* – значения переходных токов в индуктивных элементах и напряжений на емкостных элементах при  $t = 0$ , т.е. те значения, которые в момент коммутации не изменяются скачком. Это так называемые *независимые начальные условия*.

Начальные значения всех остальных токов и напряжений называются *зависимыми начальными условиями*. Их определяют по независимым начальным условиям при помощи уравнений, составленных по I и II законам Кирхгофа. Это является основной трудностью решения *классическим методом*.

### 9.3. Переходные процессы в цепи с последовательно соединенными участками $R$ и $L$

Примером такой цепи может служить эквивалентная схема катушки индуктивности, обладающей активным сопротивлением  $R$  и индуктивностью  $L$ .

Дифференциальное уравнение такой цепи

$$L \frac{di}{dt} + Ri = u(t), \quad (9.4)$$

где  $u(t)$  – напряжение на зажимах цепи.

Соответствующее однородное уравнение, определяющее свободный ток:

$$L \frac{di_{св}}{dt} + Ri_{св} = 0.$$

Характеристическое уравнение

$$Lp + R = 0$$

имеет единственный корень  $p = -R/L$ . Тогда свободный ток можно вычислить как

$$i_{св} = Ae^{pt} = Ae^{-(R/L)t}. \quad (7.5)$$

Выражение установившегося тока  $i_y(t)$ , являющегося частным решением дифференциального уравнения, определяемое видом заданной функции  $u(t)$ .

Ток в переходном режиме

$$i = i_y + i_{св} = i_y + Ae^{-(R/L)t}.$$

Постоянная интегрирования  $A$  определяется по начальному значению тока  $i$ .

Рассмотрим ряд частных случаев.

1. Пусть цепь в момент  $t = 0$  отключается от источника и замыкается накоротко (рис. 9.1).

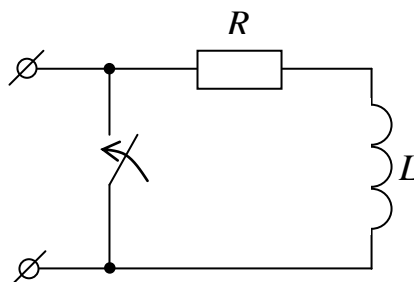


Рис. 9.1. Замыкание катушки индуктивности накоротко

После замыкания накоротко  $u = 0$ . Установившийся ток в этом случае  $i_y = 0$ . Тогда полный ток

$$i = i_{св} = Ae^{-(R/L)t} \quad (9.6)$$

Начальное условие для определения  $A$ :  $i(0_+) = i(0_-)$ .

Пусть к моменту коммутации ток в цепи был равен  $i(0_-) = I$ . Следовательно,  $i(0_+) = I$ . Полагая в уравнении (9.6)  $i = I$  и  $t = 0$ , находим  $I = A$ .

Решение уравнения имеет вид

$$i = Ie^{-(R/L)t} = Ie^{-t/\tau} \quad (9.7)$$

Величина  $\tau = L/R$  имеет размерность времени и называется постоянной времени цепи. За промежуток времени  $t$  ток уменьшается в  $e$  раз. Чем больше  $\tau$ , тем медленнее затухает ток.

Теоретически ток станет равным нулю через бесконечно большой промежуток времени, практически он становится малым за промежуток времени в несколько значений  $\tau$  (рис. 9.2).

Постоянная времени  $\tau$  равна длине подкасательной в любой точке кривой  $i(t)$  на рис. 9.2, так как  $\frac{di}{dt} = -\frac{I}{\tau}$ .

Энергия, выделяемая в виде теплоты в активном сопротивлении  $R$ , равна энергии, запасенной в магнитном поле цепи в начальный момент времени

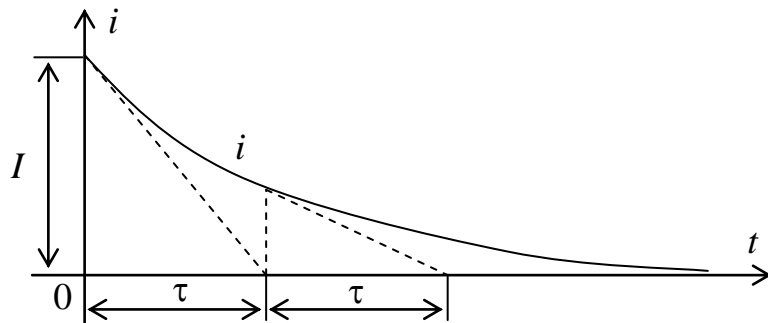


Рис. 9.2. Кривая изменения тока в катушке индуктивности

$$\int_0^{\infty} i^2 R dt = I^2 R \int_0^{\infty} e^{-(2R/L)t} dt = \frac{LI^2}{2} \quad (9.8)$$

Постоянная времени  $\tau$  больших катушек с сердечником может быть весьма значительной. Так, постоянная времени обмотки возбуждения крупных гидрогенераторов может иметь значение 5 с.

2. Рассмотрим процесс отключения от источника постоянного напряжения цепи, состоящей из индуктивной катушки с параметрами  $R$  и  $L$  и соединенной с ней параллельно ветви с сопротивлением  $R_0$  (рис. 9.3).

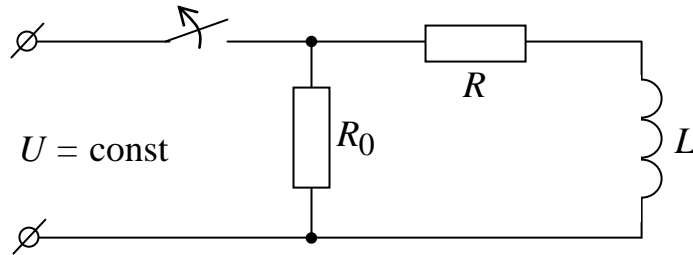


Рис. 9.3. Отключение катушки индуктивности

Переходный процесс описывается уравнением

$$i = i_{св} = Ae^{-t/\tau},$$

где  $\tau = L/(R + R_0)$ .

До размыкания рубильника в катушке протекает ток  $i_L(0_-) = U/R$ .

$$A = i_L(0_+) = i_L(0_-) = U/R.$$

Ток в катушке

$$i = \frac{U}{R} e^{-t/\tau}. \quad (9.9)$$

Напряжение на участке с сопротивлением  $R_0$  до размыкания было равно  $U$ , а в первый момент времени после размыкания оно окажется равным

$$R_0 i(0_-) = U R_0 / R. \quad (9.10)$$

Если  $R_0 > R$ , например, на зажимах катушки с сопротивлением  $R$  включен вольтметр с большим сопротивлением, то при отключении цепи напряжение на вольтметре в первый момент повысится  $R_0/R$  раз.

Если энергия магнитного поля, запасенная в катушке достаточно велика, то вольтметр может быть сожжен. Поэтому во избежание возникновения больших перенапряжений при отключении цепей постоянного тока, обладающих большой индуктивностью, например, обмоток возбуждения генераторов, эти цепи предварительно замыкают на малое сопротивление.

3. Рассмотрим процессы при включении  $RL$  цепи на постоянное напряжение  $u = U = \text{const}$  (рис. 9.4).

Ток установившегося режима  $i_y = U/R$ .

Общий ток в переходном режиме  $i = \frac{U}{R} + Ae^{-(R/L)t}$ .

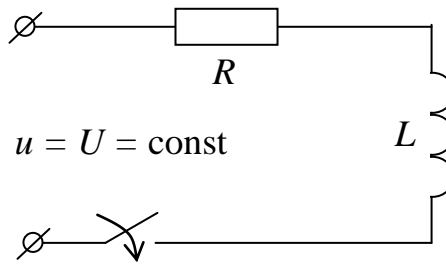


Рис. 9.4. Включение катушки индуктивности на постоянное напряжение

Если до включения ток был равен нулю  $i(0_-) = 0$ , то при  $t = 0$   
 $i(0_+) = i(0_-) = U/R + A = 0$ ;  $A = -U/R$ .

Решение уравнения

$$i = \frac{U}{R} (1 - e^{-t/\tau}). \quad (9.11)$$

Напряжение на зажимах катушки

$$u_L = L \frac{di}{dt} = L \frac{U}{R} \cdot \frac{1}{\tau} e^{-t/\tau} = U e^{-t/\tau}. \quad (9.12)$$

Кривые изменения тока и напряжения на катушке показаны на рис. 9.5.

4. Рассмотрим процесс при включении цепи под синусоидальное напряжение:  $u = U_m \sin(\omega t + \psi)$ .

Ток установившегося режима

$$i_y = \frac{U_m}{Z} \sin(\omega t + \psi - \varphi) = I_m \sin(\omega t + \psi - \varphi).$$

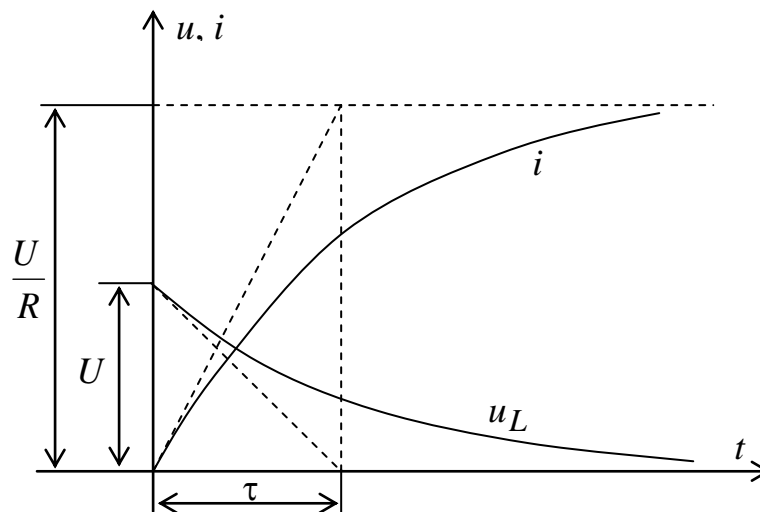


Рис. 9.5. Кривые изменения тока и напряжения

Общий ток  $i = i_y + i_{св} = I_m \sin(\omega t + \psi - \varphi) + Ae^{-t/\tau}$ ,

где  $I_m = U_m/Z$ ;  $Z = \sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}$ ;  $\varphi = \arctg \omega L/R$ ;  $\tau = L/R$ .

Постоянную интегрирования  $A$  определяем из начального условия  $i(0_-) = 0$ .

$$i(0_+) = i(0_-) = I_m \sin(\psi - \varphi) + A = 0$$

Общий ток:

$$i = i_y + i_{св} = I_m \sin(\omega t + \psi - \varphi) - I_m \sin(\psi - \varphi) e^{-t/\tau}. \quad (9.13)$$

Кривые изменения тока и напряжения изображены на рис. 9.6.

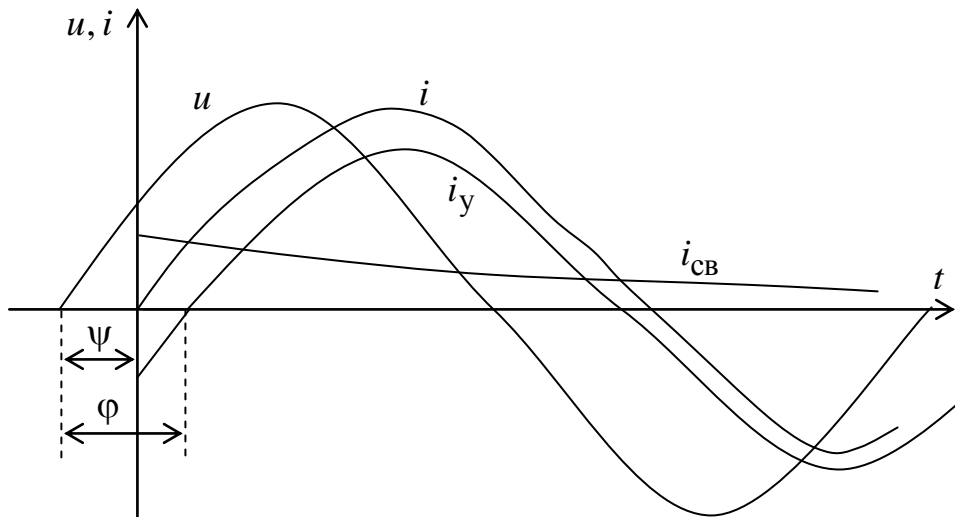


Рис. 9.6. Кривые изменения тока и напряжения при включении катушки на синусоидальное напряжение

Начальное значение свободного тока зависит от начальной фазы  $\psi$  напряжения. Наибольшее значение свободного тока, равное амплитуде  $I_m$  установившегося тока, имеет место, если  $\psi - \varphi = +\pi/2$ . Наибольшее значение результирующего тока не превышает двойной амплитуды установившегося тока. Свободный ток не возникает, и сразу наступает установившийся режим при условии  $\psi = \varphi$ .

#### 9.4. Переходные процессы в цепи с последовательно соединенными участками $R$ и $C$

Обозначим напряжение на зажимах цепи через  $u$ , напряжение на обкладках конденсатора через  $u_C$ , значение его заряда через  $q$

$$Ri + u_C = u. \quad (9.14)$$

Так как

$$i = \frac{dq}{dt} = \frac{d(Cdu_C)}{dt} = C \frac{du_C}{dt},$$

то уравнение (9.14) примет вид

$$RC \frac{du_C}{dt} + u_C = u. \quad (9.15)$$

Однородное уравнение цепи

$$RC \frac{du_{C_{св}}}{dt} + u_{C_{св}} = 0. \quad (9.16)$$

Характеристическое уравнение:  $RCp + 1 = 0$ .

Его корень  $p = -\frac{1}{RC} = -\frac{1}{\tau}$ .

Решение однородного уравнения

$$u_{C_{св}} = Ae^{pt} = Ae^{-t/RC} = Ae^{-t/\tau}. \quad (9.17)$$

Переходное напряжение:

$$u_C = u_{C_{у}} + u_{C_{св}} = u_{C_{у}} + Ae^{-t/\tau}. \quad (9.18)$$

Рассмотрим ряд частных случаев.

1. Пусть цепь  $RC$  замыкается накоротко, т.е.  $u = 0$  (рис. 9.7).

Для установившегося режима  $u_{C_{у}} = 0$ , и

$$u_C = u_{C_{св}} = Ae^{-t/RC}. \quad (9.19)$$

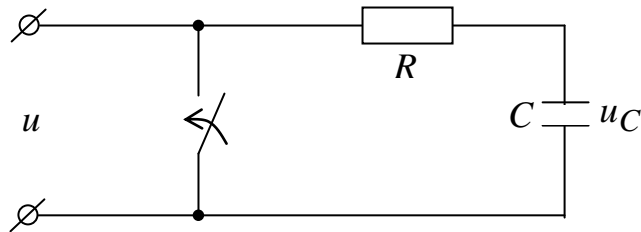


Рис. 9.7. Замыкание  $RC$  – цепи

Пусть к моменту коммутации напряжение на зажимах конденсатора равно  $u_C(0_-) = U_0$ . Подставив в (9.19)  $u_C = U_0$  и  $t = 0$ , получим  $U_0 = A$ .

$$u_C = U_0 e^{-t/\tau} \quad (9.20)$$

Ток в цепи

$$i = C \frac{du_C}{dt} = -\frac{U_0}{R} e^{-t/\tau}. \quad (9.21)$$

Ток в начальный момент скачком повышается от нуля до величины  $U_0/R$ .

Кривые тока и напряжения на конденсаторе представлены на рис. 9.8.

Энергия, выделяемая в виде теплоты в сопротивлении цепи, равна энергии, запасенной в электрическом поле конденсатора к начальному моменту времени

$$\int_0^{\infty} i^2 R dt = \frac{U_0^2}{R} \int_0^{\infty} e^{-2t/\tau} dt = \frac{CU_0^2}{2}. \quad (9.22)$$

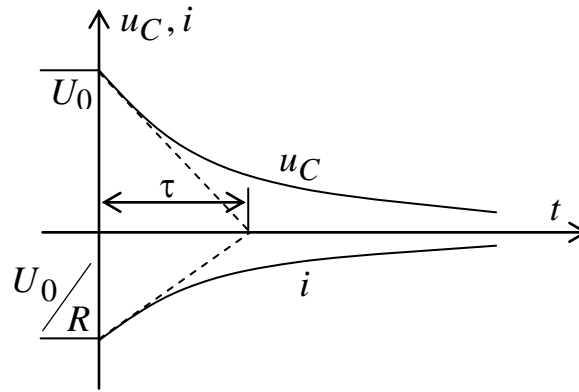


Рис. 9.8. Кривые изменения тока и напряжения на конденсаторе

Постоянная времени  $\tau = RC$  в реальных устройствах может иметь различные значения (до нескольких суток).

2. Рассмотрим процесс при включении  $RC$  цепи под постоянное напряжение  $u = U = \text{const}$ .

Пусть конденсатор до включения не был заряжен. Установившееся значение напряжения на зажимах конденсатора после завершения переходного процесса  $u_{Cy} = U$ . Напряжение в переходном процессе

$$u_C = u_{Cy} + u_{Cсв} = U + Ae^{-t/RC}. \quad (9.23)$$

Постоянную интегрирования  $A$  определяем из условия  $u_C(0_+) = u_C(0_-) = 0$ . Полагая  $t = 0$ , получим:

$$0 = U + A; \quad A = -U.$$

Общее решение

$$u_C = U - Ue^{-t/RC} = U(1 - e^{-t/RC}). \quad (9.24)$$

Ток в цепи

$$i = C \frac{du_C}{dt} = \frac{U}{R} e^{-t/\tau}. \quad (9.25)$$

Кривые изменения тока и напряжения на конденсаторе показаны на рис. 9.9.

Количество теплоты, выделившееся в цепи во время заряда, равно  $\frac{CU^2}{2}$ , что составляет ту же величину, что и при разряде конденсатора.



Работа источника внешней ЭДС в этом случае равна  $CU^2$ , т.е. удвоенному значению энергии, запасаемой в электрическом поле конденсатора.

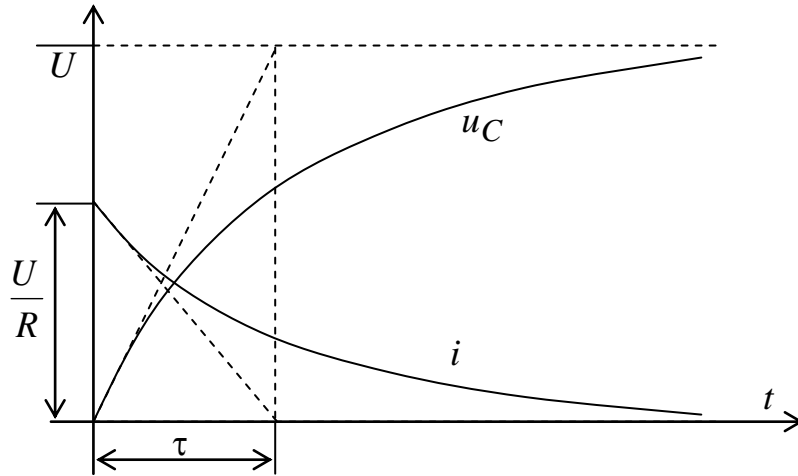


Рис. 9.9. Кривые изменения тока и напряжения на конденсаторе

Если конденсатор до включения был заряжен, т.е.

$$u_C(0_+) = u_C(0_-) = u_C(0), \text{ то } u_C(0) = U + A; \quad A = u_C(0) - U.$$

Если  $u_C(0) > 0$ , то конденсатор дозарядается до напряжения  $U$ , а если  $u_C(0) < 0$  – перезарядается от начального отрицательного значения до приложенного напряжения. Соответствующие кривые изображены на рис. 9.10.

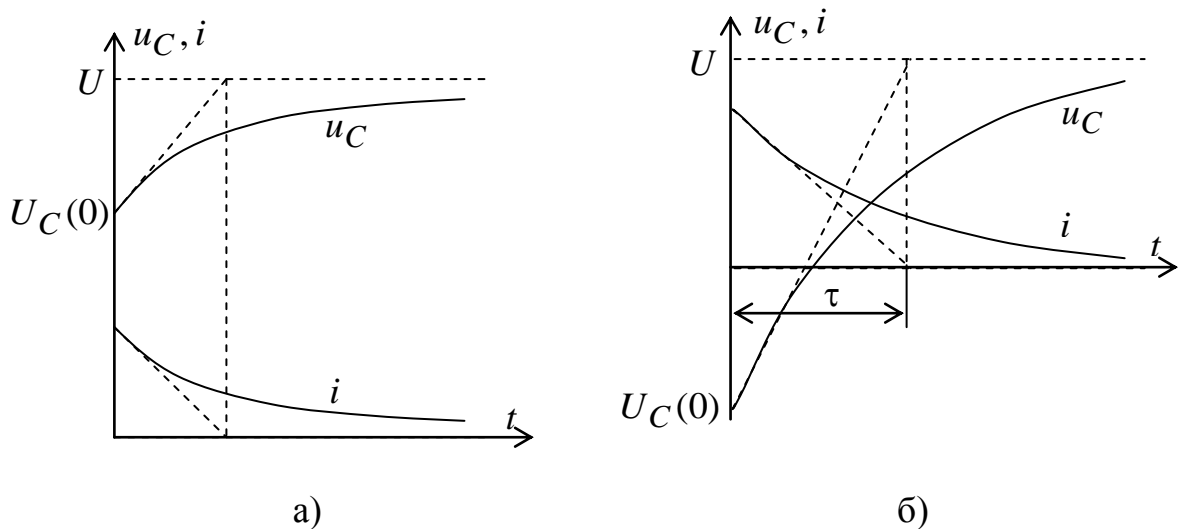


Рис. 9.10. Кривые изменения напряжения на конденсаторе при его дозарядке (а) и перезарядке (б)

3. Рассмотрим процесс включения цепи  $RC$  под синусоидальное напряжение  $u = U_m \sin(\omega t + \psi)$ .

Напряжение  $u_{Cy}$  в установившемся режиме

$$u_{Cy} = \frac{I_m}{\omega C} \sin\left(\omega t + \psi - \varphi - \frac{\pi}{2}\right) + Ae^{-t/\tau}, \quad (9.26)$$

где  $I_m = \frac{U_m}{Z}$ ;  $Z = \sqrt{R^2 + (1/\omega C)^2}$ ;  $\varphi = \arctg \frac{-1}{R\omega C}$ ;  $\tau = RC$ .

Если конденсатор не был заряжен, то  $u_C(0_-) = 0$ :

$$u_C(0_+) = u_C(0_-) = 0 = \frac{I_m}{\omega C} \sin\left(\psi - \varphi - \frac{\pi}{2} + A\right);$$

$$A = -\frac{I_m}{\omega C} \sin\left(\psi - \varphi - \frac{\pi}{2}\right).$$

Напряжение на конденсаторе будет равно

$$u_C = \frac{I_m}{\omega C} \sin\left(\omega t + \psi - \varphi - \frac{\pi}{2}\right) - \frac{I_m}{\omega C} \sin\left(\psi - \varphi - \frac{\pi}{2}\right) e^{-t/\tau}. \quad (9.27)$$

Ток в переходном режиме

$$i = C \frac{du_C}{dt} = I_m \sin(\omega t + \psi - \varphi) - \frac{I_m}{R\omega C} \sin\left(\psi - \varphi - \frac{\pi}{2}\right) e^{-t/\tau}. \quad (9.28)$$

Если конденсатор был предварительно заряжен, то

$$u_C(0_+) = u_C(0_-) = u_C(0) = \frac{I_m}{\omega C} \sin\left(\psi - \varphi - \frac{\pi}{2}\right) + A;$$

$$A = u_C(0) - \frac{I_m}{\omega C} \sin\left(\psi - \varphi - \frac{\pi}{2}\right).$$

Из (9.27) и (9.28) видно, что переходный процесс зависит от величины  $\psi$ .

Если  $\psi = \varphi \pm \pi/2$ , то переходный процесс не возникает и сразу же наступает установившийся режим, так как при этом в момент  $t = 0$  установившееся напряжение равно нулю. Таким образом, имеется полное соответствие между запасом энергии в конденсаторе до включения, и запасом энергии, который должен быть в установившемся режиме в этот момент.

Если включение происходит при  $\psi = \varphi$ , то свободное напряжение  $u_{Cсв}$  будет наибольшим и в начальный момент имеет значение  $I_m X_C$ . Начальное значение свободного тока при этом  $-\frac{I_m}{\omega CR}$ . Если  $\omega CR > 1$ , т.е.  $R < X_C$ , то в начальный момент времени происходит большой всплеск тока, намного превосходящий амплитуду  $I_m$ . Однако такой большой ток протекает незначительную часть периода, так как  $\omega CR = 2\pi/T < 1$  и  $\tau < T$ .

Кривые изменения тока при включении конденсатора под переменное напряжение показаны на рис. 9.11.

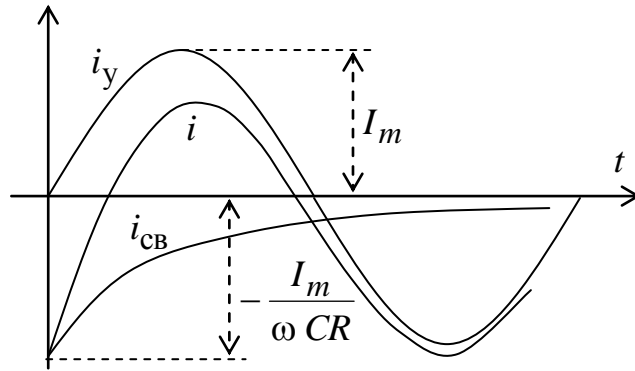


Рис. 9.11. Кривые изменения тока

Максимальное значение напряжения  $u_C$  в переходном процессе не превышает удвоенной амплитуды  $U_{Cm} = I_m/\omega C$  напряжения на конденсаторе в установившемся режиме.

### 9.5. Переходные процессы в цепи с последовательно соединенными участками $R$ , $L$ и $C$

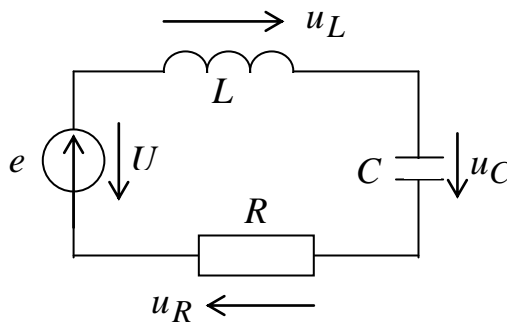


Рис. 9.12. Схема цепи

Уравнение цепи имеет вид

$$Ri + L\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}\int_0^t idt + u_C(0) = u(t). \quad (9.29)$$

Дифференцируя обе части выражения (9.29), получим уравнение второго порядка для тока  $i$  в цепи:

$$L\frac{d^2i}{dt^2} + R\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}i = \frac{du}{dt}. \quad (9.30)$$

Однородное уравнение, определяющее свободный ток, можно записать

$$\frac{d^2i_{св}}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{di_{св}}{dt} + \frac{i_{св}}{LC} = 0. \quad (9.31)$$

Введем обозначения  $R/C = 2\delta$  и  $\omega_0^2 = 1/LC$ . Тогда

$$\frac{d^2 i_{\text{CB}}}{dt^2} + 2\delta \frac{di_{\text{CB}}}{dt} + \omega_0^2 i_{\text{CB}} = 0. \quad (9.32)$$

Характеристическое уравнение:

$$p^2 + 2\delta p + \omega_0^2 = 0. \quad (9.33)$$

Корни уравнения

$$p_1 = -\delta + \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}; \quad p_2 = -\delta - \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}.$$

Свободный ток

$$i_{\text{CB}} = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t}. \quad (9.34)$$

Ток переходного режима

$$i = i_y + i_{\text{CB}} = i_y + A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t}. \quad (9.35)$$

Ток установившегося режима  $i_y$  можно найти, если известен вид функции  $u(t)$ .

Произвольные постоянные интегрирования  $A_1$  и  $A_2$  определяют из начальных физических условий:  $i_L(0_+) = i_L(0_-)$ ;  $u_C(0_+) = u_C(0_-)$ .

Для определения постоянных  $A_1$  и  $A_2$  надо знать значение тока и всех его производных до  $(n - 1)$  включительно в начальный момент времени. В данном случае необходимо знать начальное значение тока и его первой производной. Начальное значение первой производной тока находится из уравнения цепи (9.29) при  $(t = 0)$

$$Ri(0) + L \left. \frac{di}{dt} \right|_{t=0} + u_C(0) = u(0), \quad (9.36)$$

где  $u(0)$  – значение приложенного напряжения  $u(t)$  при  $t = 0$ .

Из последнего уравнения получаем

$$\left. \frac{di}{dt} \right|_{t=0} = \frac{u(0) - u_C(0) - Ri(0)}{L}. \quad (9.37)$$

Из уравнения (9.35) для производной тока имеем

$$\frac{di}{dt} = \frac{di_y}{dt} + A_1 p_1 e^{p_1 t} + A_2 p_2 e^{p_2 t}.$$

Уравнения для нахождения постоянных интегрирования

$$\begin{cases} i(0) = i_y(0) + A_1 + A_2 \\ \frac{u(0) - u_c(0) - Ri(0)}{L} = \left. \frac{di_y}{dt} \right|_{t=0} + A_1 p_1 + A_2 p_2 \end{cases}, \quad (9.38)$$

где  $i_y(0)$  и  $\left. \frac{di_y}{dt} \right|_{t=0}$  – значения тока установившегося режима и его

производной в начальный момент времени, известные из найденного ранее частного решения исходного дифференциального уравнения (9.29).

## ЛЕКЦИЯ №17

### 9.6. Расчет переходного процесса классическим методом

В качестве примера рассмотрим расчет переходного процесса классическим методом для схемы, изображенной на рис. 9.13. Определить ток  $i_1$ .

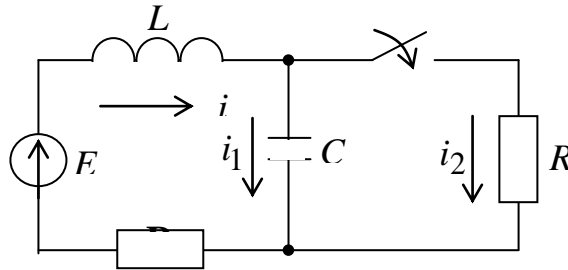


Рис. 9.13. Расчетная схема

1. Для цепи после коммутации составляются уравнения по I и II законам Кирхгофа.

$$\begin{cases} -i + i_1 + i_2 = 0 \\ Ri + L \frac{di}{dt} + u_C = E \\ Ri_2 - u_C = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} i_1 = C \frac{du_C}{dt}; \\ u_C = \frac{1}{C} \int i_1 dt; \end{cases}$$

$$\begin{cases} -i + i_1 + i_2 = 0 \\ R \frac{di}{dt} + L \frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{i_1}{C} = 0 \\ R \frac{di_2}{dt} - \frac{i_1}{C} = 0. \end{cases}$$

2. Определяются независимые начальные условия ( $i_L(0_+)$  и  $u_C(0_+)$ ) из расчета схемы до коммутации:

$$\begin{aligned} u_C(0_-) &= u_C(0_+) = E; \\ i(0_-) &= i(0_+) = 0. \end{aligned}$$

3. Искомая величина записывается в виде

$$i_1 = i_{1y} + i_{1св}.$$

4. Установившуюся составляющую определяют из расчета режима цепи после коммутации  $i_{1y} = 0$  (при  $E = \text{const}$  ток после коммутации есть ток во внешнем контуре).

5. Составляется характеристическое уравнение, и определяются его корни

$$\begin{aligned} Z(p) &= pL + R + \frac{\frac{1}{pC}R}{\frac{1}{pC} + R} = \frac{pL}{pC} + R + \frac{R}{pC} + R^2 + \frac{R}{pC} = \\ &= pL + p^2RLC + R + R^2pC + R = RLCp^2 + (L + R^2C)p + 2R = 0. \end{aligned}$$

Корни могут быть:

- 1) действительные разные  $p_1$  и  $p_2$ ;
- 2) действительные равные  $p_1 = p_2 = p$ ;
- 3) комплексно сопряженные  $p_{1,2} = -\alpha \pm j\omega_{св}$ ,

где  $\alpha$  – коэффициент затухания;

$\omega_{св}$  – угловая частота свободных колебаний.

6. В соответствии с полученными корнями характеристического уравнения записывается свободная составляющая:

- 1)  $i_{1св} = A_1e^{p_1t} + A_2e^{p_2t}$ ;
- 2)  $i_{1св} = (A_1 + A_2t)e^{pt}$ ;
- 3)  $i_{1св} = Ae^{-\alpha t} \sin(\omega_{св}t + \psi)$ , где  $\psi = \arctg \frac{\omega_{св}}{\alpha}$ .

7. Искомое решение для первого случая

$$i_1 = 0 + A_1e^{p_1t} + A_2e^{p_2t}.$$

8. Определяются постоянные интегрирования  $A_1$  и  $A_2$ :

$$i_1(0) = A_1 + A_2,$$

$$\left. \frac{di_1}{dt} \right|_{t=0} = p_1A_1 + p_2A_2.$$

Уравнения п.1 для момента времени  $t = 0$  запишутся как

$$\begin{cases} -i(0) + i_1(0) + i_2(0) = 0 \\ Ri(0) + L \left. \frac{di}{dt} \right|_{t=0} + u_C(0) = E. \\ Ri_2(0) - u_C(0) = 0 \end{cases}$$

Независимые начальные условия  $i(0)$  и  $u_C(0)$  уже определены в п.2. Зависимые начальные условия  $i_1(0)$ ,  $i_2(0)$  и  $\left. \frac{di}{dt} \right|_{t=0}$  определяются из последней системы уравнений.

Для определения  $\left. \frac{di_1}{dt} \right|_{t=0}$  необходимо продифференцировать систему уравнений п.1:

$$\begin{cases} -\left. \frac{di}{dt} \right|_0 + \left. \frac{di_1}{dt} \right|_0 + \left. \frac{di_2}{dt} \right|_0 = 0 \\ R \left. \frac{di}{dt} \right|_0 + L \left. \frac{d^2i}{dt^2} \right|_0 + \frac{i_1(0)}{C} = 0 \\ R \left. \frac{di_2}{dt} \right|_0 - \frac{i_1(0)}{C} = 0. \end{cases}$$

9. После определения постоянных интегрирования  $A_1$  и  $A_2$  подставляют их в искомое решение и расчет окончен.

Для определения других токов и напряжений не требуется выполнять все этапы расчета. Можно использовать известные выражения

$$i_2 = \frac{u_C}{R}; \quad i = i_1 + i_2; \quad u_C = u_C(0) + \frac{1}{C} \int_0^t i_1 dt.$$

### 9.7. Разряд конденсатора на цепь $RL$

В этом случае приложенное напряжение, а также ток установившегося режима равны нулю:

$$u(t) = 0; \quad i_y = 0.$$

Для определения произвольных постоянных интегрирования в уравнении (9.38) необходимо положить:

$$i(0) = 0; \quad i_y(0) = 0; \quad u(0) = 0; \quad \left. \frac{di_y}{dt} \right|_{t=0} = 0.$$

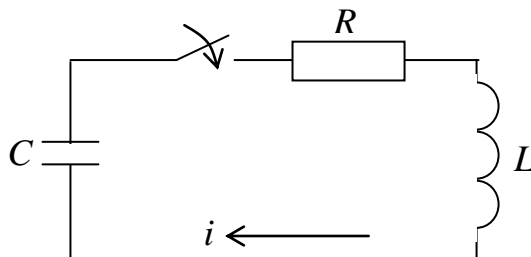


Рис. 9.14. Расчетная схема

Обозначим  $u_C(0) = U_0$ . Тогда

$$\begin{cases} 0 = A_1 + A_2 \\ -U_0/L = p_1 A_1 + p_2 A_2; \\ A_1 = -A_2 = A = -\frac{U_0}{L(p_1 - p_2)}. \end{cases}$$

Переходный ток

$$i = -\frac{U_0}{L(p_1 - p_2)} (e^{p_1 t} - e^{p_2 t}). \quad (9.39)$$

Напряжения на катушке и конденсаторе

$$\begin{cases} u_L = L \frac{di}{dt} = -\frac{U_0}{p_1 - p_2} (p_1 e^{p_1 t} - p_2 e^{p_2 t}) \\ u_C = \frac{1}{C} \int_0^t i dt + U_0 = -\frac{U_0}{p_1 - p_2} (p_2 e^{p_1 t} - p_1 e^{p_2 t}) \end{cases}. \quad (9.40)$$

При выводе последнего уравнения учитывалось, что  $p_1 p_2 = \omega_0^2 = \frac{1}{LC}$ .

Характер процессов при разряде конденсатора оказывается различным в зависимости от того, будут ли корни характеристического уравнения вещественными или комплексными, что определяется соотношениями между параметрами  $R$ ,  $L$  и  $C$ .

Рассмотрим возможные случаи.

1. Пусть корни характеристического уравнения вещественны и отличны друг от друга. Это имеет место при условии

$$\delta = \omega_0, \quad \text{т.е. } R/2L > 1/\sqrt{LC} \quad \text{или} \quad R > 2\sqrt{L/C}.$$

Так как  $p_1 < 0$  и  $p_2 < 0$  и, кроме того,  $|p_2| > |p_1|$ , то при изменении  $t$  от 0 до  $\infty$  величины  $e^{p_1 t}$  и  $e^{p_2 t}$  убывают от 1 до 0 и при том разность  $e^{p_1 t} - e^{p_2 t}$  всегда положительна (рис. 9.13).

Ток  $i$  не меняет своего направления, т.е. конденсатор все время разряжается. Такой односторонний разряд конденсатора называют аperiodическим. Кривые изменения напряжений показаны на рис. 9.14.

В интервале времени  $0 < t < t_m$  ток по абсолютному значению возрастает и достигает максимума при  $t = t_m = (\ln p_2/p_1)/(p_1 - p_2)$ . Значение  $t_m$  находится из условия  $di/dt = U_L/L = 0$ . В интервале времени  $t_m < t < \infty$  ток по абсолютному значению убывает, стремясь к нулю.



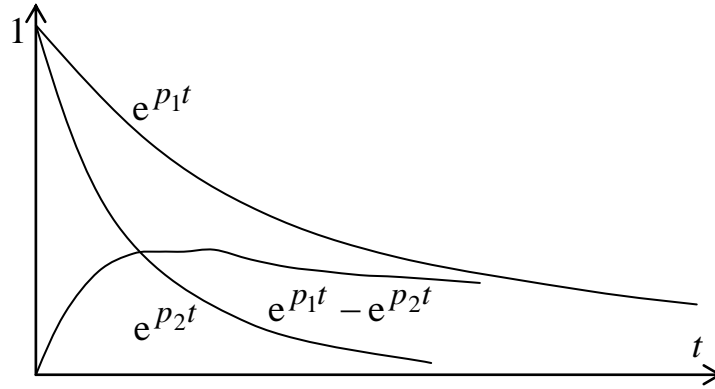


Рис. 9.13. Кривые изменения экспонент и их разности

1. Рассмотрим случай, когда корни характеристического уравнения вещественны и равны друг другу.

Это происходит при  $\delta = \omega_0$ , т.е. при  $R = 2\sqrt{L/C}$ . В этом случае  $p_1 = p_2 = -\delta$ . При этом выражения для тока и напряжения (9.39) и (9.40) становятся неопределенными из-за равенства нулю числителя и знаменателя. Раскроем эти неопределенности по правилу Лопиталя, считая, что  $p_1$  — переменная и стремится к  $p_2 = -\delta$ . Для тока получим

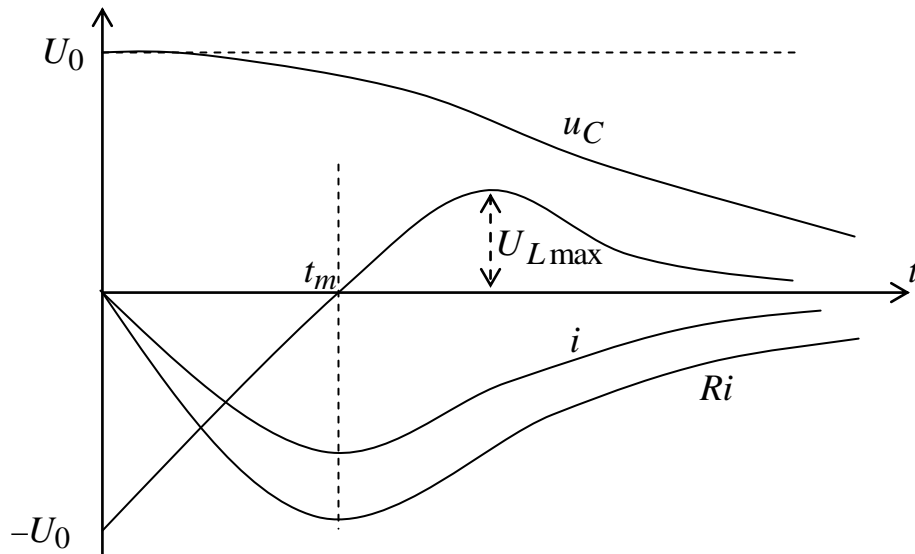


Рис. 9.14. Кривые изменения тока и напряжений на элементах при аперидическом разряде

$$i = -\frac{U_0}{L} \lim_{p_1 \rightarrow p_2} \frac{e^{p_1 t} - e^{p_2 t}}{p_1 - p_2} = -\frac{U_0}{L} t e^{p_2 t} = -\frac{U_0}{L} t e^{-\delta t}. \quad (9.41)$$

Для напряжений

$$\begin{cases} u_L = L \frac{di}{dt} = U_0(\delta t - 1)e^{-\delta t} \\ u_C = \frac{1}{C} \int_0^{\infty} i dt + U_0 = U_0(\delta t + 1)e^{-\delta t} \end{cases} \quad (9.42)$$

Характер процесса здесь также апериодический. Момент достижения током максимума абсолютного значения равен  $t_m = 1/\delta$ . Данный случай при  $\delta = \omega_0$  является предельным случаем апериодического разряда.

3. Пусть корни характеристического уравнения являются комплексными. Это имеет место при условии  $\delta < \omega_0$ , т.е. при  $R < 2\sqrt{L/C}$ . Обозначим  $\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} = \omega'$ . Тогда корни характеристического уравнения запишутся:

$$\begin{cases} p_1 = -\delta + \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} = -\delta + j\omega' = \omega_0 e^{j\Theta} \\ p_2 = -\delta - \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} = -\delta - j\omega' = \omega_0 e^{-j\Theta} \end{cases} \quad (9.43)$$

где  $\Theta = \arctg[\omega'/(\delta) + \pi]$ . Угол  $\Theta$  лежит в пределах  $\pi/2 < \Theta < \pi$ , так как  $\sin \Theta = \omega'/\omega_0 > 0$  и  $\cos \Theta = -\delta/\omega_0 < 0$ .

Переходный ток

$$\begin{aligned} i &= -\frac{U_0}{L(p_1 - p_2)} (e^{p_1 t} - e^{p_2 t}) = -\frac{U_0}{2j\omega' L} (e^{-\delta t} e^{j\omega' t} - e^{-\delta t} e^{-j\omega' t}) = \\ &= -\frac{U_0}{\omega' L} e^{-\delta t} \sin \omega' t = -I e^{-\delta t} \sin \omega' t. \end{aligned} \quad (9.44)$$

Уравнения для напряжений

$$\begin{cases} u_L = -\frac{U_0}{p_1 - p_2} (p_1 e^{p_1 t} - p_2 e^{p_2 t}) = \frac{U_0}{2j\omega'} (\omega_0 e^{j\Theta} e^{-\delta t} e^{j\omega' t} - \omega_0 e^{-j\Theta} e^{-\delta t} e^{-j\omega' t}) = \\ = -\frac{U_0 \omega_0}{2j\omega'} e^{-\delta t} (e^{j(\omega' t + \Theta)} - e^{-j(\omega' t + \Theta)}) = -U_0 \frac{\omega_0}{\omega'} e^{-\delta t} \sin(\omega' t + \Theta) \\ u_C = U_0 \frac{\omega_0}{\omega'} e^{-\delta t} \sin(\omega' t - \Theta). \end{cases} \quad (9.45)$$

На рис. 9.15 показаны кривые колебательного разряда конденсатора.

Кривая тока  $i$  подобна кривой  $Ri$ . Процесс в данном случае является колебательным. Ток и напряжение на всех участках периодически меняют знак. Амплитуда колебаний убывает по экспоненциальному закону, в цепи совершаются затухающие колебания. Угловая частота этих колебаний

$$\omega' = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} = \sqrt{1/(LC) - R^2/(4L^2)}.$$

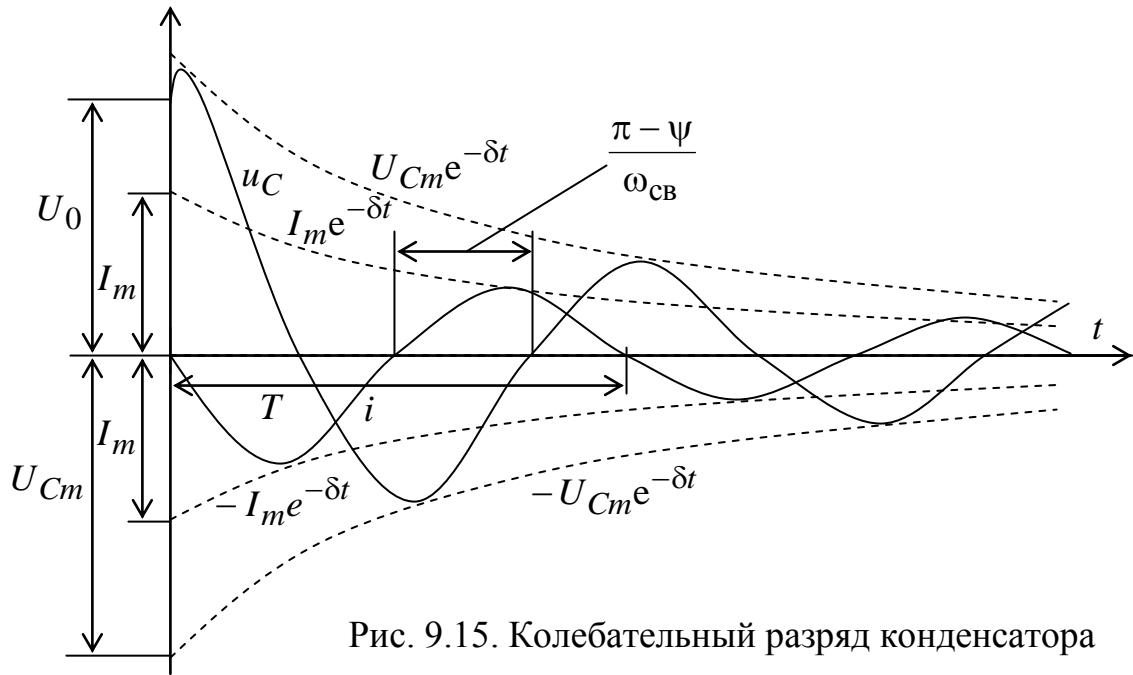


Рис. 9.15. Колебательный разряд конденсатора

В предельном случае  $R = 0$  имеем  $\delta = 0$  и  $\omega' = \omega_0$ ,  $T' = T_0 = 2\pi\sqrt{LC}$ . В этом случае колебания будут незатухающими. Период незатухающих колебаний и угловая частота этих колебаний:

$$T_0 = 2\pi\sqrt{LC}; \quad \omega_0 = 1/\sqrt{LC}.$$

Следовательно,  $\omega_0$  равна резонансной частоте контура.

Быстроту затухания тока принято характеризовать декрементом колебаний:

$$\Delta = \frac{Ie^{-\delta t}}{Ie^{-\delta(t+T')}} = e^{\delta T'}.$$

(9.46)

Логарифмический декремент колебаний

$$\upsilon = \ln \Delta = \delta T'. \quad (9.47)$$

При малом затухании

$$\upsilon = \delta T' \approx \delta T_0 = \frac{R}{2L} 2\pi\sqrt{LC} = \pi R\sqrt{C/L} = \pi d,$$

где  $d$  – затухание контура.

## 9.8. Включение $RLC$ контура под постоянное напряжение

Рассмотрим процесс при нулевых начальных условиях, т.е.  $i(0_-) = 0$ ,  $u_C(0_-) = 0$ .

Уравнение цепи запишется в виде

$$Ri + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int_0^t idt + u_C(0) = u(t). \quad (9.29)$$

Его решение

$$i = i_y + i_{св} = i_y + A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t}. \quad (9.35)$$

Ток установившегося режима равен нулю, поэтому

$$i = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t};$$

$$u_L = L \frac{di}{dt} = L(A_1 p_1 e^{p_1 t} + A_2 p_2 e^{p_2 t}).$$

Начальные условия:  $i(0) = 0 = A_1 + A_2$ .

Учитывая, что  $u_C(0) = 0$   $u(t) = U = \text{const}$ , при  $t = 0$  получим

$$L \left. \frac{di}{dt} \right|_{t=0} = L(A_1 p_1 + A_2 p_2) = U;$$

$$A_1 = -A_2 = \frac{U}{L(p_1 - p_2)};$$

$$\begin{cases} i = \frac{U}{L(p_1 - p_2)} (e^{p_1 t} - e^{p_2 t}) \\ u_C = \frac{1}{C} \int_0^t idt + u_C(0) = \frac{1}{C} \int_0^t idt = \frac{U}{p_1 - p_2} (p_2 e^{p_1 t} + p_1 e^{p_2 t}) + U \end{cases} \quad (9.48)$$

Закон изменения тока в этом и предыдущем случае один и тот же, только токи отличаются знаками. Напряжение на конденсаторе также изменяется по подобному закону, только в этом случае он заряжается (рис. 9.16 и 9.17).

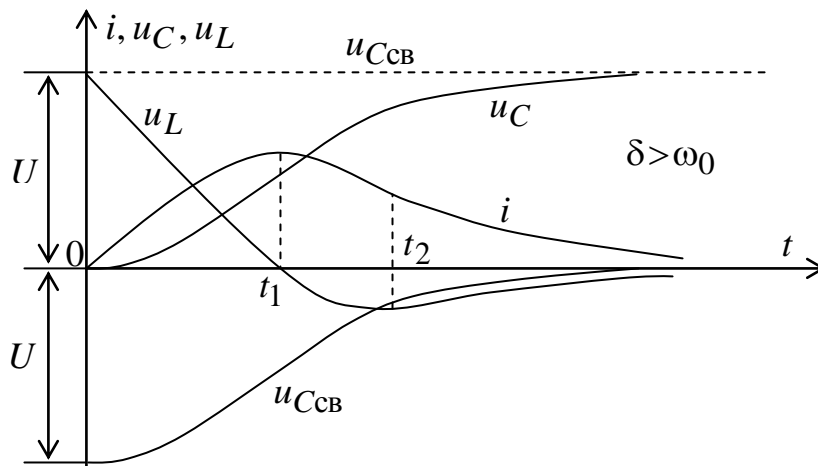


Рис. 9.16. Кривые тока и напряжений при аперодическом процессе

### 9.9. Включение цепи RLC под синусоидальное напряжение

Ток установившегося режима при приложенном напряжении  $u = U_m \sin(\omega t + \psi_u)$  будет равен  $i_y = I_m \sin(\omega t + \psi_i)$ ,

где  $I_m = \frac{U_m}{Z}$ ;  $Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$ ;  $\psi_i = \psi_u - \varphi$ ;  $\varphi = \arctg \frac{\omega L - 1/\omega C}{R}$ .

Пусть в начальный момент времени ток в цепи и напряжение на зажимах конденсатора равны нулю:  $i(0) = 0$  и  $u_C(0) = 0$ . Тогда

$$0 = I_m \sin \psi_i + A_1 + A_2;$$

$$L \frac{di}{dt} \Big|_{t=0} = U_m \sin \psi_u = L \frac{di'}{dt} \Big|_{t=0} + p_1 A_1 + p_2 A_2;$$

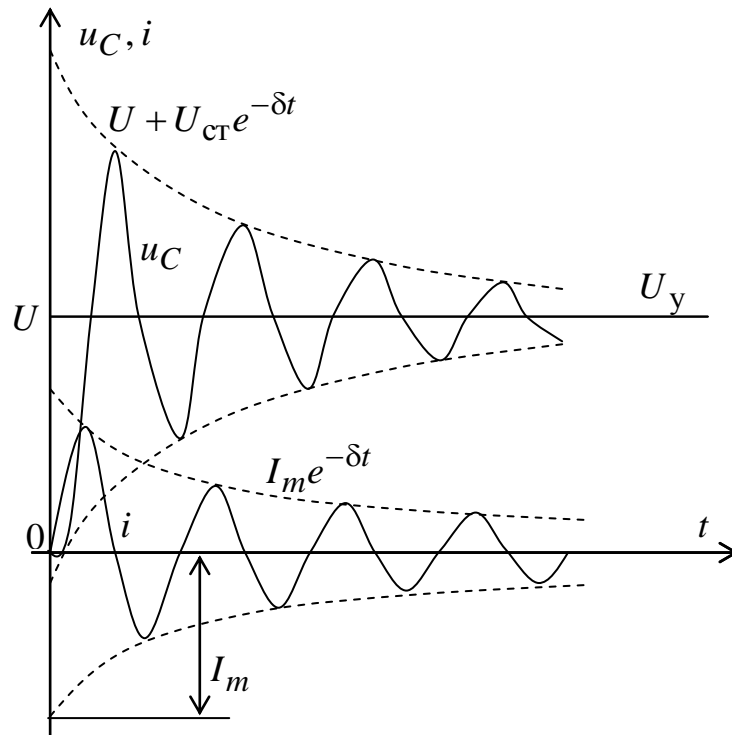


Рис. 9.17. Кривые тока и напряжения при колебательном процессе

$$\begin{aligned} U_m \sin \psi_u &= I_m Z \sin(\psi_i + \varphi) = I_m (Z \cos \varphi \cdot \sin \psi_i + Z \sin \varphi \cdot \cos \psi_i) = \\ &= I_m (R \sin \psi_i + X \cos \psi_i) = I_m \left[ R \sin \psi_i + \left( \omega L - \frac{1}{\omega C} \right) \cos \psi_i \right]; \end{aligned}$$

$$L \frac{di'}{dt} \Big|_{t=0} = \omega L I_m \cos \psi_i;$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{LC} &= \omega_0^2, \quad R/L = 2\delta, \quad \omega' = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}; \\ -I \frac{\omega_0}{\omega'} \cos \psi_i + I_m 2\delta \sin \psi_i &= p_1 A_1 + p_2 A_2; \\ \begin{cases} A_1 = -\frac{I_m}{p_1 - p_2} \left( p_1 \sin \psi_i + \frac{\omega_0^2}{\omega'} \cos \psi_i \right) \\ A_2 = \frac{I_m}{p_1 - p_2} \left( p_2 \sin \psi_i + \frac{\omega_0^2}{\omega'} \cos \psi_i \right) \end{cases}; \end{aligned} \quad (9.49)$$

$$\begin{aligned} i &= I_m \sin(\omega t + \psi_i) - I_m \frac{\sin \psi_i}{p_1 - p_2} (p_1 e^{p_1 t} - p_2 e^{p_2 t}) - \\ &\quad - I_m \frac{\cos \psi_i}{p_1 - p_2} \cdot \frac{\omega_0}{\omega'} (e^{p_1 t} - e^{p_2 t}); \end{aligned} \quad (9.50)$$

$$\begin{aligned} u_C &= \frac{1}{C} \int_0^t i dt + u_C(0) = \frac{1}{C} \int_0^t i dt = -I_m \frac{1}{\omega t} \cos(\omega t + \psi_i) - \\ &\quad - I_m \frac{\sin \psi_i}{C(p_1 - p_2)} (e^{p_1 t} - e^{p_2 t}) - I_m \frac{\cos \psi_i}{\omega C(p_1 - p_2)} (p_2 e^{p_1 t} - p_1 e^{p_2 t}). \end{aligned} \quad (9.51)$$

Для комплексных корней характеристического уравнения, т.е. когда  $\delta < \omega_0$  переходный процесс является колебательным. В этом случае можно записать:

$$\begin{cases} i = I_m \sin(\omega t + \psi_i) - \left[ \sin \psi_i \cdot \sin(\omega' t + \Theta) + \frac{\omega_0}{\omega} \cos \psi_i \cdot \sin \omega' t \right] \frac{\omega_0}{\omega'} I_m e^{-\delta t} \\ u_C = -\frac{I_m}{\omega C} \cos(\omega t + \psi_i) - \left[ \sin \psi_i \cdot \sin \omega' t + \frac{\omega_0}{\omega} \cos \psi_i \cdot \sin(\omega' t - \Theta) \right] \frac{I_m}{\omega'} e^{-\delta t} \end{cases} \quad (9.52)$$

Рассмотрим случаи, когда  $\omega' = \omega$  и  $\omega$  и  $\omega'$  близки, но не равны друг другу. При этом затухание будем предполагать малым, т.е.  $\delta \ll \omega_0$ .

Пусть  $\omega = \omega'$ . Принимая во внимание, что  $\delta \ll \omega_0$ , можно считать, что  $\omega' \approx \omega_0$  и  $\Theta \approx \pi/2$ . Тогда

$$\begin{cases} i \approx I_m (1 - e^{-\delta t}) \sin(\omega t + \psi_i) \\ u_C \approx -\frac{I_m}{\omega C} (1 - e^{-\delta t}) \cos(\omega t + \psi_i) \end{cases} \quad (9.53)$$

Кривая изменения тока в этом случае показана на рис. 9.18.

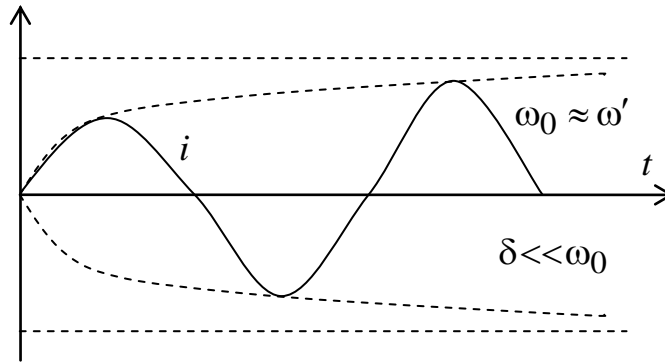


Рис. 9.18. Кривая изменения тока

Амплитуда тока и напряжения на конденсаторе постепенно нарастает от нуля до своего установившегося значения.

### 9.10. Переходные процессы в цепях со взаимной индуктивностью

Рассмотрим переходные процессы в цепи, у которой имеются две катушки с одинаковыми параметрами (для упрощения вычислений:  $R_1 = R_2 = R$  и  $L_1 = L_2 = L$ ) имеют индуктивную связь.

Вторая катушка замкнута накоротко, а первая подключается к источнику постоянного напряжения (рис. 9.19).

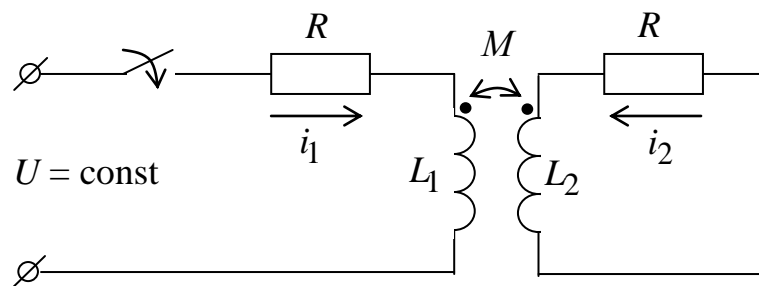


Рис. 9.19. Схема цепи со взаимной индуктивностью

Токи  $i_1$  и  $i_2$  связаны уравнениями:

$$Ri_1 + L \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} = U, \quad (9.28)$$

$$Ri_2 + L \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt} = 0. \quad (9.29)$$

В данном случае имеем нулевые начальные условия, т.е.  $i_1(0) = i_2(0) = 0$ .

Установившиеся значения токов –  $i_{1\text{уст}} = \frac{U}{R}$ ;  $i_{2\text{уст}} = 0$ .

Приравняв нулю главный определитель, найдем корни характеристического уравнения:

$$\begin{vmatrix} R + pL & pM \\ pM & R + pL \end{vmatrix} = 0,$$

откуда  $p_1 = -R/(L + M)$ ,  $p_2 = -R/(L - M)$ .

При этом токи будут равны

$$i_1 = U/R + A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t}, \quad (9.30)$$

$$i_2 = B_1 e^{p_1 t} + B_2 e^{p_2 t}. \quad (9.31)$$

Для нахождения постоянных интегрирования  $A_1$  и  $A_2$  находим  $\left. \frac{di_1}{dt} \right|_{t=0}$ .

Для этого умножим (9.28) на  $L$ , а (9.29) на  $M$  и вычтем его из первого уравнения при  $t = 0$ . Тогда

$$L^2 \left. \frac{di_1}{dt} \right|_{t=0} - M^2 \left. \frac{di_1}{dt} \right|_{t=0} = LU,$$

$$\text{откуда } \left. \frac{di_1}{dt} \right|_{t=0} = \frac{LU}{L^2 - M^2} = \frac{LU}{(L + M)(L - M)}.$$

При  $t = 0$

$$i_1(0) = U/R + A_1 + A_2;$$

$$\left. \frac{di_1}{dt} \right|_{t=0} = p_1 A_1 + p_2 A_2.$$

Отсюда  $A_1 = A_2 = -U/2R$ . Аналогично находим  $B_1 = -B_2 = -U/2R$ .

Тогда токи катушек будут равны

$$i_1 = \frac{U}{2R} \left( 2 - e^{-\frac{R}{L+M}t} - e^{-\frac{R}{L-M}t} \right);$$

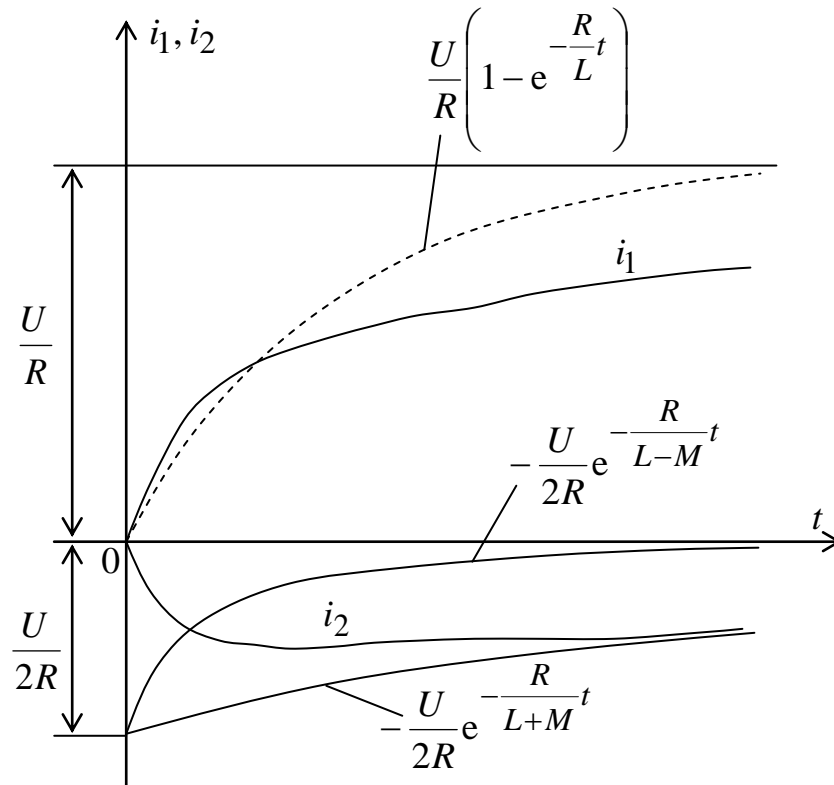
$$i_2 = -\frac{U}{2R} \left( e^{-\frac{R}{L+M}t} - e^{-\frac{R}{L-M}t} \right).$$

На рис. 9.20 построены кривые изменения токов  $i_1$  и  $i_2$ . Одна из свободных составляющих затухает медленнее, т.е. имеет большую постоянную времени, определяемую суммой индуктивности  $L$  и взаимной индуктивности  $M$ , а вторая затухает быстрее, так как ее постоянная времени определяется разностью  $L - M$ . Для сравнения на рис. 9.20 показано, как изменялся бы ток первой катушки при ее включении, если бы вторая была разомкнута (штриховая линия).



Поскольку при включении токи катушек имеют противоположные направления, механические силы их взаимодействия стремятся оттолкнуть их друг от друга.

Получаемая от источника энергия преобразуется частично в тепло – джоулевы потери обеих катушек, а частично запасается в магнитном поле обеих катушек.



## ЛЕКЦИЯ №18

### 10. РАСЧЕТ ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ ОПЕРАТОРНЫМ МЕТОДОМ

#### 10.1. Операторное изображение функций, их производных и интегралов

При использовании операторного метода действительные функции времени, называемые оригиналами, заменяются операторными изображениями. Соответствие между оригиналом и изображением устанавливается с помощью некоторого функционального преобразования. Это преобразование выбирается так, чтобы операции интегрирования и

дифференцирования оригиналов заменялись алгебраическими операциями над их изображениями. В этом случае дифференциальные уравнения для оригиналов переводят в алгебраические для их изображений.

Связь между оригиналом  $f(t)$  и его изображением устанавливается с помощью интеграла Лапласа:

$$F(p) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-pt} dt, \quad (10.1)$$

где  $p = G + j\eta$  – комплексное число.

Операторное изображение действительной функции  $f(t)$  является функцией комплексного числа  $p$ .

Для того чтобы интеграл Лапласа имел конечное значение, функция  $f(t)$  должна удовлетворять определенным условиям. Она должна удовлетворять условиям Дирихле: за любой конечный промежуток времени иметь конечное число разрывов первого рода и конечное число максимумов и минимумов. Кроме того, будем считать, что при  $t > 0$  удовлетворяется условие:  $|f(t)| < Ae^{\alpha t}$ , где  $A$  и  $\alpha$  – некоторые положительные числа. Все реальные токи и напряжения удовлетворяют этим условиям. Для того чтобы интеграл Лапласа имел конечное значение, необходимо полагать  $G > \alpha$ .

Комплексное число  $p$  называют оператором.

Условимся записывать преобразование Лапласа в виде

$$F(p) = L[f(t)]. \quad (10.2)$$

Соответствие между оригиналом и изображением

$$F(p) := f(t). \quad (10.3)$$

По определению, преобразование Лапласа применимо с момента  $t = 0_+$ . Обозначая значение функции и ее производных  $f(0)$ ,  $f'(0)$ ,  $f''(0)$  и т.д., будем понимать под ними их значение при  $t = 0_+$ .

Существует обратное функциональное преобразование Лапласа, по которому можно определить оригинал, зная его изображение. Его называют обратным преобразованием Лапласа:

$$\frac{1}{2\pi j} \int_{G_0 - j\omega}^{G_0 + j\omega} F(p)e^{pt} dp = f(t), \quad (10.4)$$

где  $p = G_0 + j\eta$ .

Обратное преобразование Лапласа кратко записывается в виде

$$L^{-1}[F(p)] = f(t). \quad (10.5)$$

Соответствие некоторых характерных функций и их изображений приведено в приложении.

В электротехнике распространено также функциональное преобразование, называемое преобразованием по Карсону:

$$p \int_0^{\infty} f(t)e^{-Pt} dt = pF(p) = \Phi(p). \quad (10.6)$$

Достоинством преобразования по Карсону является одинаковость размерностей оригинала и изображения. При преобразовании Лапласа размерность изображения равна размерности оригинала, умноженной на размерность времени.

Достоинством преобразования по Лапласу является его соответствие с преобразованием Фурье, на котором основывается широко используемый в настоящее время частотный метод анализа цепей. В дальнейшем будем использовать преобразование Лапласа.

Преобразование производной

$$f'(t) = pF(p) - f(0). \quad (10.7)$$

Изображение второй производной

$$f''(t) = p^2 \left[ F(p) - \frac{f(0)}{p} - \frac{f'(0)}{p^2} \right]. \quad (10.8)$$

Изображение производной  $n$ -го порядка

$$f^{(n)}(t) = p^n \left[ F(p) - \frac{f(0)}{p} - \frac{f'(0)}{p^2} - \dots - \frac{f^{(n-1)}(0)}{p^n} \right]. \quad (10.9)$$

При нулевых начальных значениях

$$f^{(n)}(t) = p^n F(p). \quad (10.10)$$

Изображение интеграла

$$\int_0^t f(t)dt = \frac{F(p)}{p}. \quad (10.11)$$

В дифференциальных уравнениях электрических цепей с производной во времени чаще всего встречаемся в напряжении на катушке:  $u_L = L \frac{di}{dt}$ .

Операторное изображение для  $u_L$

$$U_L(p) = pLi(p) - Li(0). \quad (10.12)$$

С интегралом чаще всего встречаемся в выражении напряжения на конденсаторе:  $u_C = \frac{1}{C} \int_0^t i dt + u_C(0)$ .

Изображение по Лапласу

$$U_C(p) = \frac{I(p)}{pC} + \frac{U_C(0)}{p}, \quad (10.13)$$

где  $U_C(0)/p$  – изображение постоянной величины  $u_C(0)$ .

Таким образом, при составлении уравнений цепи в операторной форме автоматически будут учитываться физические начальные условия – значения токов в катушках и напряжений на конденсаторах при  $t = 0$ .

Соответствие некоторых наиболее часто встречающихся функций их изображениям приведено в приложении. Более полно таблицы соответствия оригиналов и изображений приведены в справочниках по высшей математике.

При использовании преобразования Карсона следует умножить все изображения на  $p$ .

Изображение функции, смещенной во времени на величину  $x$ :

$$f(t - x) = e^{-px} F(p). \quad (10.14)$$

Если изображение смещено в комплексной плоскости на комплексное число  $\alpha$ , то

$$f(t)e^{-\alpha t} = F(p + \alpha). \quad (10.15)$$

## 10.2. Законы Ома и Кирхгофа в операторной форме

Первый закон Кирхгофа

$$\sum i_k = 0; \quad \sum I_k(p) = 0.$$

Второй закон Кирхгофа

$$\sum e_k = \sum u_k; \quad \sum E_k(p) = \sum U_k(p).$$

Правило составления операторных уравнений по I и II законам Кирхгофа точно такое, как для действительных токов.

Для  $k$ -ой ветви, содержащей элементы  $R, L, C$ :

$$u_k = R_k i_k + L_k \frac{di_k}{dt} + \frac{1}{C_k} \int_0^t i_k dt + u_{Ck}(0).$$

Операторное уравнение при ненулевых начальных условиях

$$U_k(p) = R_k I_k(p) + pL_k I_k(p) - L_k i_k(0) + \frac{I_k(p)}{pC_k} + \frac{u_{Ck}(0)}{p} \quad (10.16)$$

или

$$U_k(p) + L_k i_k(0) - \frac{u_{Ck}(0)}{p} = I_k(p) \left( R_k + pL_k + \frac{1}{pC_k} \right).$$

(10.17)

$$\text{Величину} \quad R_k + pL_k + \frac{1}{pC_k} = Z_k(p)$$

(10.18)

называют обобщенным, или операторным, сопротивлением ветви.

Операторная запись законов Кирхгофа

$$\begin{cases} \sum I_k(p) = 0 \\ \sum E_k(p) = \sum \left[ I_k(p)Z_k(p) - L_k i_k(0) + \frac{u_{Ck}(0)}{p} \right]. \end{cases} \quad (10.19)$$

Закон Ома для  $k$ -й ветви

$$I_k(p) = \frac{U_k(p) + L_k i_k(0) - u_{Ck}/p}{Z(p)}. \quad (10.20)$$

Следует отметить, что структура записи операторного сопротивления ветви и комплексное сопротивление той же ветви тождественны. Одно из другого можно получить заменой  $p$  на  $j\omega$ , т.е.  $Z_k(p) \rightarrow Z_k(j\omega)$ .

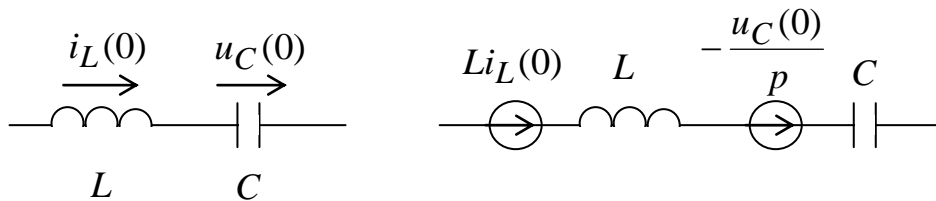
При нулевых начальных условиях способ расчета любых сложных цепей при переходных процессах операторным методом аналогичен способам расчета установившихся процессов комплексным методом.

При ненулевых начальных условиях II закон Кирхгофа можно записать

$$\sum E_k(p) + \sum L_k i_k(0) - \sum \frac{u_{Ck}(0)}{p} = \sum I_k(p)Z_k(p). \quad (10.21)$$

Рассматривая члены  $\sum L_k i_k(0)$  и  $\sum u_{Ck}(0)/p$  как ЭДС добавочных источников энергии в контурах, можно использовать все общие методы расчета сложных цепей.

Соответствие изображений индуктивности и конденсатора во временной и операторной областях показано на рис. 10.1.



**Рис. 10.1.** Соответствие изображений индуктивности и конденсатора с ненулевыми начальными условиями во временной

В частности, можно воспользоваться методом наложения и рассчитать процесс в цепи сначала при нулевых начальных условиях, а затем наложить на него процесс, возникающий только под действием одних добавочных ЭДС, т.е. обусловленный первоначальным запасом энергии в цепи.

Рассмотрим, как можно преобразовать операторные схемы при последовательном и параллельном соединениях нескольких участков.

Пусть цепь состоит из одного контура:

$$\sum E_k(p) = I(p) \sum Z_k(p) - i(0) \sum L_k + \sum \frac{u_{Ck}(0)}{p}.$$

Величина  $Z(p) = \sum Z_k(p)$  является операторным сопротивлением всей цепи. При последовательном соединении участков их операторные сопротивления складываются.

Рассмотрим параллельное соединение двух ветвей, в каждой из которых имеются элементы  $R, L, C$ :

$$\begin{cases} U(p) = I_1(p)Z_1(p) - L_1 i_1(0) + \frac{u_{C1}(0)}{p} \\ U(p) = I_2(p)Z_2(p) - L_2 i_2(0) + \frac{u_{C2}(0)}{p}, \end{cases}$$

где  $Z_1(p) = R_1 + L_1 p + \frac{1}{C_1 p}$ ;  $Z_2(p) = R_2 + L_2 p + \frac{1}{C_2 p}$ .

Суммарный ток в неразветвленной части цепи

$$I(p) = I_1(p) + I_2(p) = \frac{U(p) + L_1 i_1(0) - u_{C1}(0)/p}{Z_1(p)} + \frac{U(p) + L_2 i_2(0) - u_{C2}(0)/p}{Z_2(p)}.$$

Очевидно, что при ненулевых начальных условиях нельзя представить  $I(p)$  как произведение  $U(p)$  на некоторый множитель  $Y(p)$ , имеющий смысл операторной проводимости. Это можно записать только при нулевых начальных условиях:

$$I(p) = U(p) \left[ \frac{1}{Z_1(p)} + \frac{1}{Z_2(p)} \right] = U(p) Y(p).$$

Величина  $Y(p) = Y_1(p) + Y_2(p) = \frac{1}{Z_1(p)} + \frac{1}{Z_2(p)}$  называется

операторной проводимостью.

### 10.3. Расчет переходных процессов операторным методом

Рассмотрим сначала несколько простых примеров, исследованных ранее классическим методом.

1. При включении  $RL$ -цепи под постоянное напряжение  $u = U = \text{const}$  имеем

$$U(p) = U / p; \quad Z(p) = pL + R.$$

При нулевом начальном условии  $i(0) = 0$

$$I(p) = \frac{U(p)}{Z(p)} = \frac{U/p}{R + pL} = \frac{U}{R} \left( \frac{1}{p} - \frac{1}{p + R/L} \right).$$

Искомый ток

$$i(t) = \frac{U}{R} \left( 1 - e^{-\frac{R}{L}t} \right).$$

2. При включении  $RC$ -цепи под постоянное напряжение при  $u_C(0) = 0$  имеем

$$I(p) = \frac{U/p}{R + 1/pC} = \frac{U}{R} \cdot \frac{1}{p + 1/RC},$$

$$i(t) = \frac{U}{R} e^{-\frac{t}{RC}}.$$

3. При включении  $RLC$ -цепи под постоянное напряжение при нулевых начальных условиях

$$I(p) = \frac{U/p}{R + pL + \frac{1}{pC}} = \frac{U}{L} \cdot \frac{1}{p^2 + \frac{R}{L}p + \frac{1}{LC}} =$$

$$= \frac{U}{L} \cdot \frac{1}{\left(p + \frac{R}{2L}\right)^2 + \frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2} = \frac{U}{\omega' L} \cdot \frac{\omega'}{(p + \delta)^2 + \omega'^2},$$

где  $\delta = \frac{R}{2L}$ ;  $\omega'^2 = \omega_0^2 - \delta^2$ ;  $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$ .

Оригинал этого изображения

$$i(t) = \frac{U}{\omega' L} e^{-\delta t} \sin \omega' t.$$

4. Главное достоинство операторного метода для расчета переходных процессов, заключающееся в алгебраизации дифференциальных уравнений цепи, особенно проявляется при расчете сложных цепей. Ранее было доказано, что, учитывая члены  $L_k i_k(0)$  и  $u_{Ck}(0)/p$  как добавочные ЭДС, можно применить к расчету переходных процессов все методы расчета сложных цепей.

Рассмотрим переходный процесс в следующей цепи (рис. 10.2):

По методу контурных токов

$$\begin{cases} Z_{11}(p)I_{11}(p) + Z_{12}(p)I_{22}(p) = E_{11}(p) \\ Z_{21}(p)I_{11}(p) + Z_{22}(p)I_{22}(p) = E_{22}(p) \end{cases}$$

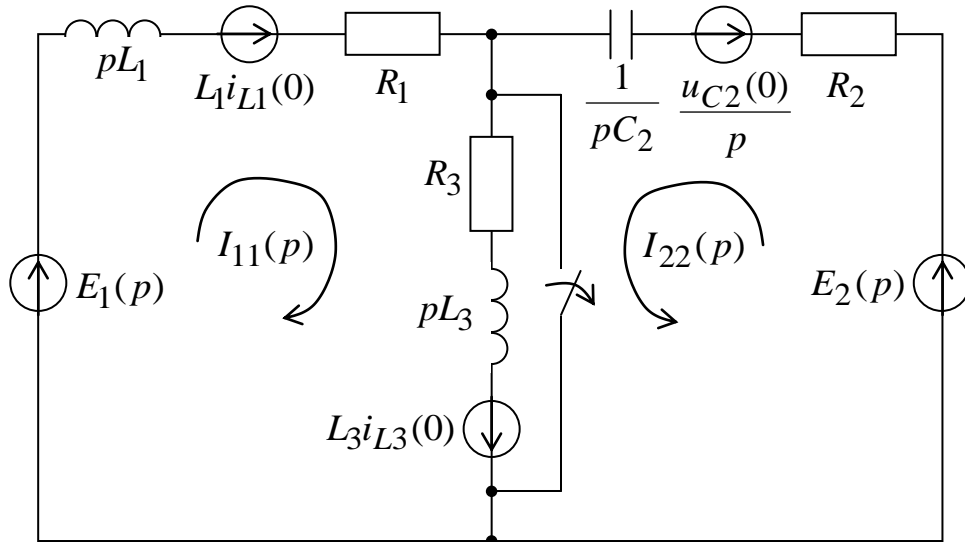


Рис. 10.2. Схема цепи

где

$$\begin{cases} Z_{11}(p) = R_1 + R_3 + p(L_1 + L_3) \\ Z_{12}(p) = Z_{21}(p) = R_3 + pL_3 \\ Z_{22}(p) = R_2 + R_3 + pL_3 + \frac{1}{pC_3}; \\ \begin{cases} E_{11}(p) = E_1(p) + L_1 i_{L1}(0) + L_3 i_{L3}(0) \\ E_{22}(p) = E_2(p) - \frac{u_{C2}(0)}{p} + L_3 i_{L3}(0). \end{cases} \end{cases}$$

Решение уравнений

$$\begin{cases} I_1(p) = \frac{Z_{22}(p)}{D(p)} E_{11}(p) - \frac{Z_{12}(p)}{D(p)} E_{22}(p) \\ I_2(p) = -\frac{Z_{21}(p)}{D(p)} E_{11}(p) - \frac{Z_{11}(p)}{D(p)} E_{22}(p), \end{cases}$$

где  $D(p) = Z_{11}(p) Z_{22}(p) - Z_{12}^2(p)$ .

Пусть  $e_1 = E_0 = \text{const}$ ;  $e_2 = E_m \sin \omega t$ .

Изображения этих функций

$$E_1(p) = \frac{E_0}{p}; \quad E_2(p) = \frac{E_m \omega}{p^2 + \omega^2}.$$



Если подставить эти изображения ЭДС в формулу для токов, то видно, что последнее представляет собой рациональную дробь, где числитель и знаменатель являются полиномами оператора  $p$ . Как правило, в таблицах формулы соответствия оригиналов и изображений приведены только для полиномов относительно низкого порядка.

#### 10.4. Переход от изображения к оригиналу. Теорема разложения

Для перехода к оригиналу необходимо представить изображение в виде рациональной дроби и заменить его простейшими слагаемыми, для которых известны оригиналы. Воспользуемся теоремой разложения.

Пусть имеется изображение в виде

$$X(p) = \frac{G(p)}{H(p)}, \quad (10.22)$$

где  $G(p)$  и  $H(p)$  – полиномы от  $p$ , причем будем полагать  $m < n$  ( $m$  – степень полинома в числителе,  $n$  – в знаменателе). Предположим, что  $H(p) = 0$  не имеет кратных корней, а также не имеет корней, равных корням уравнения  $G(p) = 0$ . При указанных условиях рациональную дробь можно разложить на простейшие дроби

$$\frac{G(p)}{H(p)} = \frac{A_1}{p - p_1} + \frac{A_2}{p - p_2} + \dots + \frac{A_n}{p - p_n} = \sum_{k=1}^n \frac{A_k}{p - p_k}, \quad (10.23)$$

где  $p_n$  – корни полинома  $H(p)$ .

Из алгебры известно, что

$$A_k = \frac{G(p_k)}{H'(p_k)}.$$

Таким образом,

$$X(p) = \frac{G(p)}{H(p)} = \sum_{k=1}^n \frac{A_k}{p - p_k} = \sum_{k=1}^n \frac{G(p_k)}{H'(p_k)} \cdot \frac{1}{p - p_k}. \quad (10.24)$$

Искомая величина

$$x(t) = \sum_{k=1}^n \frac{G(p_k)}{H'(p_k)} e^{p_k t}. \quad (10.25)$$

Выражение (10.25) называют теоремой разложения.

Если один из корней характеристического уравнения равен нулю, то

$$e^{p_1 t} = 1 \text{ и } X(p) \doteq x(t) = \frac{G(0)}{H'(0)} + \sum_{k=2}^n \frac{G(p_k)}{H'(p_k)} e^{p_k t} \quad (10.26)$$

Полином  $H(p)$  может иметь корень  $p_1 = 0$ , когда в цепи имеются источники постоянной ЭДС. Выделенный постоянный член представляет собой установившийся ток или напряжение в цепи.

Если  $H(p)$  имеет пару сопряженных чисто мнимых корней  $p_1 = j\omega$  и  $p_2 = -j\omega$ , то можно записать:

$$X(p) \doteq \frac{G(j\omega)}{H'(j\omega)} + \frac{G(-j\omega)}{H'(-j\omega)} + \sum_{k=3}^n \frac{G(p_k)}{H'(p_k)} e^{p_k t}. \quad (10.27)$$

Полином  $H(p)$  может иметь пару чисто мнимых сопряженных корней в случае, если рассматривается переходный процесс при наличии в цепи источников синусоидальных ЭДС. Два первых члена определяют синусоидальный ток или напряжение установившегося режима.

### Самостоятельная работа

Анализ переходных процессов в линейных электрических цепях классическим и операторным методами.

[Л 9.1.3, с. 273–278, 297–299]