

КУРС ЛЕКЦИЙ МОДУЛЯ №4

Содержание модуля 4. Трехфазные электрические цепи и несинусоидальные токи и напряжения в линейных электрических цепях

Тема 11. Трехфазные электрические цепи

Тема 12. Расчет электрических цепей при периодических несинусоидальных воздействиях

ЦЕПИ ТРЕХФАЗНОГО ТОКА

19.1. Основные понятия многофазных цепей

Многофазной системой называется совокупность электрических цепей, называемых фазами, в которых действуют синусоидальные напряжения одной и той же частоты, отличающиеся друг от друга по амплитуде и фазе.

Среди многофазных систем чаще используются симметричные многофазные системы, в которых ЭДС, напряжения и токи равны соответственно друг другу по величине и сдвинуты по фазе на угол

$$\alpha = 2 \cdot \pi / m, \quad (7.1)$$

где m – число фаз.

На практике встречаются двух-, трех-, шести- и двенадцатифазные системы.

Наибольшее распространение получила трехфазная система, созданная в 90-х годах 19-го столетия М.О. Доливо-Добровольским. При этом им был разработан трехфазный асинхронный двигатель – наиболее простой по конструкции преобразователь электрической энергии в механическую.

Схематичная конструкция трехфазного синхронного генератора показана на рис. 7.1.

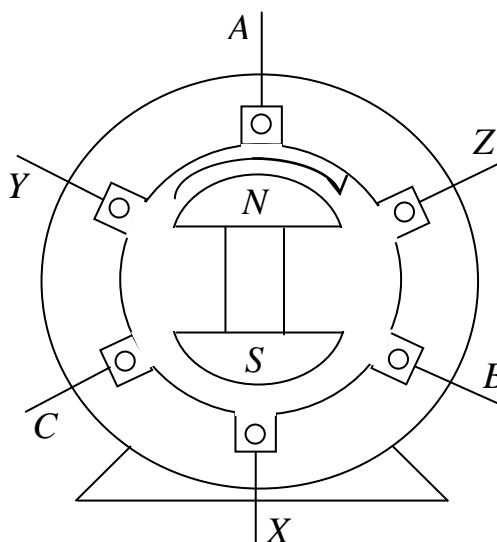


Рис. 7.1. Конструкция трехфазного синхронного генератора

Каждая из фаз обмотки статора здесь представлена двумя проводниками, образующими виток. Начала и концы обмоток фаз обозначены, соответственно, A-X, B-Y, C-Z. К ним подсоединяется внешняя цепь. Обмотки

статора сдвинуты в пространстве на угол $\alpha = 2 \cdot \pi / 3$ рад = 120 электрических градусов.

Ротор, представляющий собой электромагнит постоянного тока, выполняется таким образом, чтобы магнитное поле в воздушном зазоре распределялось по синусоидальному закону. Поэтому ротор, приводимый во вращение первичным двигателем, наводит в фазах обмотки статора синусоидальные ЭДС. Наводимые в обмотках ЭДС максимальны, когда ось полюсов ротора пересекает проводники статора. Для различных обмоток это происходит в разные моменты времени. Поэтому наводимые ЭДС не совпадают по фазам

$$\begin{cases} e_A = E_{mA} \sin(\omega t + \psi) \\ e_B = E_{mB} \sin(\omega t + \psi - 2\pi/3) \\ e_C = E_{mC} \sin(\omega t + \psi - 4\pi/3) = E_{mC} \sin(\omega t + \psi + 2\pi/3). \end{cases} \quad (7.2)$$

В дальнейшем будем полагать угол $\psi = 0$.

График изменения мгновенных значений ЭДС для этого случая изображен на рис. 7.2.

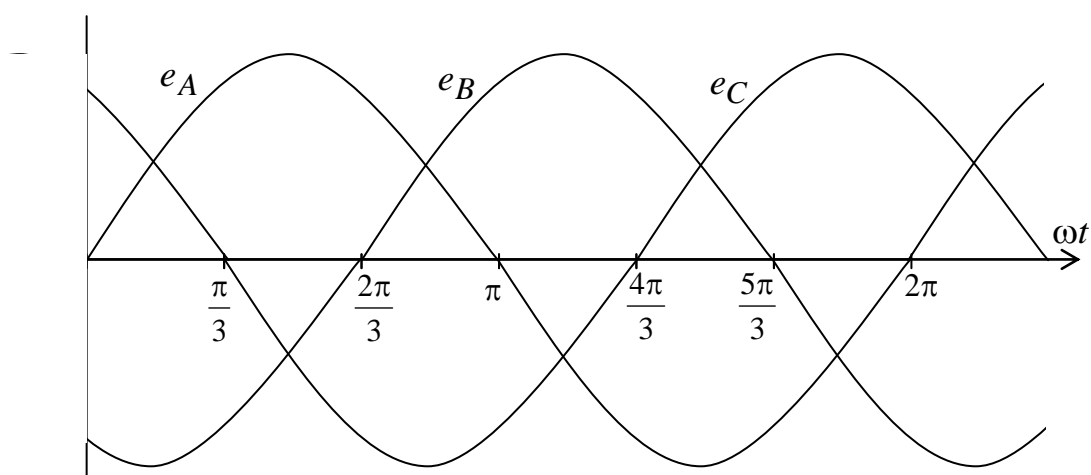


Рис. 7.2. График изменения мгновенных значений ЭДС

Комплексные действующие значения ЭДС запишутся как

$$\begin{cases} \underline{E}_A = \frac{E_{mA}}{\sqrt{2}} \\ \underline{E}_B = \frac{E_{mB}}{\sqrt{2}} \cdot e^{-j2\pi/3} \\ \underline{E}_C = \frac{E_{mC}}{\sqrt{2}} \cdot e^{-j4\pi/3} = \frac{E_{mC}}{\sqrt{2}} \cdot e^{j2\pi/3}. \end{cases} \quad (7.3)$$

Векторная диаграмма имеет вид, показанный на рис. 7.3.

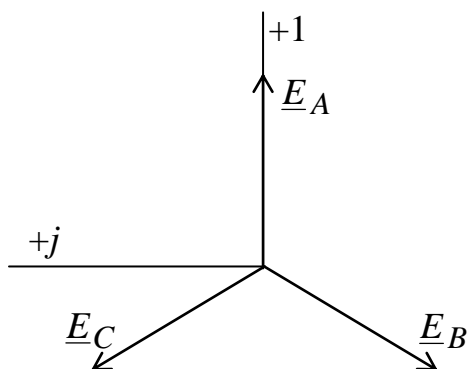


Рис. 7.3. Векторная диаграмма ЭДС

Порядок, в котором ЭДС генератора проходят максимум, называется последовательностью фаз или порядком чередования фаз. При указанном на рис.7.1 направлении вращения ротора последовательность фаз ABC . Если изменить направление вращения последовательность фаз будет обратной (ACB).

Рассмотренная совокупность ЭДС называется трехфазной системой ЭДС. Такая система называется симметричной, если все ЭДС (напряжения, токи) равны по амплитуде и сдвинуты между собой на один и тот же угол $2\pi/3$.

Если эти условия не выполняются, то система называется несимметричной. Несимметрия бывает трех видов:

- 1) амплитудная, когда $E_A \neq E_B \neq E_C$;
- 2) фазовая, когда $\psi_A - \psi_B \neq \psi_B - \psi_C \neq \psi_C - \psi_A$;
- 3) комбинированная, когда не равны друг другу и амплитуды, и фазовые сдвиги различных фаз.

19.2. Схемы соединения обмоток генератора и приемников

Впервые многофазные системы были применены П.Н. Яблочковым для питания изобретенных им электрических свечей. В его установках обмотки многофазных генераторов присоединялись к электрически не связанным друг с другом линиям, питающим отдельные группы свечей. Подобные многофазные системы называются несвязанными. На рис. 7.4 показана несвязанная трехфазная система.

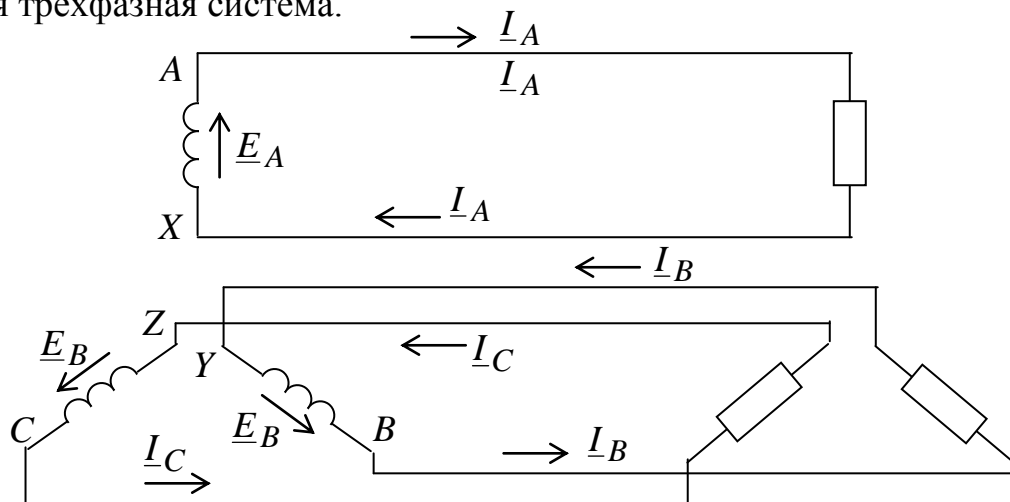


Рис. 7.4. Несвязанная трехфазная система

Существенным недостатком несвязанных систем является наличие большого числа проводов, что приводит к повышенному расходу проводниковых материалов и к увеличению электрических потерь в линиях. Поэтому в настоящее время применяются многофазные системы цепей, соединенные друг с другом, которые называются связанными. Связанная многофазная система образует одну сложную разветвленную цепь, поэтому она просто называется многофазной цепью.

Существует два основных способа соединения обмоток генераторов, трансформаторов и приемников: соединение «звездой» и соединение «треугольником» (для трехфазной цепи – «треугольником»).

При соединении «звездой» все концы фазных обмоток генератора объединяют в одну точку (рис. 7.5).

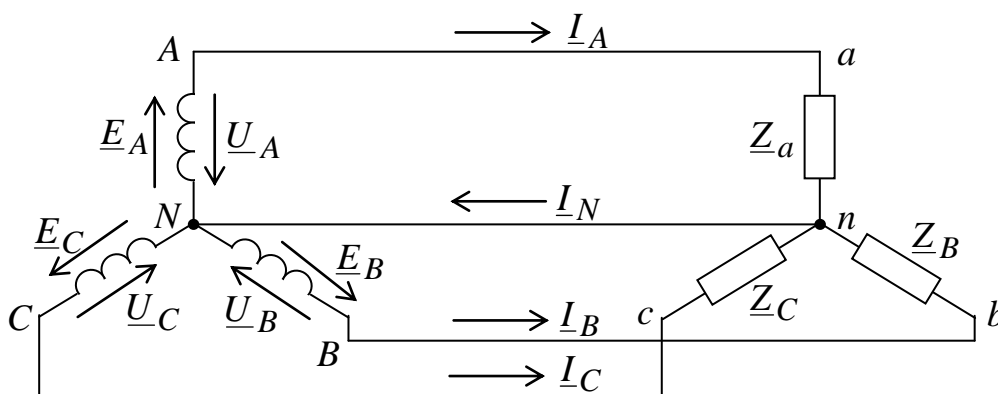


Рис. 7.5. Схема соединения «звезда с нейтральным проводом»

Общие точки фаз генератора и приемника называются нейтральными (N и n) или нулевыми (0 и 0_1), а соединяющий их провод – нейтральным или нулевым. Остальные провода, соединяющие фазы генератора и приемника, называются линейными. При соединении «треугольником» (рис. 7.6) фазные обмотки генераторов соединяются последовательно таким образом, чтобы начало последующей обмотки соединялось с концом предыдущей.

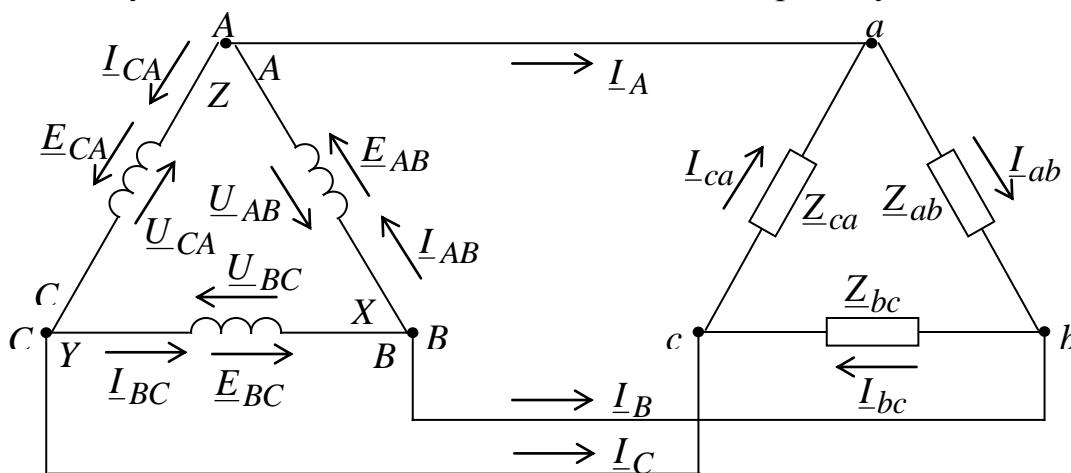


Рис. 7.6. Соединение фаз источника и нагрузки «треугольником»

Последовательное кольцевое соединение обмоток генератора не приводит к их короткому замыканию, как это было бы при подобном соединении аккумуляторов, так как в симметричной системе сумма ЭДС, действующих в контуре треугольника, в любой момент времени равна нулю

$$\begin{aligned} e &= E_m \left[\sin \omega t + \sin \left(\omega t - \frac{2\pi}{3} \right) + \sin \left(\omega t + \frac{2\pi}{3} \right) \right] = \\ &= | \sin(x \pm y) = \sin x \cdot \cos y \pm \sin y \cdot \cos x | = \\ &= E_m \left(\sin \omega t + \sin \omega t \cdot \cos \frac{2\pi}{3} - \cos \omega t \cdot \sin \frac{2\pi}{3} + \right. \\ &\quad \left. + \sin \omega t \cdot \cos \frac{2\pi}{3} + \cos \omega t \cdot \sin \frac{2\pi}{3} \right) = \\ &= E_m \sin \omega t \cdot \left(1 + 2 \cdot \cos \frac{2\pi}{3} \right) = 0. \end{aligned}$$

Схемы соединения обмоток источника и приемников не зависят друг от друга. В одной и той же цепи могут быть различные схемы соединения источника и приемников.

Лучи звезды или ветви треугольника называются фазами приемника или генератора. Сопротивления фаз называются фазными сопротивлениями. ЭДС, наводимые в фазах источника, напряжения на фазах источника и приемника, токи в фазах называются, соответственно, фазными ЭДС, напряжениями и токами (E_{ϕ} , U_{ϕ} , I_{ϕ}). Напряжения между линейными проводами и токи в них называются линейными напряжениями и токами ($U_{\text{л}}$, $I_{\text{л}}$).

Необходимо отметить, что для схемы «звезда» токи в фазах равны линейным ($I_{\phi} = I_{\text{л}}$), а для схемы «треугольник» равны между собой соответствующие фазные и линейные напряжения ($U_{\phi} = U_{\text{л}}$).

Принятые положительные направления ЭДС, напряжений и токов показаны на рис. 7.5 и 7.6.

20.1. Симметричный режим трехфазной цепи

Трехфазная цепь и трехфазный приемник называются симметричными, если комплексные сопротивления всех фаз одинаковы:

$$\underline{Z}_a = \underline{Z}_b = \underline{Z}_c = \underline{Z}$$

или

$$Z_a = Z_b = Z_c = Z \quad \text{è} \quad \varphi_a = \varphi_b = \varphi_c = \varphi.$$

В противном случае они называются несимметричными.

Будем рассматривать работу трехфазных цепей, когда к ним приложена симметричная система напряжений.

20.1.1. Соединение «звездой»

На рис. 7.7 показано соединение нагрузки «звездой» с нейтральным проводом.

К каждой фазе приемника прикладывается соответствующее напряжение источника. Напряжения источника образуют симметричную систему векторов.

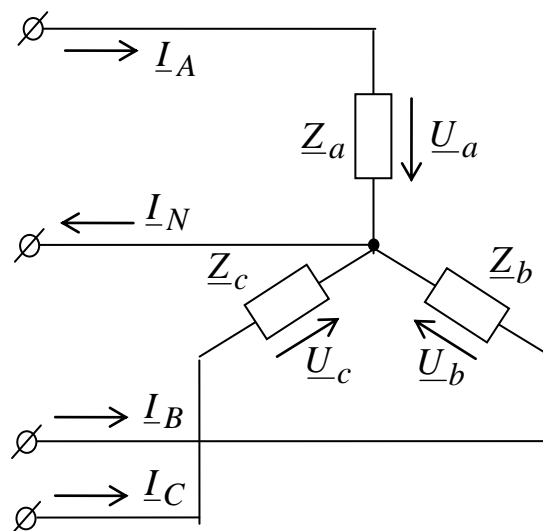


Рис. 7.7. Соединение нагрузки «звездой» с нейтральным проводом

Так как $Z_a = Z_b = Z_c = Z$, то каждый из векторов токов сдвинут относительно фазного напряжения на один и тот же угол φ , и, следовательно, векторы фазных токов также образуют симметричную систему. Если сопротивления приемника носят активно-индуктивный характер ($\varphi > 0$), то векторная диаграмма токов и напряжений имеет следующий вид (рис. 7.8).

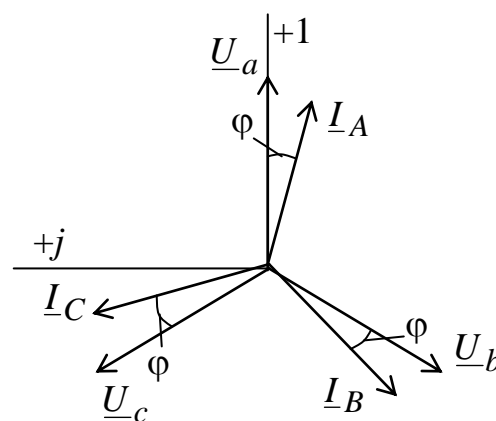


Рис. 7.8. Векторная диаграмма при активно-индуктивной нагрузке

Ток в нейтральном проводе будет равен нулю:

$$\underline{I}_N = \underline{I}_A + \underline{I}_B + \underline{I}_C = 0.$$

В этом можно убедиться, если просуммировать проекции векторов токов на действительную и мнимую оси. Отсутствие тока в нулевом проводе делает его не нужным. Поэтому для симметричных приемников можно не применять нулевой провод.

Линейные напряжения определяются как разность фазных напряжений

$$\begin{cases} \underline{U}_{AB} = \underline{U}_A - \underline{U}_B \\ \underline{U}_{BC} = \underline{U}_B - \underline{U}_C \\ \underline{U}_{CA} = \underline{U}_C - \underline{U}_A \end{cases} \quad (7.4)$$

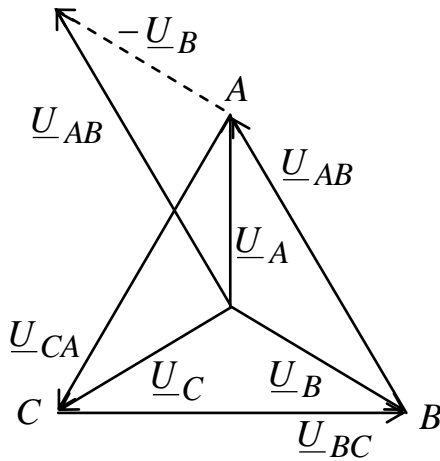


Рис. 7.9. Топографическая диаграмма напряжений

Топографическая диаграмма напряжений имеет вид, показанный на рис. 7.9.

Рассматривая треугольник ANB и учитывая, что $U_A = U_B = U_C = U_\phi$ и $U_{AB} = U_{BC} = U_{CA} = U_\Delta$, будем иметь

$$U_{AB} = U_A \cos 30^\circ + U_B \cos 30^\circ =$$

$$= 2U_\phi \sqrt{3}/2 = \sqrt{3}U_\phi = U_\Delta$$

Линейные и фазные токи равны друг другу. Следовательно, в симметричной трехфазной системе:

$$U_\Delta = \sqrt{3}U_\phi, \quad I_\Delta = I_\phi.$$

20.1.2. Соединение «треугольником»

К каждой фазе приемника с сопротивлением $Z_{ab} = Z_{bc} = Z_{ca} = Z$ прикладывается линейное напряжение источника (рис. 7.10). Векторная диаграмма напряжений образует звезду. Причем линейные напряжения равны фазным

$$U_{ab} = U_{bc} = U_{ca} = U_\Delta = U_\phi.$$

Фазные токи сдвинуты относительно соответствующих напряжений на угол ϕ . Линейные токи в соответствии с первым законом Кирхгофа определяются как разность фазных токов:

$$\begin{cases} \underline{I}_A = \underline{I}_{ab} - \underline{I}_{ca} \\ \underline{I}_B = \underline{I}_{bc} - \underline{I}_{ab} \\ \underline{I}_C = \underline{I}_{ca} - \underline{I}_{bc} \end{cases} \quad (7.5)$$

Из этой системы следует, что сумма линейных токов $\sum_{k=1}^3 \underline{I}_k = 0$,

т.е. на векторной диаграмме они образуют замкнутый треугольник токов.

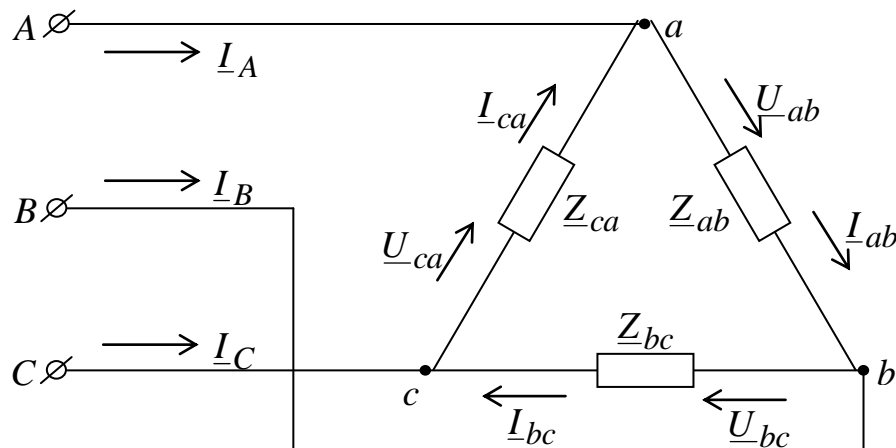


Рис. 7.10. Соединение нагрузки «треугольником»

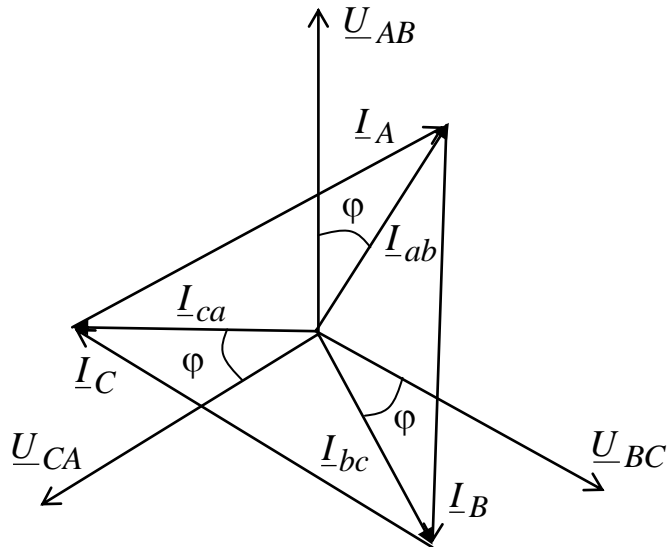


Рис. 7.11. Векторная диаграмма токов и напряжений при соединении нагрузки «треугольником»

Для активно-индуктивной нагрузки ($\varphi > 0$) векторная диаграмма имеет вид, показанный на рис. 7.11. Так как линейные токи образуют равносторонний треугольник, то фазные и линейные токи находятся в соотношении

$$I_{\text{л}} = \sqrt{3}I_{\text{ф}}.$$

Таким образом, в симметричной трехфазной цепи при соединении «треугольником» имеем соотношение

$$U_{\text{ф}} = U_{\text{л}}; \quad I_{\text{л}} = \sqrt{3}I_{\text{ф}}.$$

В целом необходимо отметить, что сумма линейных напряжений (всегда) и сумма линейных токов (в трехпроводной цепи) равны нулю.

20.1.3. Мощность в симметричной трехфазной системе

Мощность трехфазного приемника можно определить как сумму мощностей отдельных фаз.

Для соединения «звездой»

$$\begin{aligned} \underline{S} &= \overset{*}{\underline{U}}_a \overset{*}{\underline{I}}_a + \overset{*}{\underline{U}}_b \overset{*}{\underline{I}}_b + \overset{*}{\underline{U}}_c \overset{*}{\underline{I}}_c = \\ &= U_a I_a e^{j(\psi_{u_a} - \psi_{i_a})} + U_b I_b e^{j(\psi_{u_b} - \psi_{i_b})} + U_c I_c e^{j(\psi_{u_c} - \psi_{i_c})}. \end{aligned}$$

Для соединения «треугольником»

$$\underline{S} = \overset{*}{\underline{U}}_{ab} \overset{*}{\underline{I}}_{ab} + \overset{*}{\underline{U}}_{bc} \overset{*}{\underline{I}}_{bc} + \overset{*}{\underline{U}}_{ca} \overset{*}{\underline{I}}_{ca} =$$

$$= U_{ab} I_{ab} e^{j(\psi_{u_{ab}} - \psi_{i_{ab}})} + U_{bc} I_{bc} e^{j(\psi_{u_{bc}} - \psi_{i_{bc}})} + U_{ca} I_{ca} e^{j(\psi_{u_{ca}} - \psi_{i_{ca}})}.$$

Так как в симметричной трехфазной системе фазные напряжения, токи и углы сдвига фаз равны между собой, то мощность будет равна

$$\underline{S} = 3U_{\phi} I_{\phi} e^{j\varphi}.$$

Принимая во внимание, что при соединении ветвей приемника «звездой» $U_{\text{л}} = \sqrt{3}U_{\phi}$; $I_{\text{л}} = I_{\phi}$, а при соединении «треугольником» $U_{\text{л}} = U_{\phi}$; $I_{\text{л}} = \sqrt{3}I_{\phi}$, мощность в обоих случаях будет выражаться одной и той же формулой

$$\underline{S} = 3U_{\phi} I_{\phi} e^{j\varphi} = 3 \frac{U_{\text{л}} I_{\text{л}} e^{j\varphi}}{\sqrt{3}} = \sqrt{3} U_{\text{л}} I_{\text{л}} e^{j\varphi}.$$

При этом модуль полной мощности, активная и реактивная мощности запишутся как

$$S = \sqrt{3} U_{\text{л}} I_{\text{л}};$$

$$P = \sqrt{3} U_{\text{л}} I_{\text{л}} \cos \varphi;$$

$$Q = \sqrt{3} U_{\text{л}} I_{\text{л}} \sin \varphi.$$

Нельзя забывать, что в этих выражениях угол φ является углом сдвига фаз между фазными токами и напряжениями.

Мгновенное значение мощности симметричной трехфазной системы постоянно во времени. Докажем это на примере соединения «звездой».

Пусть в трехфазной системе существуют следующие токи и напряжения:

$$u_A = \sqrt{2} U_{\phi} \sin \omega t;$$

$$u_B = \sqrt{2} U_{\phi} \sin(\omega t - 2\pi/3);$$

$$u_C = \sqrt{2} U_{\phi} \sin(\omega t + 2\pi/3);$$

$$i_A = \sqrt{2} I_{\phi} \sin(\omega t - \varphi);$$

$$i_B = \sqrt{2} I_{\phi} \sin(\omega t - \varphi - 2\pi/3);$$

$$i_C = \sqrt{2} I_{\phi} \sin(\omega t - \varphi + 2\pi/3).$$

Тогда

$$p_a = u_a \cdot i_a = 2U_{\phi} I_{\phi} \sin \omega t \cdot \sin(\omega t - \varphi) =$$

$$= U_{\hat{\delta}} I_{\hat{\delta}} \cos \varphi - U_{\hat{\delta}} I_{\hat{\delta}} \cos(2\omega t - \varphi);$$

$$p_b = u_b \cdot i_b = 2U_{\phi} I_{\phi} \sin(\omega t - 2\pi/3) \cdot \sin(\omega t - \varphi - 2\pi/3) =$$

$$= U_{\hat{\delta}} I_{\hat{\delta}} \cos \varphi - U_{\hat{\delta}} I_{\hat{\delta}} \cos(2\omega t - \varphi - 2\pi/3);$$

$$p_c = u_c \cdot i_c = 2U_{\phi} I_{\phi} \sin(\omega t + 2\pi/3) \cdot \sin(\omega t - \varphi + 2\pi/3) =$$

$$= U_{\hat{\delta}} I_{\hat{\delta}} \cos\varphi - U_{\hat{\delta}} I_{\hat{\delta}} \cos\left(2\omega t - \varphi - 4\pi/3\right);$$

$$p = p_a + p_b + p_c = 3U_{\phi} I_{\phi} \cos\varphi - U_{\phi} I_{\phi} [\cos(2\omega t - \varphi) +$$

$$+ \cos(2\omega t - \varphi - 2\pi/3) + \cos(2\omega t - \varphi - 4\pi/3)] = 3U_{\phi} I_{\phi} \cos\varphi.$$

Сумма переменных гармонических составляющих двойной частоты, заключенных в скобки, равна нулю. Поэтому мгновенная мощность в симметричной системе $p = 3U_{\phi} I_{\phi} \cos\varphi = P$ является величиной постоянной, независимой от времени.

Подобные многофазные системы называются уравновешенными. Применение уравновешенных систем благотворно сказывается на работе электрических машин, так как при этом значение мгновенного момента на их валу остается постоянным.

21.1. Расчет симметричных трехфазных цепей

Рассмотрим принцип расчета трехфазных симметричных цепей на конкретном примере цепи (рис. 7.12).

В цепи имеются приемники различных групп одинаковых сопротивлений, включенных не только в рассечку линий, но и по схеме звезда и треугольник.

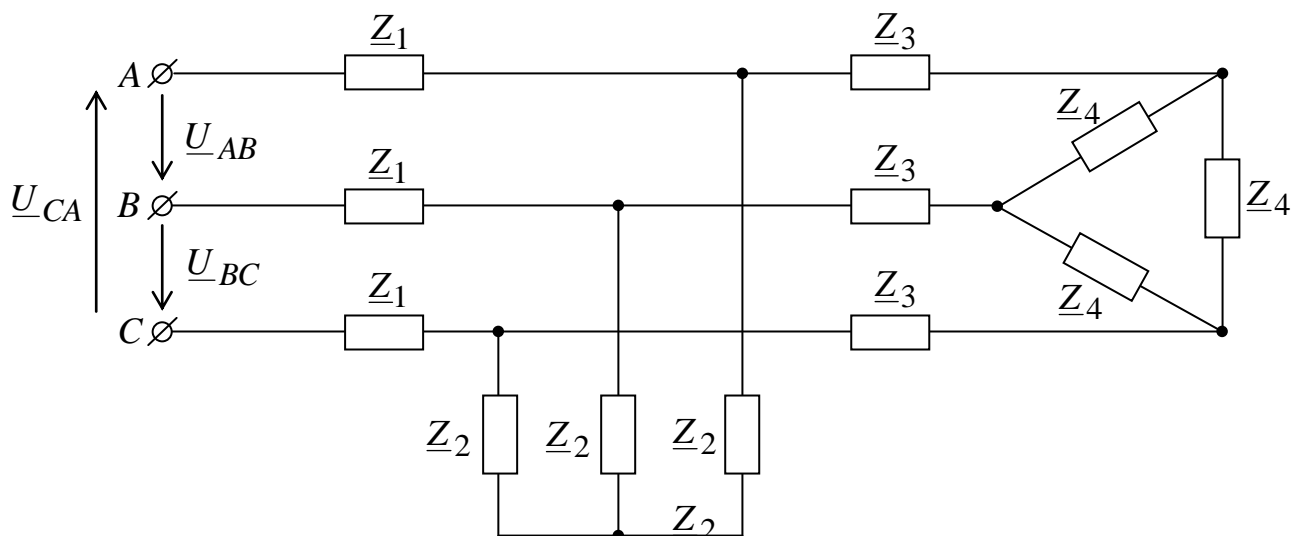


Рис. 7.12. Смешанное соединение симметричной нагрузки

Заданы линейные напряжения $U_{AB} = U_{BC} = U_{CA}$. В симметричной цепи режимы работы разных фаз отличаются только начальными фазами. При этом, отличие всех величин одной фазы от соответствующих другой одинаково. Это позволяет рассчитывать режим всей цепи по параметрам режима одной из фаз, составив для нее эквивалентную схему.

Для получения эквивалентной схемы в рассматриваемом примере целесообразно заменить треугольник сопротивлений Z_4 эквивалентной

«звездой» сопротивлений \underline{Z}_4 , используя ранее выведенные формулы (см. 1.15). Вследствие равенства сопротивлений сторон треугольника сопротивлениям лучей звезды будут одинаковы. Поэтому можно использовать любую из формул пересчета, например, для первого луча:

$$\underline{Z}_Y = \frac{\underline{Z}_{12} \cdot \underline{Z}_{31}}{\underline{Z}_{12} + \underline{Z}_{23} + \underline{Z}_{31}} = \left| \begin{array}{l} \underline{Z}_{12} = \underline{Z}_{21} \\ \underline{Z}_{31} = \underline{Z}_4 \end{array} \right| = \frac{\underline{Z}_4^2}{3\underline{Z}_4} = \frac{\underline{Z}_4}{3}.$$

Схема цепи после эквивалентной замены будет иметь вид, показанный на рис. 7.13.

В симметричной цепи все нейтральные (нулевые) точки имеют одинаковый потенциал. Поэтому точки n_1, n_2 можно соединить проводом, не нарушая этим режим работы цепи (на схеме – пунктирная линия). Очевидно, относительно потенциала этих точек определяются фазные напряжения U_A, U_B, U_C , величина которых в $\sqrt{3}$ раз меньше заданных линейных.

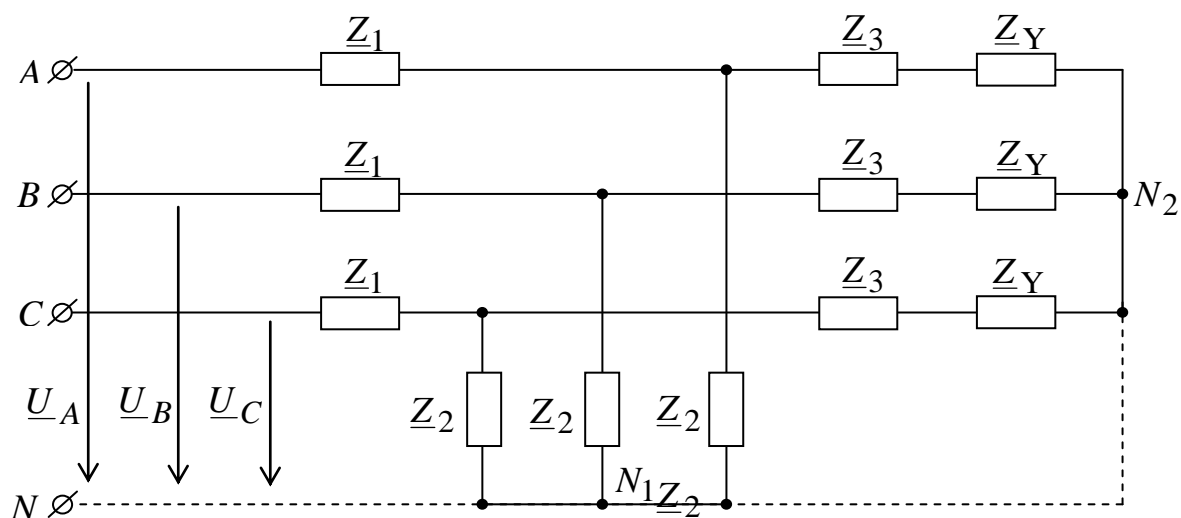


Рис. 7.13. Схема цепи после преобразования

В симметричной цепи сопротивления всех фаз одинаковы; одинаковы и сопротивления в соответствующих группах. Поэтому выделим из цепи какую-либо одну фазу, отбросив все другие. В качестве примера на рис. 7.14 изображена схема фазы A .

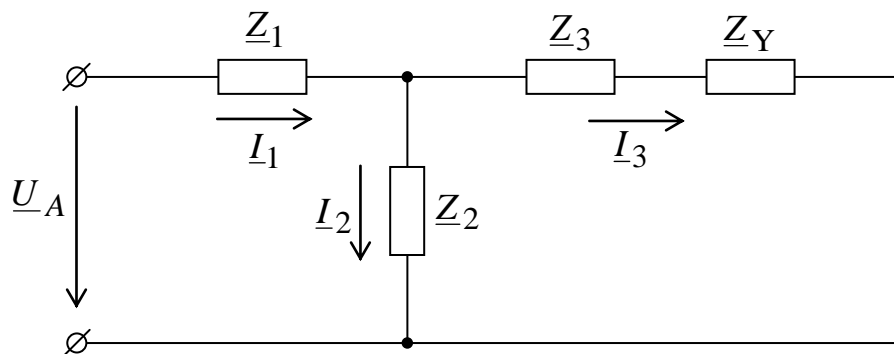


Рис. 7.14. Расчетная схема фазы A

Токи в этой схеме могут быть легко рассчитаны, например, методом преобразования. В каждом из элементов любой из групп ток сдвинут по фазе относительно токов в других элементах той же группы на равные углы $\pm 2\pi/3$. При переходе от токов эквивалентной звезды сопротивлений к фазным токам исходного треугольника следует иметь в виду, что при расчете однофазной схемы будет рассчитан ток I_3 , являющийся линейным током треугольника сопротивлений исходной схемы. В этом случае ток в фазах треугольника будет в $\sqrt{3}$ раз меньше линейного тока.

21.2. Расчет несимметричных режимов трехфазных цепей с нагрузкой статического характера

Трехфазные электрические двигатели при конструктивной симметрии магнитной цепи и симметричной системе напряжения питания можно заменять эквивалентными схемами, состоящими из трех одинаковых сопротивлений, соединяемых «звездой» или «треугольником». При несимметрии напряжения питания, а также при конструктивной несимметрии машины такая эквивалентная замена оказывается недопустимой вследствие возникающего влияния режима работы (например, частоты вращения) на величину составляющих комплексного сопротивления отдельных фаз. Поэтому несимметричные режимы трехфазных цепей приходится рассчитывать иными методами, среди которых большое развитие получил метод симметричных составляющих, который будет рассмотрен позднее. Сейчас будем рассматривать несимметричный режим цепей при условии так называемой статической нагрузки, т.е. такой нагрузки, когда сопротивления фаз различны, но независимы от протекающего тока и не влияют друг на друга. Кроме того, не будем учитывать падения напряжения на внутренних сопротивлениях фаз источника. Схема цепи представлена на рис. 7.15.

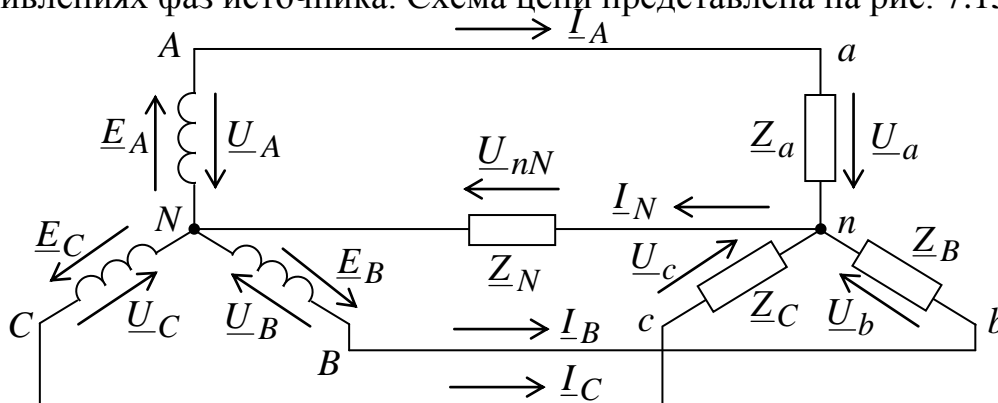


Рис. 7.15. Расчетная схема несимметричной нагрузки

Пусть известна несимметричная система фазных напряжений источника U_A, U_B, U_C . Неучет падений напряжения на внутренних

сопротивлениях фаз источника позволяет заданные напряжения приписать ЭДС самого источника, т.е. положить $\underline{U}_A = \underline{E}_A$, $\underline{U}_B = \underline{E}_B$, $\underline{U}_C = \underline{E}_C$. В этой схеме два узла, поэтому для определения напряжения между нулевыми точками приемника и источника можно применить метод двух узлов. Положив $\varphi_N = 0$, будем иметь

$$\underline{\varphi}_n = \underline{U}_{nN} = \frac{\underline{Y}_a \underline{U}_A + \underline{Y}_b \underline{U}_B + \underline{Y}_c \underline{U}_C}{\underline{Y}_a + \underline{Y}_b + \underline{Y}_c + \underline{Y}_N}, \quad (7.8)$$

где $\underline{Y}_a = 1/\underline{Z}_a$, $\underline{Y}_b = 1/\underline{Z}_b$, $\underline{Y}_c = 1/\underline{Z}_c$, $\underline{Y}_N = 1/\underline{Z}_N$ – проводимости ветвей, присоединенных к узлу n .

Зная напряжение \underline{U}_{nN} между нейтральными точками и учитывая равенство $\varphi_N = 0$, можно найти токи в линиях по закону Ома:

$$\begin{aligned} \underline{I}_A &= \frac{-(\varphi_n - \varphi_N) + \underline{U}_A}{\underline{Z}_a} = (\underline{U}_A - \varphi_n) \underline{Y}_a = (\underline{U}_A - \underline{U}_{nN}) \underline{Y}_a, \\ \underline{I}_B &= \frac{-\varphi_n + \underline{U}_B}{\underline{Z}_b} = (\underline{U}_B - \underline{U}_{nN}) \underline{Y}_b, \\ \underline{I}_C &= \frac{-\varphi_n + \underline{U}_C}{\underline{Z}_c} = (\underline{U}_C - \underline{U}_{nN}) \underline{Y}_c, \\ \underline{I}_N &= \frac{\underline{U}_{nN}}{\underline{Z}_N} = \underline{U}_{nN} \underline{Y}_N, \end{aligned}$$

Векторная и топографическая диаграмма напряжений, соответствующая одному из возможных несимметричных режимов, изображена на рис.7.16.

Интерес представляют два предельных случая.

Случай 1. Нулевые точки источника и приемника соединены толстым медным проводом, а расстояние между ними настолько мало, что можно считать $Z_N = 0$ ($Y_N = \infty$).

В этом случае $\underline{U}_{nN} = 0$ и, следовательно, напряжения на фазах приемника равны фазным напряжениям источника питания ($\underline{U}_A = \underline{U}_a$, $\underline{U}_B = \underline{U}_b$, $\underline{U}_C = \underline{U}_c$). Ток в каждой фазе может быть рассчитан по закону Ома независимо от токов других фаз. (Расчет становится похожим на расчет токов в симметричной системе, однако его необходимо выполнять для всех трех фаз, а не для одной.)

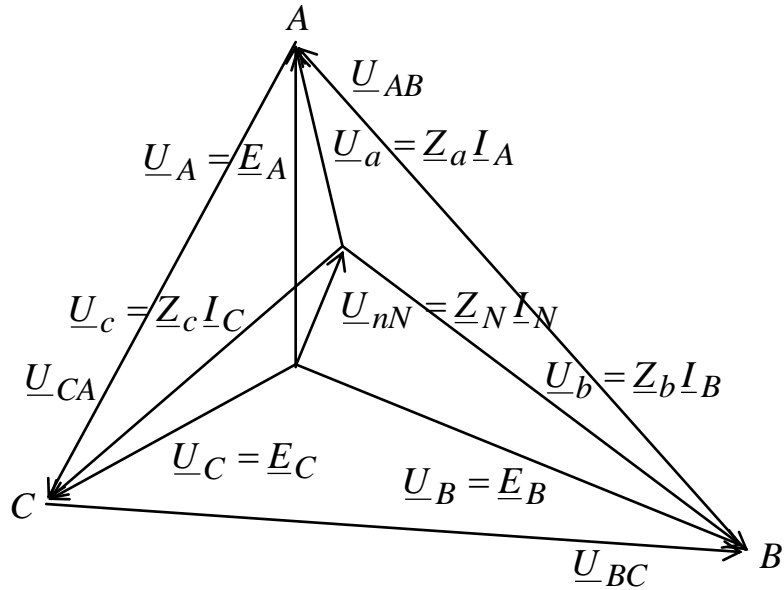


Рис. 7.16. Векторная диаграмма напряжений

Случай 2. Нейтральный провод отсутствует $Z_N = \infty$ ($Y_N = 0$). При этом

$$\underline{U}_{nN} = \frac{\underline{Y}_a \underline{U}_A + \underline{Y}_b \underline{U}_B + \underline{Y}_c \underline{U}_C}{\underline{Y}_a + \underline{Y}_b + \underline{Y}_c},$$

и расчет можно выполнять по изложенной методике, если заданными являются фазные напряжения. Однако чаще задаются не фазные, а линейные напряжения \underline{U}_{AB} , \underline{U}_{BC} , \underline{U}_{CA} (рис. 7.17). В этом случае приходится идти другим путем.

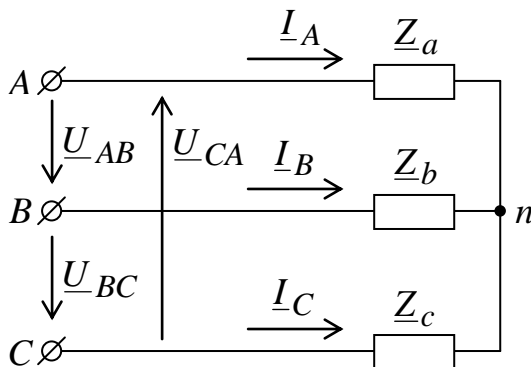


Рис. 7.17. Расчетная схема

Обозначим напряжения на фазах нагрузки:

$$\underline{U}_a = \underline{U}_{An} = \underline{Z}_a \underline{I}_A;$$

$$\underline{U}_b = \underline{U}_{Bn} = \underline{Z}_b \underline{I}_B;$$

$$\underline{U}_c = \underline{U}_{Cn} = \underline{Z}_c \underline{I}_C.$$

Отсюда

$$\underline{I}_A = \underline{Y}_a \underline{U}_a;$$

$$\underline{I}_B = \underline{Y}_b \underline{U}_b;$$

$$\underline{I}_C = \underline{Y}_c \underline{U}_c.$$

В соответствии с первым законом Кирхгофа $\underline{I}_A + \underline{I}_B + \underline{I}_C = 0$.

Подставив сюда значения токов, будем иметь:
 $\underline{Y}_a \underline{U}_a + \underline{Y}_b \underline{U}_b + \underline{Y}_c \underline{U}_c = 0$.

Из рассмотрения контуров AnB и AnC имеем два контурных уравнения

$$\underline{U}_{AB} = \underline{Z}_a \underline{I}_A - \underline{Z}_b \underline{I}_B = \underline{U}_a - \underline{U}_b;$$

$$\underline{U}_{CA} = \underline{Z}_c \underline{I}_C - \underline{Z}_a \underline{I}_A = \underline{U}_c - \underline{U}_a.$$

Отсюда

$$\underline{U}_b = \underline{U}_a - \underline{U}_{AB};$$

$$\underline{U}_c = \underline{U}_a + \underline{U}_{CA}.$$

Подставив в узловое уравнение, получим

$$\underline{Y}_a \underline{U}_a + \underline{Y}_b (\underline{U}_a - \underline{U}_{AB}) + \underline{Y}_c (\underline{U}_a + \underline{U}_{CA}) = 0,$$

или

$$(\underline{Y}_a + \underline{Y}_b + \underline{Y}_c) \underline{U}_a = \underline{Y}_b \underline{U}_{AB} - \underline{Y}_c \underline{U}_{CA}.$$

Тогда фазное напряжение \underline{U}_a будет равно

$$\underline{U}_a = \frac{\underline{Y}_b \underline{U}_{AB} - \underline{Y}_c \underline{U}_{CA}}{\underline{Y}_a + \underline{Y}_b + \underline{Y}_c}.$$

Рассматривая другие контуры и составляя для них уравнения, после аналогичных преобразований получим

$$\underline{U}_b = \frac{\underline{Y}_c \underline{U}_{BC} - \underline{Y}_a \underline{U}_{AB}}{\underline{Y}_a + \underline{Y}_b + \underline{Y}_c}; \quad \underline{U}_c = \frac{\underline{Y}_a \underline{U}_{CA} - \underline{Y}_b \underline{U}_{BC}}{\underline{Y}_a + \underline{Y}_b + \underline{Y}_c}.$$

Зная фазные напряжения и нагрузки фаз, находим токи

$$\underline{I}_a = \frac{\underline{U}_a}{\underline{Z}_a}; \quad \underline{I}_b = \frac{\underline{U}_b}{\underline{Z}_b}; \quad \underline{I}_c = \frac{\underline{U}_c}{\underline{Z}_c}.$$

Рассмотрим расчет несимметричной нагрузки, соединенной «треугольником» $\underline{Z}_{ab} \neq \underline{Z}_{bc} \neq \underline{Z}_{ca}$ (рис. 7.18).

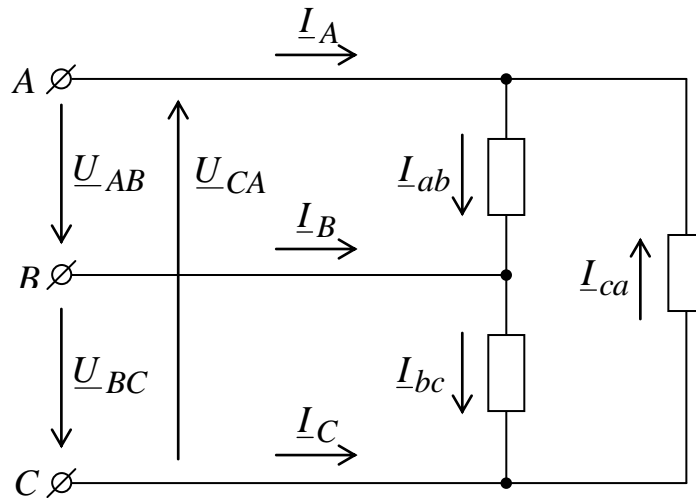


Рис. 7.18. Схема для расчета несимметричной нагрузки

Обычно задаются линейные напряжения \underline{U}_{AB} , \underline{U}_{BC} , \underline{U}_{CA} .

Фазные токи будут равны

$$\underline{I}_{ab} = \frac{\underline{U}_{AB}}{\underline{Z}_{ab}}; \quad \underline{I}_{bc} = \frac{\underline{U}_{BC}}{\underline{Z}_{bc}}; \quad \underline{I}_{ca} = \frac{\underline{U}_{CA}}{\underline{Z}_{ca}}.$$

Линейные токи определяются из выражений

$$\begin{aligned}\underline{I}_A &= \underline{I}_{ab} - \underline{I}_{ca} = \frac{\underline{U}_{AB}}{\underline{Z}_{ab}} - \frac{\underline{U}_{CA}}{\underline{Z}_{ca}}; \\ \underline{I}_B &= \underline{I}_{bc} - \underline{I}_{ab} = \frac{\underline{U}_{BC}}{\underline{Z}_{bc}} - \frac{\underline{U}_{AB}}{\underline{Z}_{ab}}; \\ \underline{I}_C &= \underline{I}_{ca} - \underline{I}_{bc} = \frac{\underline{U}_{CA}}{\underline{Z}_{ca}} - \frac{\underline{U}_{BC}}{\underline{Z}_{bc}}.\end{aligned}$$

22.1. Мощность в трехфазных цепях

Мощность трехфазного приемника можно определить как сумму мощностей отдельных фаз:

$$\underline{S} = \underline{U}_A^* \underline{I}_A + \underline{U}_B^* \underline{I}_B + \underline{U}_C^* \underline{I}_C,$$

где $\underline{U}_A, \underline{U}_B, \underline{U}_C$ – комплексы действующих значений напряжений фаз,
 $\underline{I}_A, \underline{I}_B, \underline{I}_C$ – сопряженные комплексы фазных токов.

Раскрыв правую часть равенства, будем иметь

$$\begin{aligned}\underline{S} &= U_A I_A \cos \varphi_A + U_B I_B \cos \varphi_B + U_C I_C \cos \varphi_C + \\ &+ j(U_A I_A \sin \varphi_A + U_B I_B \sin \varphi_B + U_C I_C \sin \varphi_C).\end{aligned}$$

Вещественная часть этого выражения представляет собой активную мощность, мнимая – реактивную:

$$\begin{aligned}P &= U_A I_A \cos \varphi_A + U_B I_B \cos \varphi_B + U_C I_C \cos \varphi_C = \sum_{k=1}^3 P_k, \\ Q &= U_A I_A \sin \varphi_A + U_B I_B \sin \varphi_B + U_C I_C \sin \varphi_C = \sum_{k=1}^3 Q_k.\end{aligned}$$

Следовательно,

$$\underline{S} = P + jQ = \sum_{k=1}^3 P_k + j \sum_{k=1}^3 Q_k.$$

Измерение мощности в симметричной трехфазной системе может быть выполнено посредством одного ваттметра, включаемого в любую фазу.

При этом токовая обмотка ваттметра включается в рассечку линейного провода, а обмотка напряжения – к нулевой точке (рис. 7.19). Если же нейтральная точка недоступна, то создается искусственная нейтральная точка путем включения трех одинаковых сопротивлений «звездой» (рис. 7.20).

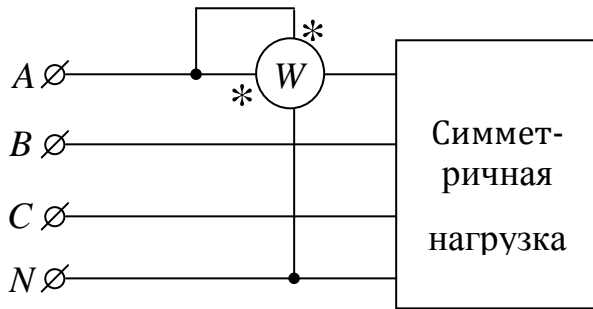


Рис. 7.19. Измерение мощности одним ваттметром

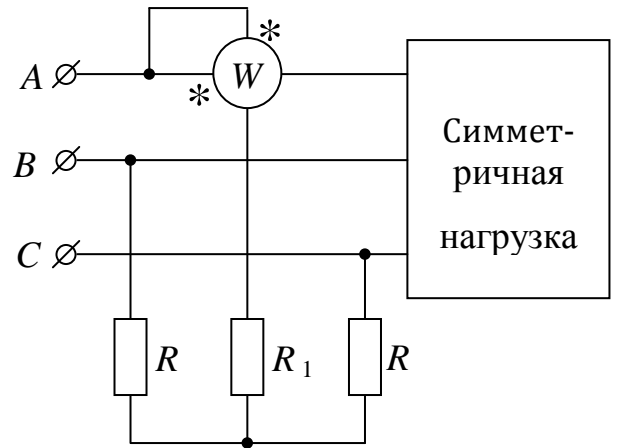


Рис. 7.20. Измерение мощности одним ваттметром в трехпроводной цепи

В этом случае следует учитывать, что в состав сопротивления должно входить сопротивление обмотки напряжения ваттметра. Иначе говоря, должно соблюдаться равенство $R_1 + R_B = R$. Общая мощность будет равна утроенной мощности, измеряемой одним ваттметром.

Измерение мощности в несимметричных трехфазных цепях может быть выполнено двумя методами в зависимости от наличия или отсутствия нулевого провода.

1. Метод трех ваттметров.

В четырехпроводной системе, т.е. при наличии нулевого провода, используется схема, показанная на рис. 7.21.

Его также можно применять и в трехпроводной несимметричной системе при условии создания искусственной нулевой точки (рис. 7.22). При этом в случае одинаковых ваттметров, сопротивления R должны быть одинаковыми. Общая мощность цепи будет равна сумме мощностей, измеряемых каждым прибором.

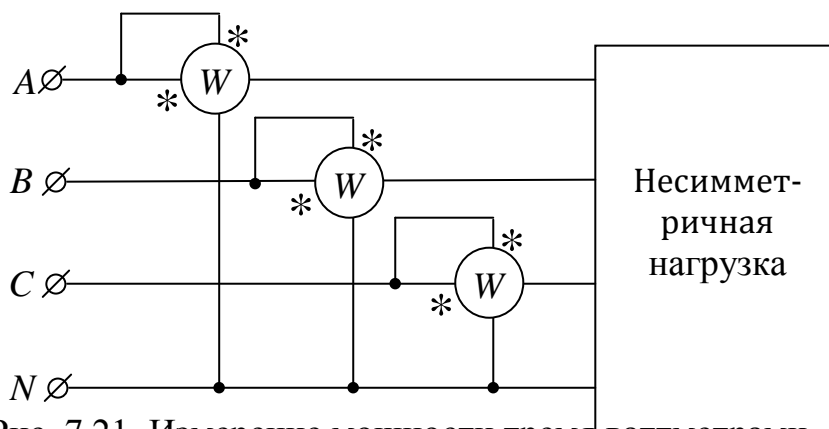


Рис. 7.21. Измерение мощности тремя ваттметрами в четырехпроводной цепи

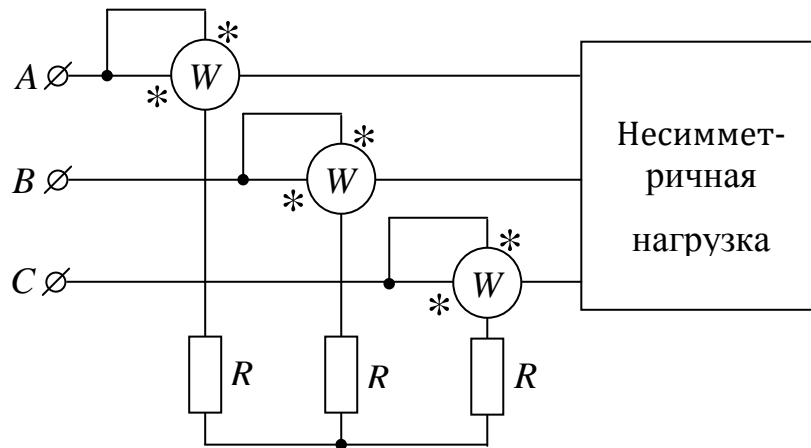


Рис. 7.22. Измерение мощности тремя ваттметрами в трехпроводной цепи

2. Метод двух ваттметров.

Этот метод используется в трехпроводных цепях. Вывод о возможности использования двух ваттметров можно получить из следующих соображений: полная мощность определяется равенством

$$\underline{S} = \underline{U}_A \underline{I}_A + \underline{U}_B \underline{I}_B + \underline{U}_C \underline{I}_C.$$

Из выражения первого закона Кирхгофа, составленного для узла n , можно выразить любой ток через два других. Для схемы, представленной на рис. 7.23, целесообразно выразить ток фазы C $\underline{I}_C = -\underline{I}_A - \underline{I}_B$.

Подставив его в исходное равенство, получим

$$\begin{aligned} \underline{S} &= \underline{U}_A \underline{I}_A + \underline{U}_B \underline{I}_B - \underline{U}_C \underline{I}_A - \underline{U}_C \underline{I}_B = (\underline{U}_A - \underline{U}_C) \underline{I}_A + (\underline{U}_B - \underline{U}_C) \underline{I}_B = \\ &= \underline{U}_{AC} \underline{I}_A + \underline{U}_{BC} \underline{I}_B. \end{aligned}$$

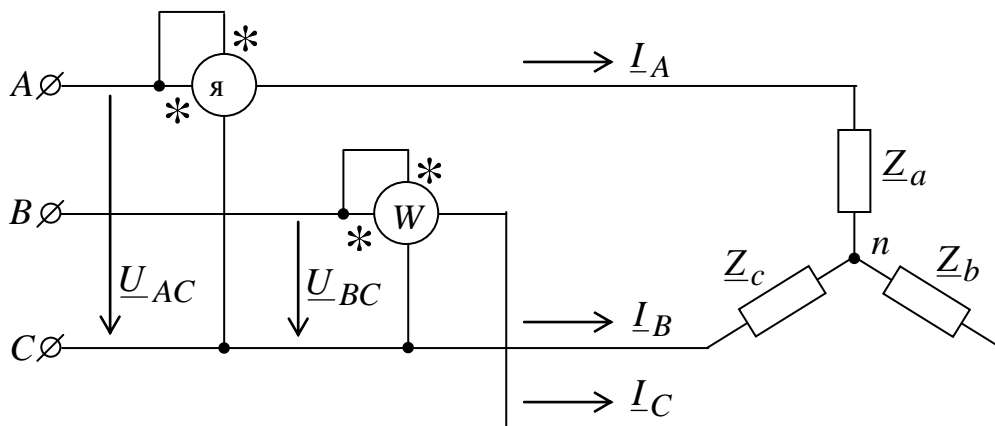


Рис. 7.23. Измерение мощности двумя ваттметрами

В частном случае, возможно, что показания одного ваттметра могут быть отрицательными. Поэтому можно говорить об алгебраической сумме показаний ваттметров.

22.3. Вращающееся магнитное поле

Вращающимся магнитным полем называется такое поле, ось которого вращается в пространстве с заданной скоростью, причем, значение индукции на этой оси максимально.

Рассмотрим сначала пульсирующее магнитное поле (рис. 7.24).

Пусть по катушке протекает синусоидальный ток $i = I_m \sin(\omega t + \psi_i)$. Он вызывает появление магнитного поля с индукцией $B = B_m \sin(\omega t + \psi_B)$, т.е. возникает пульсирующее поле. Используя формулу Эйлера

$\sin \alpha = \frac{e^{j\alpha} - e^{-j\alpha}}{2j}$, запишем выражение индукции для случая $\psi_B = 0$:

$$\begin{aligned} \underline{B} &= B_m \frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j} = \frac{B_m}{2} (-je^{j\omega t} + je^{-j\omega t}) = \\ &= \frac{B_m}{2} \cdot e^{-j\pi/2} \cdot e^{j\omega t} + \frac{B_m}{2} \cdot e^{j\pi/2} \cdot e^{-j\omega t}. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что пульсирующее магнитное поле можно представить в виде геометрической суммы вращающихся в противоположные стороны векторов, т.е. полей, причем максимальное значение этих полей равно половине амплитуды пульсирующего. Вращающиеся поля можно получить посредством многофазных токов.

Далее рассмотрим вращающееся поле трехфазного тока. Расположим в пространстве три одинаковые катушки, оси которых повернуты друг относительно друга на 120° (рис. 7.25). Если по катушкам протекают токи симметричной трехфазной системы

$$\begin{aligned} i_A &= I_m \sin \omega t, \\ i_B &= I_m \sin\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right), \\ i_C &= I_m \sin\left(\omega t + \frac{2\pi}{3}\right), \end{aligned}$$

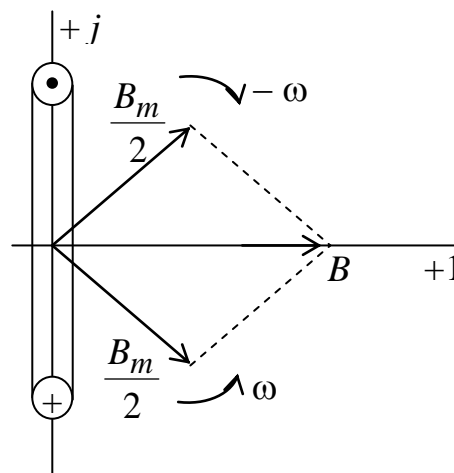


Рис. 7.24. Образование пульсирующего поля

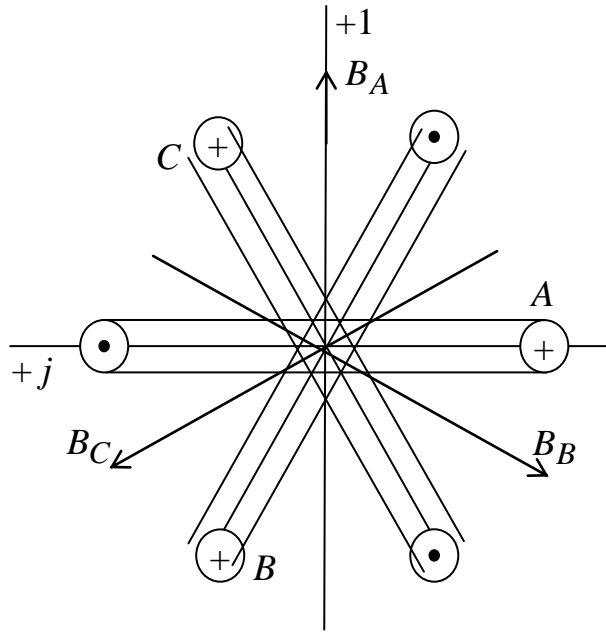


Рис. 7.25. Создание вращающегося магнитного поля

то создаваемые ими магнитные индукции соответственно будут равны

$$B_A = B_m \sin \omega t$$

$$B_B = B_m \sin(\omega t - 2\pi/3)$$

$B_C = B_m \sin(\omega t + 2\pi/3)$. Используя формулу Эйлера и учитывая углы поворотов осей катушек в пространстве, найдем суммарное значение индукции:

$$\begin{aligned} \underline{B} &= \frac{B_m}{2} (-je^{j\omega t} + je^{-j\omega t}) \cdot e^{j0} + \frac{B_m}{2} \left[-je^{j(\omega t - 2\pi/3)} + je^{-j(\omega t - 2\pi/3)} \right] \cdot e^{-j2\pi/3} + \\ &+ \frac{B_m}{2} \left[-je^{j(\omega t + 2\pi/3)} + je^{-j(\omega t + 2\pi/3)} \right] \cdot e^{j2\pi/3} = \\ &= -j \frac{B_m}{2} e^{j\omega t} \left(1 + e^{-j4\pi/3} + e^{-j4\pi/3} \right) + j \frac{B_m}{2} e^{j\omega t} \left(1 + e^{j0} + e^{j0} \right). \end{aligned}$$

С учетом того, что

$$e^{-j4\pi/3} = -1/2 + j\sqrt{3}/2; \quad e^{j4\pi/3} = -1/2 - j\sqrt{3}/2,$$

первый член полученного выражения будет равен нулю. Следовательно,

$$\underline{B} = j \frac{3B_m}{2} e^{-j\omega t}.$$

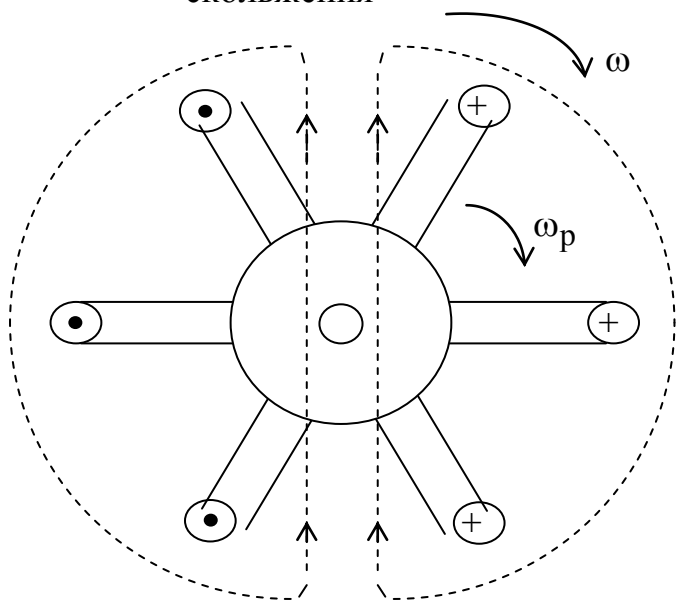
Из этого выражения видно, что суммарное поле является вращающимся с постоянной скоростью и постоянной амплитудой, равной $3/2$ амплитуды индукции любого из пульсирующих.

Нарушение симметрии в пространственном расположении катушек, идентичности характеристик (геометрических, конструктивных, технологических и т.д.), а также равенства токов, протекающих по катушкам, приводит к нарушению векторной симметрии создаваемых индукций и, следовательно, к появлению не кругового, а эллиптического вращающегося магнитного поля. Последнее ухудшает условия работы электрических машин и аппаратов, в основе работы которых заложен принцип использования эффектов вращающихся магнитных полей.

В общем случае для создания вращающегося поля (кругового или эллиптического) необходимо и достаточно иметь пространственный сдвиг катушек и временной сдвиг токов, протекающих в них.

23.1. Принцип действия асинхронного двигателя

Если в область вращающегося магнитного поля поместить металлический барабан, способный вращаться соосно с полем (рис. 7.26), то в теле этого барабана будут наводиться вихревые токи. Взаимодействие этих токов с вращающимся полем приводит к возникновению вращающего момента, увлекающего барабан вслед за полем. При этом частота вращения барабана (ротора) всегда будет меньше частоты вращения поля. Разница в частотах вращения ротора и поля определяется величиной, так называемого, скольжения



$$s = \frac{\omega - \omega_r}{\omega},$$

где ω – частота вращения поля; ω_r – частота вращения ротора. Наличие скольжения является обязательным; при строго синхронном вращении в роторе отсутствуют вихревые токи, так как при этом не будет относительного движения поля и ротора, приводящего к возникновению ЭДС вихревых токов, следовательно, не будет и вращающегося момента. То есть такой ротор будет всегда вращаться не синхронно с полем (асинхронно).

Рис. 7.26. Упрощенная конструкция асинхронного двигателя

Примечание. Следует помнить, что направление ЭДС вихревых токов можно определить по правилу правой руки, а направление момента и движения ротора – по правилу левой руки.

23.2. Принцип действия синхронного двигателя

Если в области вращающегося магнитного поля укрепить электромагнит постоянного тока, способный вращаться соосно с магнитным полем (рис.7.27), то сила взаимодействия полей в течение одного оборота вращающегося поля будет дважды менять свое направление (притягивание разноименных полюсов поля и магнита и отталкивание одноименных, когда они оказываются друг против друга). Такая пульсация момента по направлению действия и инерционность массы электромагнита, препятствующая мгновенному восприятию движения под действием силы, приводят к тому, что электромагнит остается неподвижным.

Однако если его привести во вращение посредством какого-либо устройства с частотой, близкой к частоте вращения поля, то сила взаимодействия полей окажется способной втянуть электромагнит (ротор) во вращение, синхронное с полем («втянуть в синхронизм»). Поле ротора и вращающееся магнитное поле окажутся друг относительно с другом неподвижными, и ротор будет следовать в своем движении за полем. Их частоты вращения будут одинаковы (синхронное вращение).

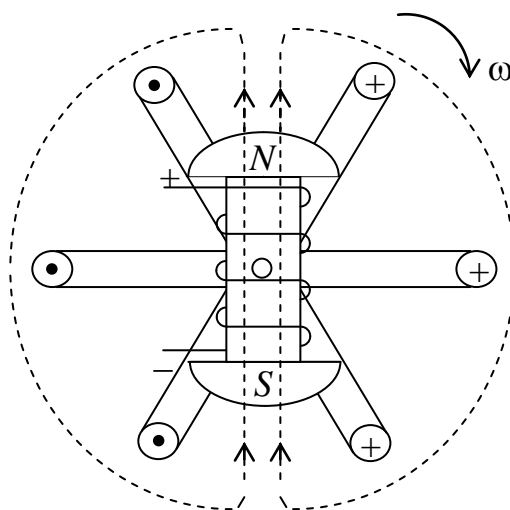


Рис. 7.27. Упрощенная конструкция синхронного двигателя

23.3. Симметричные составляющие несимметричных трехфазных систем

В границах линейных соотношений в электрических цепях любую несимметричную систему: напряжений, ЭДС, токов, магнитных потоков и т.д. можно представить тремя симметричными системами: прямой, обратной и нулевой последовательностями чередования фаз. Такое представление позволяет задачу анализа несимметричного режима работы цепи в условиях влияния сопротивлений фаз друг на друга, когда неприменим принцип

взаимности, свести к рассмотрению, в общем случае, трех более простых симметричных режимов, определяемых каждой симметричной составляющей; характеристики несимметричного режима определяются суммированием соответствующих характеристик симметричных.

Основные положения метода представления несимметричной системы симметричными составляющими рассмотрим на примере несимметричной системы фазных напряжений (рис. 7.28).

В соответствии с этим методом векторы симметричных составляющих будут записаны в виде следующих векторов:

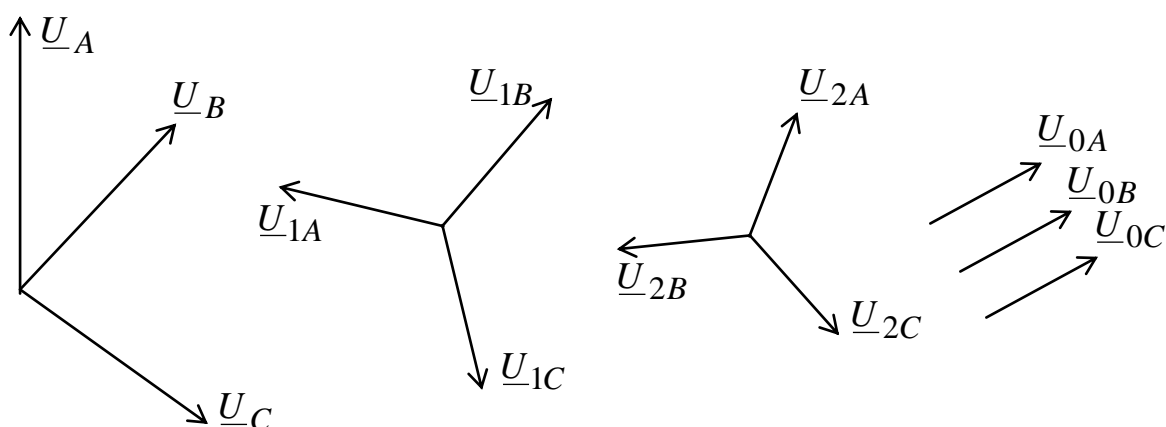


Рис. 7.28. Несимметричная трехфазная система векторов и ее разложение на симметричные составляющие

1) векторы, составляющие прямую последовательность чередования фаз

$$\underline{U}_{1A}, \underline{U}_{1B} = \underline{U}_{1A} e^{-j2\pi/3}, \underline{U}_{1C} = \underline{U}_{1A} e^{-j4\pi/3} = \underline{U}_{1A} e^{j2\pi/3};$$

2) векторы, составляющие обратную последовательность чередования фаз

$$\underline{U}_{2A}, \underline{U}_{2B} = \underline{U}_{2A} e^{j2\pi/3}, \underline{U}_{2C} = \underline{U}_{2A} e^{j4\pi/3} = \underline{U}_{2A} e^{-j2\pi/3};$$

3) векторы, составляющие нулевую последовательность чередования фаз

$$\underline{U}_{0A} = \underline{U}_{0B} = \underline{U}_{0C}.$$

Фазовый множитель $e^{j2\pi/3}$ называется оператором поворота и обозначается буквой a :

$$a = e^{j2\pi/3} = \cos 2\pi/3 + j \sin 2\pi/3 = -1/2 + j\sqrt{3}/2.$$

Умножение любого вектора на оператор поворота соответствует повороту этого вектора на 120° против часовой стрелки

$$\underline{U} \cdot a = U \cdot e^{j\psi_U} \cdot e^{j2\pi/3} = U \cdot e^{j(\psi_U + 2\pi/3)}.$$

Если возвести оператор поворота в квадрат, то получим

$$a^2 = e^{j2\pi/3} \cdot e^{j2\pi/3} = e^{j4\pi/3} = e^{-j2\pi/3} = \cos 2\pi/3 - j \sin 2\pi/3 = -1/2 - j\sqrt{3}/2.$$

Отсюда следует, что умножение вектора на a^2 соответствует его повороту на 120° по часовой стрелке.

Можно показать, что

$$a^3 = e^{j2\pi} = 1; \quad a^4 = a^3 \cdot a = a; \quad a^5 = a^3 \cdot a^2 \text{ и т.д.}$$

Величины $1, a, a^2$ образуют симметричную систему единичных векторов. Их сумма будет равна

$$1 + a + a^2 = 1 - 1/2 + j\sqrt{3}/2 - 1/2 - j\sqrt{3}/2 = 0,$$

а разность операторов поворота

$$a - a^2 = -1/2 + j\sqrt{3}/2 + 1/2 + j\sqrt{3}/2 = j\sqrt{3}.$$

С учетом введенного понятия о фазовом множителе и связанных с ним соотношений векторы прямой обратной и нулевой последовательностей фаз запишутся:

$$\text{прямая последовательность} \quad - \underline{U}_{1A}, \quad \underline{U}_{1B} = a^2 \cdot \underline{U}_{1A}, \quad \underline{U}_{1C} = a \cdot \underline{U}_{1A};$$

$$\text{обратная последовательность} \quad - \underline{U}_{2A}, \quad \underline{U}_{2B} = a \cdot \underline{U}_{2A}, \quad \underline{U}_{2C} = a^2 \cdot \underline{U}_{2A};$$

$$\text{нулевая последовательность} \quad - \underline{U}_{0A} = \underline{U}_{0B} = \underline{U}_{0C}.$$

Векторы исходной несимметричной системы представляются в виде геометрической суммы векторов симметричных составляющих:

$$\underline{U}_A = \underline{U}_{1A} + \underline{U}_{2A} + \underline{U}_{0A};$$

$$\underline{U}_B = \underline{U}_{1B} + \underline{U}_{2B} + \underline{U}_{0B} = a^2 \cdot \underline{U}_{1A} + a \cdot \underline{U}_{2A} + \underline{U}_{0A};$$

$$\underline{U}_C = \underline{U}_{1C} + \underline{U}_{2C} + \underline{U}_{0C} = a \cdot \underline{U}_{1A} + a^2 \cdot \underline{U}_{2A} + \underline{U}_{0A}.$$

Если для упрощения опустить индекс A в правой части, то получим

$$\underline{U}_A = \underline{U}_1 + \underline{U}_2 + \underline{U}_0;$$

$$\underline{U}_B = a^2 \cdot \underline{U}_1 + a \cdot \underline{U}_2 + \underline{U}_0; \quad (7.9)$$

$$\underline{U}_C = a \cdot \underline{U}_1 + a^2 \cdot \underline{U}_2 + \underline{U}_0.$$

Здесь $\underline{U}_1, \underline{U}_2, \underline{U}_0$ – векторы напряжений прямой, обратной и нулевой последовательностей фазы A . Их называют опорными векторами симметричных составляющих. Если решить последнюю систему уравнений относительно неизвестных опорных векторов при известных фазных напряжениях исходной несимметричной системы, то получим

$$\underline{U}_1 = (\underline{U}_A + a \cdot \underline{U}_B + a^2 \cdot \underline{U}_C) / 3;$$

$$\begin{aligned}\underline{U}_2 &= (\underline{U}_A + a^2 \cdot \underline{U}_B + a \cdot \underline{U}_C) / 3; \\ \underline{U}_0 &= (\underline{U}_A + \underline{U}_B + \underline{U}_C) / 3.\end{aligned}\quad (7.10)$$

Выражения (7.9) и (7.10) позволяют решить задачу определения векторов несимметричной системы по известным симметричным составляющим и наоборот – по известным векторам исходной системы находить опорные векторы симметричных составляющих.

23.4. Основные свойства трехфазных цепей в отношении симметричных составляющих

1. Симметричные системы линейных и фазных токов и напряжений содержат составляющие только прямой последовательности.

2. Ток в нейтральном проводе равен утроенному значению тока нулевой последовательности:

$$\begin{aligned}\underline{I}_N &= \underline{I}_A + \underline{I}_B + \underline{I}_C; \\ \underline{I}_0 &= (\underline{I}_A + \underline{I}_B + \underline{I}_C) / 3,\end{aligned}$$

следовательно, $\underline{I}_N = 3\underline{I}_0$.

3. В трехпроводной системе отсутствуют линейные токи нулевой последовательности:

$$3\underline{I}_0 = \underline{I}_A + \underline{I}_B + \underline{I}_C = 0.$$

4. Система линейных напряжений не содержит составляющей нулевой последовательности, так как сумма линейных напряжений всегда равна нулю. Степень несимметрии линейных напряжений оценивается коэффициентом несимметрии ε , представляющим отношение составляющей обратной последовательности к составляющей прямой $\varepsilon = U_2 / U_1$.

5. Фазные напряжения симметричного приемника, соединенного «звездой», при несимметричных линейных напряжениях не содержат составляющих нулевой последовательности. Как было показано ранее

$$\underline{U}_a = \frac{Y_b \underline{U}_{AB} - Y_c \underline{U}_{CA}}{Y_a + Y_b + Y_c}; \quad \underline{U}_b = \frac{Y_c \underline{U}_{CA} - Y_a \underline{U}_{AB}}{Y_a + Y_b + Y_c}; \quad \underline{U}_c = \frac{Y_a \underline{U}_{CA} - Y_b \underline{U}_{BC}}{Y_a + Y_b + Y_c}.$$

При $Y_a = Y_b = Y_c = Y$

$$\underline{U}_a = \frac{\underline{U}_{AB} - \underline{U}_{CA}}{3}; \quad \underline{U}_b = \frac{\underline{U}_{CA} - \underline{U}_{AB}}{3}; \quad \underline{U}_c = \frac{\underline{U}_{CA} - \underline{U}_{BC}}{3}.$$

Тогда $3\underline{U}_0 = \underline{U}_A + \underline{U}_B + \underline{U}_C = 0$.

6. Симметричные составляющие нулевой последовательности фазных напряжений несимметричного приемника при несимметрии линейных напряжений равны напряжению \underline{U}_{nN} между нейтральными точками N и n симметричного и несимметричного приемников.

Самостоятельная работа

Трёхфазные цепи при статической и динамической нагрузках.
[Л 3, с. 169–182]

НЕСИНУСОИДАЛЬНЫЕ ТОКИ

24.1. Несинусоидальные ЭДС, напряжения и токи

До сих пор рассматривались линейные цепи при действии постоянных или синусоидальных источников. На практике ЭДС, напряжения и токи в той или иной степени отличаются от постоянных или синусоидальных, причем зависимость от времени может быть периодической, почти периодической и непериодической.

В машинных генераторах искажения формы кривой возникают из-за несинусоидального распределения магнитной индукции вдоль воздушного зазора. В цепях с нелинейными элементами (электрическая дуга, катушка со стальным сердечником, вентили) даже при синусоидальных ЭДС возникают несинусоидальные напряжения и токи. В различных областях радиотехники, автоматики и т.д. применяются статические генераторы, вырабатывающие импульсы пилообразной, ступенчатой и прямоугольной формы. Все перечисленные сигналы относятся к периодическим токам.

Если сложить несколько синусоидальных сигналов разной частоты, то получим непериодический сигнал, который имеет периодическую огибающую, и свойства такого сигнала близки к свойствам периодических сигналов. Поэтому подобные сигналы называются почти периодическими.

При передаче последовательности импульсов или в случае помех и шумов приходится иметь дело с непериодическими сигналами.

Во всех задачах со сложными несинусоидальными кривыми необходимо свести сложную задачу к более простой и применить методы расчета простых цепей.

Всякая периодическая функция $f(\omega t)$, удовлетворяющая условиям Дирихле, т.е. имеющая на всяком конечном интервале конечное число разрывов первого рода и конечное число максимумов и минимумов, может быть разложена в тригонометрический ряд:

$$f(\omega t) = A_0 + A_{1m} \sin(\omega t + \psi_1) + A_{2m} \sin(2\omega t + \psi_2) + \dots =$$

$$= A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_{km} \sin(k\omega t + \psi_k). \quad (8.1)$$

Первый член ряда A_0 называется постоянной составляющей или нулевой гармоникой, второй член $A_{1m} \sin(\omega t + \psi_1)$ – основной или первой гармоникой, а остальные члены вида $A_{km} \sin(k\omega t + \psi_k)$ при $k > 1$ носят название высших гармоник; $\omega = 2\pi/T$ – основная угловая частота; T – период несинусоидальной периодической функции.

После раскрытия синуса суммы это выражение запишется как

$$\begin{aligned} f(\omega t) &= A_0 + B_{1m} \sin \omega t + \dots + B_{km} \sin k\omega t + C_{1m} \cos \omega t + \\ &+ \dots + C_{km} \cos k\omega t = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (B_{km} \sin k\omega t + C_{km} \cos k\omega t). \end{aligned} \quad (8.2)$$

Здесь $B_{km} = A_{km} \cos \psi_k$; $C_{km} = A_{km} \sin \psi_k$.

Коэффициенты A_0 , B_{km} , C_{km} могут быть вычислены при помощи следующих интегралов:

$$\begin{aligned} A_0 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\omega t) d(\omega t); \\ B_{km} &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\omega t) \sin k\omega t \cdot d(\omega t); \\ C_{km} &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\omega t) \cos k\omega t \cdot d(\omega t). \end{aligned} \quad (8.3)$$

Постоянная составляющая равна среднему значению функции за период.

Введя условно отрицательные частоты, исходную функцию можно записать в более компактном виде:

$$f(\omega t) = \frac{1}{2} \sum_{-\infty}^{\infty} (B_{km} \sin k\omega t + C_{km} \cos k\omega t). \quad (8.4)$$

Постоянная составляющая в этом выражении получается при $k = 0$.

Если воспользоваться формулой Эйлера

$$\begin{aligned} \sin k\omega t &= \frac{1}{2j} (e^{jk\omega t} - e^{-jk\omega t}), \\ \cos k\omega t &= \frac{1}{2} (e^{jk\omega t} + e^{-jk\omega t}), \end{aligned}$$

то получим

$$f(\omega t) = \frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\underline{F}_{km} e^{jk\omega t} + \underline{F}_{km}^* e^{-jk\omega t} \right), \quad (8.5)$$

где $\underline{F}_{km} = \frac{1}{2} (G_{km} - jB_{km}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\omega t) e^{-jk\omega t} d(\omega t)$.

С учетом того, что $\underline{F}_{-km} = \underline{F}_{km}$, а $\underline{F}_{-km}^* = \underline{F}_{km}^*$, это выражение можно упростить:

$$f(\omega t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \underline{F}_{km} e^{jk\omega t}. \quad (6.6)$$

Комплексная форма записи ряда Фурье имеет большое значение при частотном анализе свойств электрических цепей.

Значительное число функций, с которыми приходится иметь дело в электротехнике, удовлетворяют условию $f(\omega t) = -f(\omega t + \pi)$. Такие функции называются симметричными относительно оси абсцисс. Они не содержат четных гармоник и постоянной составляющей:

$$f(\omega t) = A_{1m} \sin(\omega t + \psi_1) + A_{3m} \sin(3\omega t + \psi_3) + \dots \quad (6.7)$$

В схемах выпрямления приходится иметь дело с функциями, удовлетворяющими условию $f(\omega t) = f(-\omega t)$. Такие функции называются симметричными относительно оси ординат. Они не содержат синусных составляющих:

$$f(\omega t) = A_0 + A_{1m} \cos\omega t + A_{2m} \cos 2\omega t + \dots \quad (8.8)$$

Совокупность гармонических составляющих несинусоидальной периодической функции называется ее дискретным частотным спектром. Спектр можно характеризовать некоторой зависимостью A_{km} (спектр амплитуд) и ψ_k (спектр фаз) от частоты $k\omega$.

24.2. Максимальные, действующие и средние значения несинусоидальных периодических ЭДС, напряжений и токов

Периодическая функция $f(\omega t)$, помимо гармонических составляющих, характеризуется: максимальным значением за период a_{\max} , действующим значением

$$A = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T f^2(\omega t) dt}$$

и средним по модулю значением

$$A_{\text{ср}} = \frac{1}{T} \int_0^T |f(\omega t)| dt.$$

Если кривая $f(\omega t)$ симметрична относительно оси абсцисс и в течение половины периода ни разу не меняет знак, то среднее по модулю значение равно среднему значению за половину периода. Если за весь период функция ни разу не изменяет знак, то среднее по модулю значение равно постоянной составляющей.

В расчетах обычно пользуются действующими значениями. Если кривая периодически изменяющейся функции разложена в тригонометрический ряд, то действующее значение может быть найдено следующим образом:

$$A^2 = \frac{1}{T} \int_0^T \left[\sum_{k=0}^{\infty} A_{km} \sin(k\omega t + \psi_k) \right]^2 dt = \frac{1}{T} \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^T A_{km}^2 \sin^2(k\omega t + \psi_k) dt + \\ + \frac{1}{T} \sum_{\substack{i=0 \\ k=0 \\ i \neq k}}^{\infty} \int_0^T A_{im} A_{km} \sin(i\omega t + \psi_i) \sin(k\omega t + \psi_k) dt.$$

Каждый из интегралов в последней сумме равен нулю, поэтому

$$A^2 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{T} \int_0^T A_{km}^2 \sin^2(k\omega t + \psi_k) dt = A_0^2 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A_{km}^2}{2} = A_0^2 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k^2 = \sum_{k=0}^{\infty} A_k^2. \quad (8.8)$$

Следовательно,

$$A = \sqrt{\sum_{k=0}^{\infty} A_k^2}. \quad (8.9)$$

Таким образом, действующее значение периодической несинусоидальной функции зависит только от действующих значений ее гармоник и не зависит от их начальных фаз ψ_k .

Если известны действующие значения гармонических составляющих какой-то несинусоидальной функции, то действующее значение найдем по формуле

$$U = \sqrt{U_0^2 + U_1^2 + U_2^2 + \dots} \quad (8.10)$$

При оценке несинусоидальных функций в электроэнергетике пользуются коэффициентом формы кривой k_f , коэффициентом амплитуды k_a , коэффициентом искажения k_n .

Коэффициент формы определяется как отношение действующего значения к среднему по модулю значению:

$$k_f = A/A_{cp}. \quad (8.11)$$

Для синусоиды $k_{\phi} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} = 1,11$.

Коэффициент амплитуды равен отношению максимального значения к действующему значению

$$k_a = a_{\max}/A. \quad (8.12)$$

Для синусоиды $k_a = \sqrt{2} = 1,41$.

Коэффициент искажения определяется как отношение действующего значения основной гармоники к действующему значению всей кривой

$$k_{и} = A_1/A. \quad (8.13)$$

Для синусоиды $k_{и} = 1$.

В электронике для оценки искажений пользуются коэффициентом гармоник, который равен отношению действующего значения высших гармоник к действующему значению основной гармоники

$$k = \frac{1}{A_1} \sqrt{\sum_{k=2}^{\infty} A_k^2}. \quad (8.14)$$

Для синусоиды $k = 0$.

24.3. Несинусоидальные кривые с периодической огибающей

Это кривые, относящиеся к классу почти периодических. Они также разлагаются на гармонические составляющие. Период таких кривых обычно во много раз превышает период любой из составляющих и может стремиться к бесконечности. К числу явлений, характеризующих такими кривыми, относятся биения и модуляции.

Биения. Простейший случай получается при сложении двух синусоид с равными амплитудами, но не равными частотами ω_1 и ω_2 , причем $\omega_1 > \omega_2$:

$$f(t) = A_m(\sin \omega_1 t + \sin \omega_2 t). \quad (8.15)$$

Преобразуя сумму синусов, получим

$$f(t) = 2A_m \cos \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t \cdot \sin \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t. \quad (8.16)$$

Можно считать, что кривая $f(t)$ представляет собой синусоиду с угловой частотой $\omega = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$, амплитуда которой изменяется по косинусоиде со значительно меньшей угловой частотой $\Omega = \frac{\omega_1 - \omega_2}{2}$, тогда

$$f(t) = 2A_m \cos \Omega t \cdot \sin \omega t. \quad (8.17)$$

Частотой биений называется частота $f_{\text{б}} = \Omega/\pi$, равная числу максимумов огибающей кривой в единицу времени.

Пример несинусоидальной кривой с периодической огибающей показан на рис. 8.1.

Период биений $T_6 = \frac{\pi}{\Omega}$ в общем случае не равен периоду кривой $f(t)$.

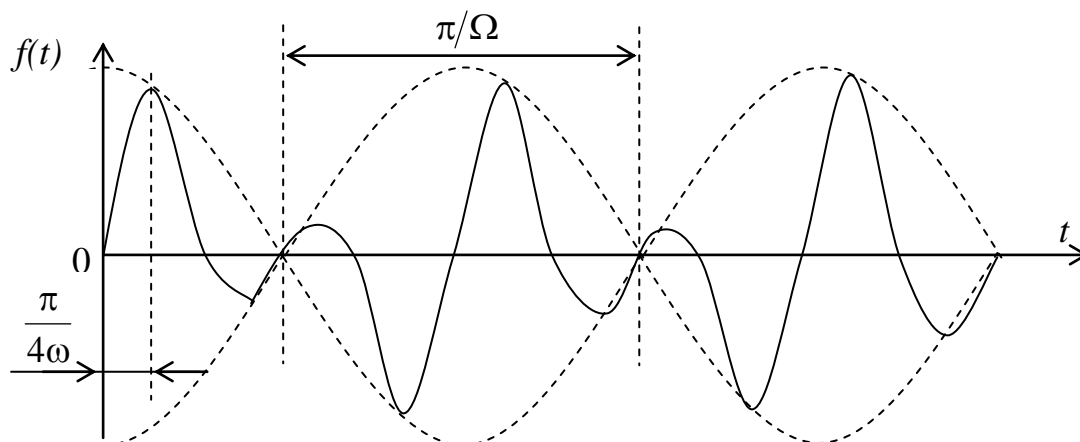


Рис. 8.1. Несинусоидальная функция с периодической огибающей

Модулированные колебания. Синусоидально изменяющаяся величина $f(t) = A_m \sin(\omega t + \psi)$ задается тремя параметрами: амплитудой A_m , угловой частотой ω и начальной фазой ψ . Эти величины не зависят от времени. Однако для передачи различного рода сигналов применяются генераторы, в которых одна из этих величин изменяется по некоторому заданному закону. Изменение во времени одного из параметров A_m , ω или ψ называют модуляцией. Различают амплитудную, частотную и фазовую модуляции.

Пусть функция, изменяющаяся с частотой ω_0 и амплитудой $A_m(t)$, модулирована гармоническим сигналом с частотой $\Omega < \omega_0$ относительно среднего значения A_{0m} , т.е. с законом изменения $A_m(t)$ (рис.8.2):

$$f(t) = A_m(t) \sin \omega_0 t = A_{0m} (1 + m \cos \Omega t) \sin \omega_0 t. \quad (8.18)$$

Частота ω_0 называется несущей частотой, частота Ω – модулирующей частотой, m – коэффициентом модуляции.

При определении токов или напряжений модулированные по амплитуде колебания могут быть разложены на синусоидальные составляющие

$$\cos \Omega t \cdot \sin \omega_0 t = [\sin(\omega_0 - \Omega)t + \sin(\omega_0 + \Omega)t] / 2.$$

Тогда

$$f(t) = A_{0m} \sin \omega_0 t + A_{2m} (\sin \omega_1 t + \sin \omega_2 t), \quad (8.19)$$

где $A_{2m} = mA_{0m}/2$; $\omega_1 = \omega_0 - \Omega$; $\omega_2 = \omega_0 + \Omega$.

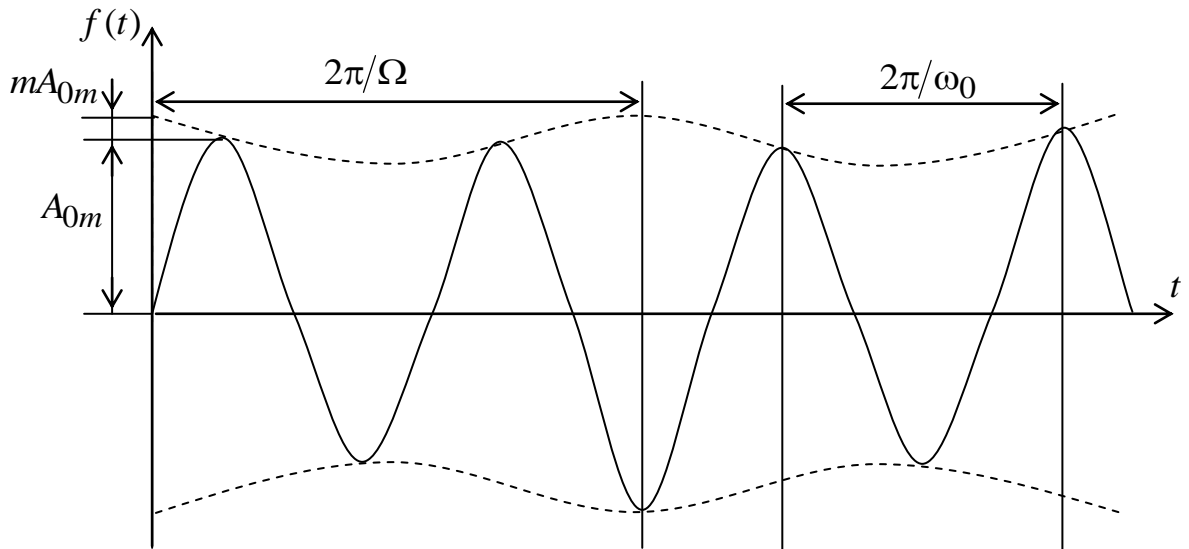


Рис. 8.2. Модулированная функция $f(t)$

Таким образом, простейшие модулированные по амплитуде колебания могут быть представлены в виде суммы трех синусоидальных колебаний с несущей частотой ω_0 , боковыми частотами ω_1 , ω_2 и постоянными амплитудами.

Под действующим значением колебаний с периодической огибающей, описываемых функцией $f(t) = F(\Omega t)\sin \omega_0 t$, обычно понимают действующее значение огибающей, деленное на $\sqrt{2}$:

$$A = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T F^2(\Omega t) dt}, \quad (8.20)$$

где $T = 2\pi/\Omega$.

Этим выражением можно пользоваться, если исследуется непериодический процесс за достаточно большой промежуток времени.

25.1. Расчет цепей с несинусоидальными периодическими ЭДС, напряжениями и токами

Если в линейной цепи действует один или несколько источников несинусоидальных периодических ЭДС и токов, то расчет такой цепи распадается на три этапа:

- 1) разложение ЭДС и токов источников на постоянную и синусоидальные составляющие;
- 2) применение принципа наложения и расчет токов и напряжений в цепи для каждой из составляющих в отдельности;
- 3) совместное рассмотрение решений, полученных для каждой из составляющих.

Основную часть расчета представляет второй этап.

Если, например, задана несинусоидальная ЭДС вида

$$e = E_0 + E_{1m} \sin(\omega_1 t + \psi_1) + E_{2m} \sin(\omega_2 t + \psi_2), \quad (8.21)$$

то действие источника такой ЭДС аналогично действию трех последовательно соединенных источников ЭДС (рис. 8.3):

$$\begin{aligned} e_0 &= E_0; \\ e_1 &= E_{1m} \sin(\omega_1 t + \psi_1); \\ e_2 &= E_{2m} \sin(\omega_2 t + \psi_2). \end{aligned}$$

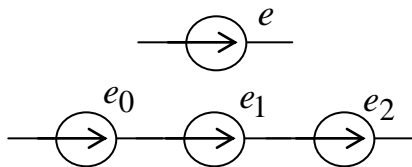


Рис. 8.3. Представление несинусоидальной ЭДС

Применив принцип наложения, и рассмотрев действие каждой из составляющих ЭДС в отдельности, можно найти составляющие токов во всех участках цепи.

Мгновенное значение тока в какой-либо k -й ветви равно сумме мгновенных значений составляющих токов:

$$i_k = I_{0k} + i_{1k} + i_{2k}.$$

Таким образом, расчет линейной цепи с несинусоидальными ЭДС сводится к решению n задач с синусоидальными ЭДС и одной задачи с постоянными ЭДС.

При решении каждой из этих задач необходимо учитывать, что для различных частот индуктивные и емкостные сопротивления неодинаковы. Индуктивное сопротивление для k -й гармоники k раз больше, а емкостное, наоборот, в k раз меньше,

, близком к синусоидальному, ток в емкости может иметь резко несинусоидальную форму из-за высших гармоник. В то же время из-за роста индуктивного сопротивления даже при резко несинусоидальной кривой напряжения форма кривой тока нередко приближается к синусоиде.

При расчете каждой из гармоник можно пользоваться комплексным методом и строить векторные диаграммы для каждой гармоники. Однако недопустимо суммирование векторов и сложение комплексных напряжений и токов различных гармоник. Так как векторные диаграммы отражают величины и фазы токов и напряжений в какой-то момент времени. На комплексной плоскости векторы различных гармоник должны вращаться с разной скоростью и получить устойчивую картину невозможно. При вычерчивании кривых отдельных гармоник следует учитывать, что период гармоники обратно пропорционален ее номеру. Следовательно, если по оси абсцисс отложено ωt , то, соблюдая один и тот же масштаб, вместо углов α_k надо откладывать углы α_k/k . чем для первой:

$$X_{Lk} = k\omega L = kX_{L1}; \quad X_{Ck} = 1/k\omega C = X_{C1}/k.$$

Вследствие этого при напряжении

25.2. Мощность в цепи несинусоидального тока

Активная мощность периодического тока произвольной формы определяется как средняя мощность за период:

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T u \cdot i \cdot dt. \quad (8.22)$$

Если мгновенные значения выразить в виде рядов Фурье, то получим

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T \left[\sum_{k=0}^{\infty} U_{km} \sin(k\omega t + \psi_{u_k}) \right] \cdot \left[\sum_{k=0}^{\infty} I_{km} \sin(k\omega t + \psi_{i_k}) \right] dt.$$

Так как среднее за период значение произведения синусоидальных функций различной частоты равно нулю, то

$$\begin{aligned} p &= \frac{1}{T} \int_0^T \sum_{k=0}^{\infty} U_{km} I_{km} \sin(k\omega t + \psi_{u_k}) \cdot \sin(k\omega t + \psi_{i_k}) dt = \\ &= U_0 I_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{U_{km} I_{km} \cos \varphi_k}{2} = \sum_{k=0}^{\infty} U_k I_k \cos \varphi_k, \end{aligned} \quad (8.23)$$

где $\varphi_k = \psi_{u_k} - \psi_{i_k}$.

Средняя мощность несинусоидального тока равна сумме средних мощностей отдельных гармоник.

По аналогии с синусоидальными токами вводится понятие полной мощности S , равной произведению действующих значений тока и напряжения:

$$S = UI = \sqrt{\sum_{k=0}^{\infty} U_k^2 \sum_{k=0}^{\infty} I_k^2}. \quad (8.24)$$

Отношение активной мощности к полной называют коэффициентом мощности (κ – каппа) и иногда приравнивают косинусу некоторого условного угла υ :

$$\kappa = P/S = \cos \upsilon. \quad (8.25)$$

Реактивная мощность цепи равна сумме реактивных мощностей отдельных гармоник:

$$Q = \sum_{k=1}^{\infty} Q_k = \sum_{k=1}^{\infty} U_k I_k \sin \varphi_k. \quad (8.26)$$

Для несинусоидальных токов квадрат полной мощности, как правило, больше суммы квадратов активной и реактивной мощностей:

$$S^2 > P^2 + Q^2.$$

25.3. Высшие гармоники в трехфазных цепях

В трехфазных цепях кривые напряжения обычно имеют одинаковую форму и сдвинуты друг относительно друга на треть периода, т.е.

$$u_A = f(t); \quad u_B = f(t - T/3); \quad u_C = f(t + T/3).$$

где T – период основной частоты.

Пусть $u_{Ak} = U_{km} \sin(k\omega t + \psi_k)$.

Учитывая, что $\omega T = 2\pi$, и подставляя вместо t соответственно $t - T/3$ и $t + T/3$, получаем

$$\begin{aligned} u_{Bk} &= U_{km} \sin(k\omega t + \psi_k - 2k\pi/3); \\ u_{Ck} &= U_{km} \sin(k\omega t + \psi_k + 2k\pi/3). \end{aligned}$$

Анализируя эти выражения для различных значений k , можно заметить, что напряжения гармоник, кратных трем ($k = 3n$), во всех фазах имеют одинаковое значение, т.е. образуют нулевую последовательность. При $k = 3n + 1$ гармоники трех фаз образуют симметричную систему напряжений, последовательность которой совпадает с последовательностью фаз первой гармоники (прямая последовательность). При $k = 3n + 2$ гармоники образуют симметричную систему обратной последовательности.

В силовой электроэнергетике, как правило, отсутствуют постоянная составляющая и четные гармоники.

Рассмотрим некоторые частные случаи.

Если фазы генератора соединены «звездой», то при несинусоидальном фазном напряжении линейные напряжения не содержат гармоник, кратных трем, так как они образуют нулевую последовательность. Это приводит к тому, что отношение линейных напряжений к фазным меньше, чем $\sqrt{3}$:

$$\begin{aligned} U_{\phi} &= \sqrt{U_1^2 + U_3^2 + U_5^2 + U_7^2 + \dots}; \\ U_{л} &= \sqrt{U_1^2 + U_5^2 + U_7^2 + \dots}, \end{aligned}$$

т.е. $U_{л} < \sqrt{3} U_{\phi}$.

При симметричной нагрузке фазные токи основной частоты и все высшие гармоники, за исключением гармоник, кратным трем, образуют системы прямой и обратной последовательностей, и в сумме дают ноль. Гармоники же порядка, кратного трем, образуют систему нулевой последовательности, т.е. имеют в любой момент времени одинаковые значения и направления соответственно токов и ЭДС. Поэтому ток в нейтральном проводе равен утроенной сумме токов высших гармоник нулевой последовательности:

$$I_N = 3\sqrt{I_3^2 + I_9^2 + I_{15}^2 + \dots} \quad (8.27)$$

При отсутствии нейтрального провода токи в каждой из фаз не могут содержать высших гармоник, кратных трем, так как в этой схеме сумма токов в любой момент времени должна быть равна нулю. Поэтому в приемнике нет напряжений от токов нулевой последовательности, и между нейтральными точками генератора и симметричного приемника может появиться значительное напряжение, содержащее только гармоники, кратные трем.

Если фазы генератора соединены «треугольником», то при несинусоидальных ЭДС в фазах, сумма ЭДС, действующих в замкнутом контуре генератора, равна утроенной сумме гармоник, кратных трем. Если включить вольтметр в рассечку треугольника, то он измерит гармоники ЭДС, кратные трем (схема разомкнутого треугольника), так как остальные гармоники в сумме дадут нуль (рис. 8.4). Такая схема может применяться как утроитель частоты.

Если фазы соединены в замкнутый треугольник, то гармоники, кратные трем, вызывают внутренний ток даже в режиме холостого хода. Фазные ЭДС не содержат гармоник, кратных трем, так как они компенсируются падением напряжения на внутренних сопротивлениях фазы.

Поэтому во внешней цепи токи не содержат гармоник порядка, кратного трем.

Фазный ток генератора при симметричной нагрузке

$$I_\phi = \sqrt{I_1^2 + I_3^2 + I_5^2 + I_7^2 + \dots} \quad (8.28)$$

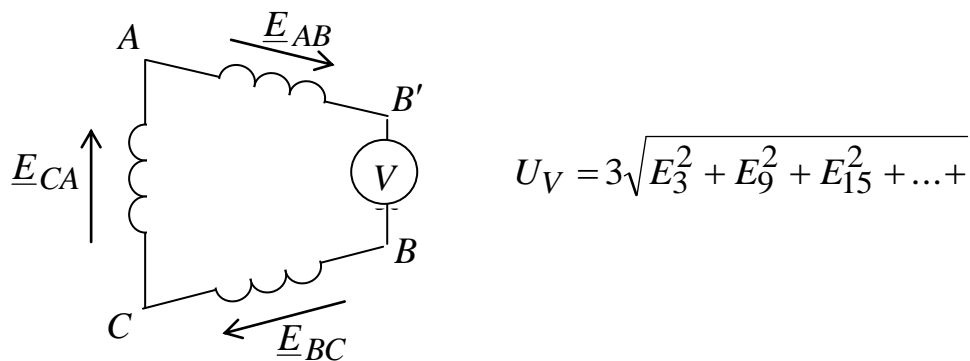


Рис. 8.4. Схема разомкнутого треугольника

Линейный ток во внешней цепи

$$I_L = \sqrt{I_1^2 + I_5^2 + I_7^2 + \dots} < \sqrt{3}I_\phi \quad (8.29)$$

Самостоятельная работа

Однофазные и трехфазные цепи при несинусоидальных источниках.
[Л 3, с. 200–221]

КУРС ЛЕКЦИЙ МОДУЛЯ №5

Содержание модуля 5. Нелинейные электрические и магнитные цепи

Тема 13. Методы анализа нелинейных резистивных цепей постоянного тока

Тема 14. Методы анализа нелинейных магнитных цепей

4.5. Методы расчета нелинейных цепей постоянного тока

Для нелинейных электрических цепей справедливы законы Кирхгофа. Для цепей постоянного тока в установившемся режиме уравнения по законам Кирхгофа представляют собой систему нелинейных дифференциальных уравнений. Так как метод наложения для таких цепей неприменим, то становится невозможным применение многих методов расчета, разработанных на его основе (например, методы контурных токов и узловых потенциалов). Общих аналитических методов расчета нелинейных цепей в настоящее время не существует. Можно рассчитать нелинейную цепь тем или иным методом численного анализа, однако часто расчет становится громоздким и его необходимо проводить с помощью средств вычислительной техники.

При выполнении некоторых ограничений система нелинейных алгебраических уравнений может быть решена графическими, аналитическими или комбинированными методами.

В случае применения графических методов характеристики линейных и нелинейных элементов представляют в виде графиков, а система алгебраических уравнений по законам Кирхгофа решается графическими построениями на плоскости.

Для аналитического решения вольтамперные характеристики нелинейных элементов, известные из опыта или заданные графическими либо табличными данными, аппроксимируются аналитическими функциями.

Наибольшее применение находят графо-аналитические методы расчета, которые сочетают в себе возможность применения математических расчетов с простотой и наглядностью графических построений.

4.6. Графический расчет нелинейных цепей

4.6.1. Последовательное соединение нелинейных элементов

Вольтамперная характеристика нелинейного элемента на рис. 4.4 обозначена как $I = f(U_{НЭ})$, вольтамперная характеристика линейного сопротивления представляет собой прямую линию. Вольтамперная характеристика всей цепи обозначена через $I = f(U_{НЭ} + U_R)$. Расчет основывается на законах Кирхгофа. Строится вольтамперная характеристика всей пассивной цепи исходя из того, что при последовательном соединении через нелинейный элемент и резистор протекает один и тот же ток. Если

задаться произвольной точкой m на оси ординат и провести через нее горизонталь, то можно сложить отрезки mn и np , соответствующие падениям напряжения на элементах цепи

$$mn + np = mg.$$

Точка g принадлежит результирующей вольт-амперной характеристике всей схемы. Аналогично можно построить все остальные точки вольт-амперной характеристики. Затем на оси абсцисс откладывается величина ЭДС E и проводится вертикаль до пересечения с результирующей вольт-амперной характеристикой. Точка пересечения дает значение тока, протекающего в цепи.

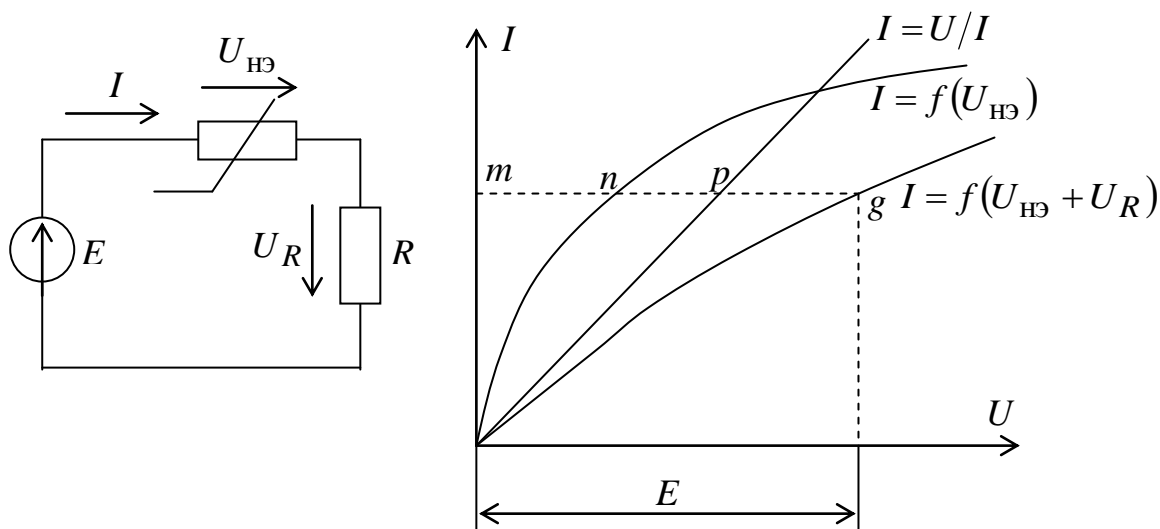


Рис. 4.4. Схема и порядок расчета последовательной нелинейной цепи

4.6.2. Параллельное соединение нелинейных сопротивлений

На рис. 4.5 показано параллельное соединение нелинейных элементов и порядок расчета такого участка нелинейной цепи.

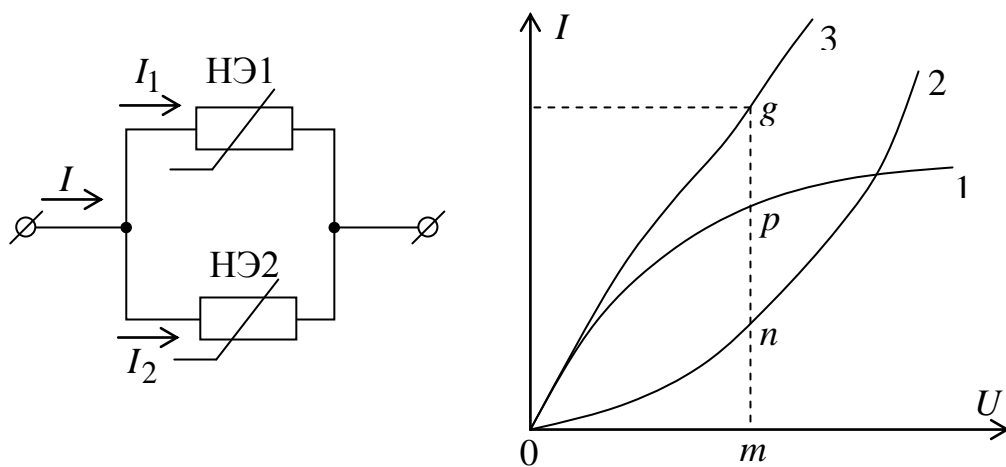


Рис.4.5. Схема и порядок расчета нелинейной цепи при параллельном соединении элементов

Построение вольт-амперной характеристики ведется при одинаковом приложенном напряжении. Сначала задаются произвольным напряжением U , например, равным отрезку $0m$. Проводят через точку m вертикаль. Затем производят суммирование

$$mn + nr = mg.$$

Отрезок mg равен току в неразветвленной части цепи при напряжении U_{0m} . Аналогично определяются и другие точки вольт-амперной характеристики параллельного соединения.

4.6.3. Расчет разветвленной нелинейной цепи методом двух узлов

Для схем, содержащих только два узла, применим метод двух узлов.

Вольтамперные характеристики нелинейных элементов изображены на рис. 4.6 б, в, г. Положим, что $E_1 > E_2 > E_3$. По первому закону Кирхгофа

$$I_1 + I_2 + I_3 = 0; \quad (4.4)$$

$$I_1 = f(U_1); \quad I_2 = f(U_2); \quad I_3 = f(U_3).$$

Выразим все токи в функции не от различных напряжений U_1, U_2, U_3 , а в функции одного переменного – напряжения U_{ab} между узлами:

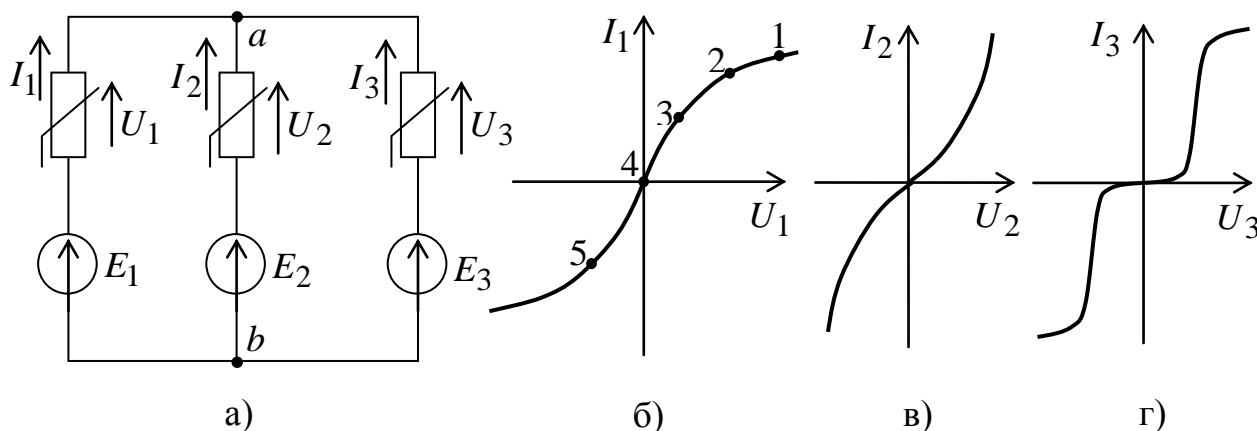


Рис. 4.6. Схема цепи (а) и характеристики нелинейных элементов (б, в, г)

$$\begin{cases} U_1 = E_1 - U_{ab} \\ U_2 = E_2 - U_{ab} \\ U_3 = E_3 - U_{ab}. \end{cases}$$

Необходимо перестроить кривую $I_1 = f(U_1)$ в кривую $I_1 = f(U_{ab})$ и т.д.

На рис. 4.7 показано, как из кривой $I_1 = f(U_1)$ на рис. 4.6б получить кривую $I_1 = f(U_{ab})$. Соответствующие точки обозначены одинаковыми цифрами. Для точки 4 при $I_1 = 0, U_1 = 0$, а $U_{ab} = E_1$, т.е. начало координат

сдвинуто в точку $U_{ab} = E_1$. Росту U_1 при $U_1 > 0$ соответствует уменьшение U_{ab} . Росту U_1 при $U_1 < 0$ отвечает рост U_{ab} , причем $U_{ab} > E_1$.

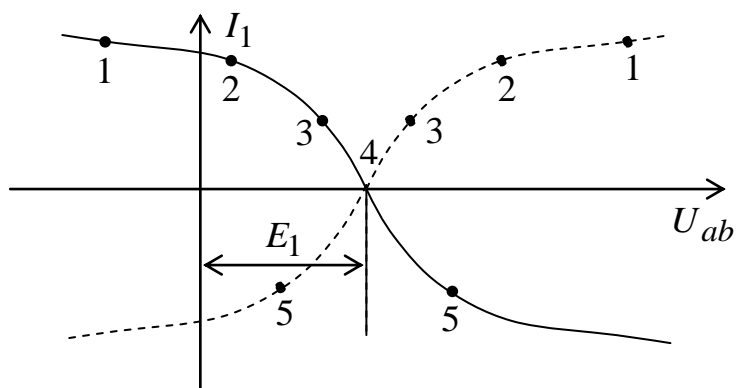


Рис. 4.7. Порядок построения кривой $I = f(U_{ab})$

Порядок перестройки кривой:

1) кривая $I_1 = f(U_1)$ смещается параллельно самой себе так, чтобы ее начало находилось в точке $U_{ab} = E$. Кривая, полученная в результате переноса, представлена на рис.4.7 пунктиром;

2) через точку $U_{ab} = E$ проводится вертикаль, и кривая зеркально отражается относительно нее.

Аналогично производится перестройка кривых и для других ветвей. На рис. 4.8 показано графическое нахождение токов в ветвях для схемы на рис. 4.6а.

Точка m пересечения кривой $I_1 + I_2 + I_3 = f(U_{ab})$ с осью абсцисс дает значение напряжения U_{ab} , при котором удовлетворяется I закон Кирхгофа. Если восстановить в этой точке перпендикуляр к оси абсцисс, то ординаты его пересечения с кривыми $I_1 = f(U_{ab})$, $I_2 = f(U_{ab})$, $I_3 = f(U_{ab})$ будут равны токам в ветвях по величине и по знаку.

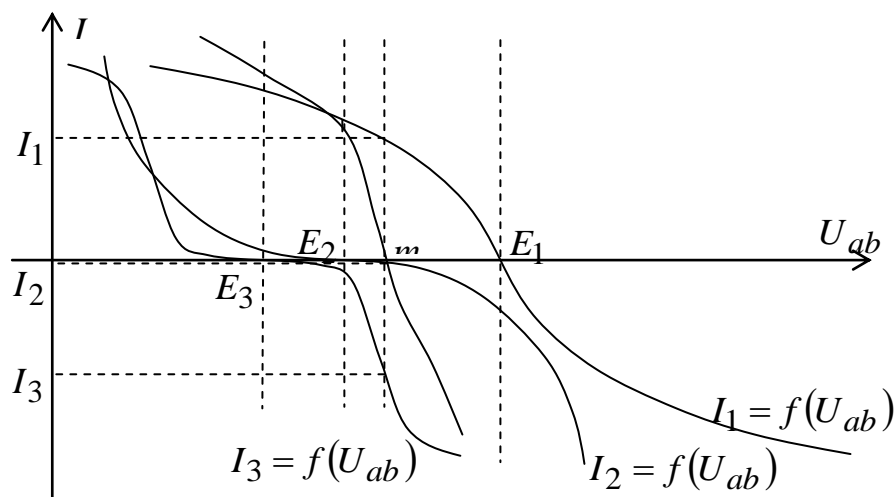


Рис. 4.8. Графическое определение токов

5. НЕЛИНЕЙНЫЕ МАГНИТНЫЕ ЦЕПИ ПРИ НЕИЗМЕННОМ ВО ВРЕМЕНИ МАГНИТНОМ ПОТОКЕ

Для увеличения магнитного потока приданной намагничивающей силе, а также для концентрации магнитного поля и придания ему желаемой конфигурации в определенном месте электротехнической установки ее части выполняют из ферромагнитных материалов. Эти ферромагнитные части называются магнитопроводом или сердечником. В цепях переменного тока ферромагнитные сердечники позволяют получить целый ряд особых явлений.

Магнитный поток в большинстве случаев создается токами, протекающими по системе проводов, которую называют обмоткой (катушкой) устройства. Систему ферромагнитных тел, предназначенных для усиления, надлежащего направления и концентрации магнитного потока, который создается токами обмоток или постоянными магнитами, называют магнитной цепью. О магнитной цепи говорят в тех случаях, когда главная часть магнитного потока проходит по замкнутой или почти замкнутой системе ферромагнитных тел с большой проницаемостью.

5.1. Статические характеристики магнитных материалов

Свойства магнитных материалов обычно характеризуют зависимостью между индукцией B и напряженностью H магнитного поля, которая аналитически точно не определяется, а находится экспериментально и задается в виде графиков и таблиц.

Известно, что при одном и том же значении напряженности магнитного поля индукция может иметь различные значения в зависимости от предшествующего магнитного состояния материала или, как говорят, от магнитной предыстории.

Если в полностью размагниченном ферромагнитном материале монотонно увеличивать напряженность и определять индукцию в установившемся режиме, то получится зависимость $B(H)$, которую называют кривой начального намагничивания (рис. 5.1).

Статическая магнитная проницаемость материала

$$\mu = \frac{B}{\mu_0 H}, \quad (B, \text{Тл} = \text{В} \cdot \text{с} / \text{см}^{-2}; H, \text{А} / \text{м}), \quad (5.1)$$

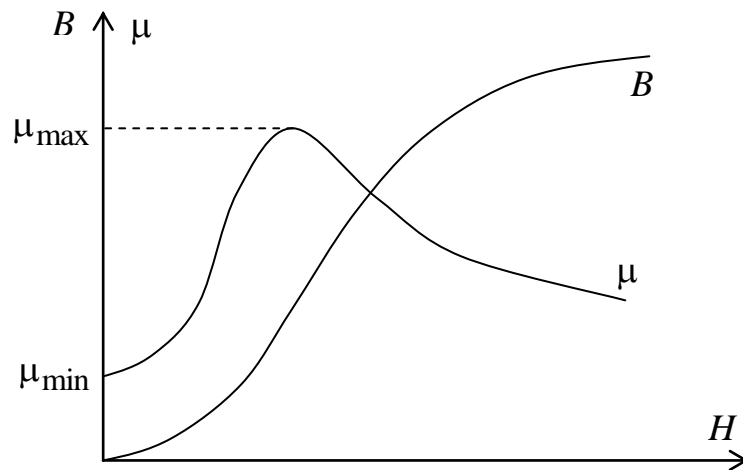


Рис. 5.1. Кривая намагничивания и статическая магнитная проницаемость материала

где $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м – магнитная проницаемость вакуума. Величина μ зависит от напряженности поля.

Вследствие необратимости процессов намагничивания магнитное состояние зависит от предшествующих воздействий, которые постепенно стираются новыми воздействиями (рис. 5.2). Такое свойство называется гистерезисом (от греческого – запаздывание).

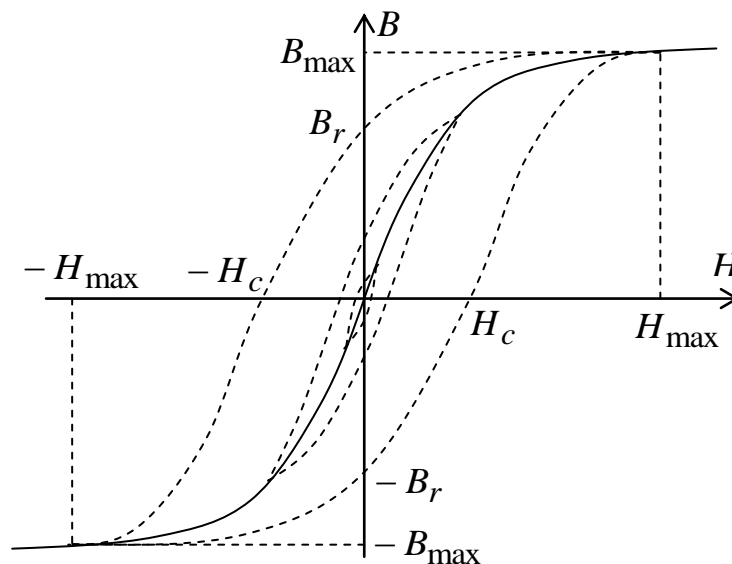


Рис. 5.2. Семейство петель гистерезиса

Семейство симметричных петель гистерезиса (рис. 5.2) получено при различных значениях H_{\max} . По мере увеличения H_{\max} увеличивается ширина петли гистерезиса и меняется ее форма. При некотором H_{\max} форма петли уже не изменяется, а растут безгистерезисные участки. Такая петля носит название предельной петли гистерезиса.

Характерными точками на петле являются:

B_r – остаточная индукция при $H = 0$;

H_c – коэрцитивная (задерживающая) сила при $B = 0$.

Даже в статическом состоянии нелинейный магнитный элемент обладает совершенно различными характеристиками в зависимости от магнитной предыстории. Поэтому принято характеризовать магнитные материалы основной кривой намагничивания, которая является геометрическим местом вершин симметричных петель гистерезиса (на рис. 5.2 она показана сплошной линией). Основная кривая намагничивания однозначна, вполне определена для данного материала и проще всего снимается экспериментально.

5.2. Основные законы и особенности магнитной цепи

Расчеты магнитных цепей основываются на законе полного тока

$$\oint_l \bar{H} d\bar{l} = \sum I \quad (5.2)$$

и на принципе непрерывности магнитного потока

$$\int_s \bar{B} d\bar{s} = 0. \quad (5.3)$$

Согласно закона полного тока линейный интеграл вектора напряженности магнитного потока H вдоль произвольного контура l равен алгебраической сумме токов, пронизывающих этот контур.

Линейный интеграл напряженности характеризует намагничивающее действие электрического тока и называется намагничивающей силой (НС) или магнитодвижущей силой (МДС) вдоль данного замкнутого контура. В уравнении (5.2) направление тока и направление обхода контура связаны друг с другом правовинтовой системой.

Поток вектора магнитной индукции B через некоторую поверхность s называют магнитным потоком

$$\Phi = \int \bar{B} d\bar{s}. \quad (5.4)$$

Принцип непрерывности (5.3) говорит о том, что магнитный поток через произвольную замкнутую поверхность равен нулю, т.е. линии вектора \bar{B} или магнитные линии всегда замкнуты.

Чем больше величина магнитной проницаемости материала, тем легче проходить магнитному потоку по участку магнитной цепи, выполненному из данного материала. Максимальная проницаемость в лучших случаях имеет порядок $10^5 \div 10^6$, тогда как проницаемость неферромагнитных материалов, в том числе и воздуха, практически равна единице. Таким образом,

соотношение между проницаемостью участков магнитопровода и окружающей среды не превышает $10^5 \div 10^6$. В электрических цепях соотношение между проводимостью участков цепи и окружающей среды составляет $10^{10} \div 10^{20}$. Поэтому включение воздушного зазора в цепь не приводит к ее разрыву, т.е. магнитный поток не уменьшается до нуля.

В силу этого, магнитный поток, ответвляющийся через окружающую среду, может составить значительную долю магнитного потока, замыкающегося по магнитной цепи. Данный поток называется потоком рассеяния. Расчет магнитных цепей с учетом потоков рассеяния представляет собой сложную задачу. В некоторых случаях оказывается необходимым рассчитывать магнитную цепь с распределенными параметрами, и часто приходится находить картину магнитного поля. Расчеты таких цепей рассматриваются в разделе «Теория электромагнитного поля», а также в специальных курсах. Далее будем пренебрегать потоками рассеяния и будем считать, что через любое поперечное сечение неразветвленной части магнитной цепи проходит один и тот же поток, а так же все витки данной обмотки пронизываются одним и тем же потоком.

Магнитные цепи часто содержат воздушные зазоры. Эти зазоры могут быть неизбежны по конструктивным причинам (магнитопроводы трансформаторов) или быть принципиально необходимыми (зазоры между статором и ротором электрических машин). Форма магнитного поля в воздушном зазоре обычно неоднородна и трудно поддается расчету. Только в случае, когда длина магнитных зазоров мала по сравнению с поперечными размерами, поле в воздушном зазоре можно считать однородным. В таком поле $\Phi = B \cdot s$.

5.3. Законы Кирхгофа для магнитной цепи. Аналогия между магнитными и электрическими цепями

Из принципа непрерывности магнитного потока (5.3) следует, что для узла магнитной цепи справедливо выражение

$$\sum \Phi = 0. \quad (5.5)$$

Уравнение (5.5) является аналогом первого закона Кирхгофа: алгебраическая сумма потоков, сходящихся в узле цепи, равна нулю (рис. 5.3).

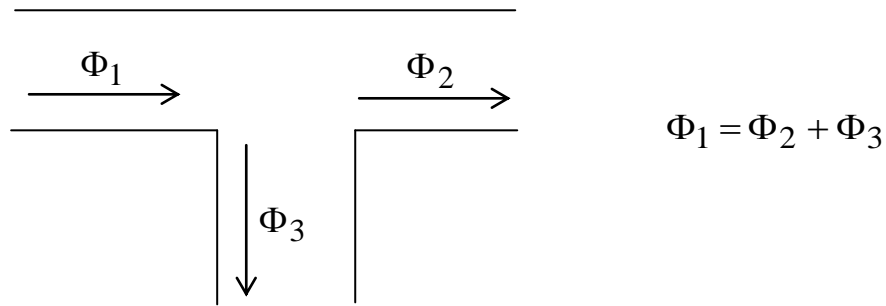


Рис. 5.3. Распределение магнитных потоков

Линейный интеграл напряженности вдоль участка ab цепи называется магнитным напряжением участка

$$\int_{ab} \vec{H} d\vec{l} = U_{\text{Mab}}. \quad (5.6)$$

Намагничивающая сила (НС) катушки F , А, равна

$$F = I W. \quad (5.7)$$

Направление намотки и НС связаны друг с другом правилом правого винта (рис. 5.4).

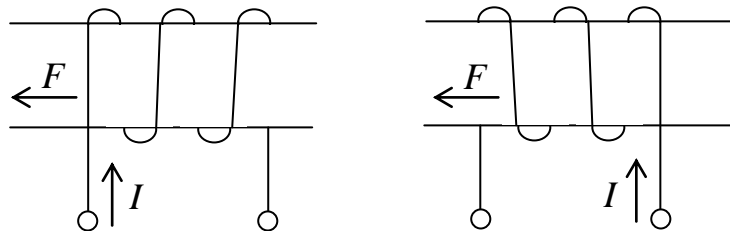


Рис. 5.4. Определение НС обмотки

Из закона полного тока (5.2) следует магнитный аналог второго закона Кирхгофа: алгебраическая сумма НС обмоток в замкнутом контуре магнитной цепи равна алгебраической сумме магнитных напряжений на отдельных участках контура.

$$\begin{cases} \sum I_k W_k = \sum H_k l_k \\ \sum F_k = \sum U_{\text{M} k}. \end{cases} \quad (5.8)$$

Если направление обхода контура совпадает с направлением НС, то эта НС записывается со знаком «+». Если направление магнитного потока на участке совпадает с направлением обхода контура, то магнитное напряжение $U_{\text{M}} = H \cdot l$ на этом участке записывается со знаком «+».

Составим уравнения по законам Кирхгофа для магнитной цепи, изображенной на рис. 5.5.

Предварительно произвольно выбираются положительные направления потоков и намагничивающих сил. Далее определяют ветви цепи и намечают

среднюю линию каждой ветви. Затем разбивают цепь на участки (участки ветви могут отличаться друг от друга материалом или поперечным сечением). Затем выбирают независимые контуры и направления их обхода.

Пусть ветвь amb будет участком 1, $ab - 2$, $(ad + cb) - 4$.

По I закону Кирхгофа для узла a

$$\Phi_1 + \Phi_2 - \Phi_3 = 0. \quad (5.9)$$

По II закону Кирхгофа для внешнего и правого контуров при обходе их против часовой стрелки можно записать:

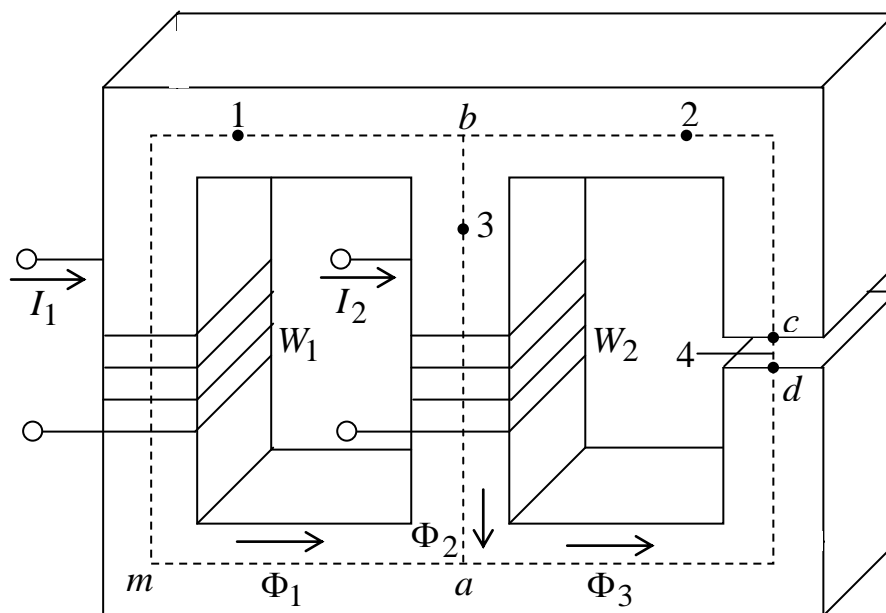


Рис. 5.5. Пример схемы для расчета магнитной цепи

$$\begin{cases} I_1 W_1 = F_1 = H_1 l_1 + H_3 l_3 + H_4 l_4 \\ I_2 W_2 = F_2 = H_3 l_3 + H_4 l_4 + H_2 l_2. \end{cases} \quad (5.10)$$

Пренебрегая рассеянием, полагаем $\Phi_3 = \Phi_4$, а пренебрегая выпучиванием, получаем $s_3 = s_4$.

Между магнитными и электрическими величинами существует аналогия: $\Phi \rightarrow I$; $F \rightarrow E$; $U_M \rightarrow U$.

По аналогии можно ввести понятие о магнитном сопротивлении:

$$\begin{cases} R = \frac{U}{I} \rightarrow R_M = \frac{U_M}{\Phi} \\ R_M = \frac{U}{\Phi} = \frac{Hl}{\mu\mu_0 Hs} = \frac{l}{\mu\mu_0 s} \end{cases} \quad (5.11)$$

У неферромагнитного участка магнитное сопротивление линейно и в μ раз больше, чем сопротивление ферромагнитного участка аналогичной геометрии.

Магнитная проницаемость ферромагнитного участка зависит от индукции, следовательно, его магнитное сопротивление нелинейно. Поэтому чаще расчеты ведут, пользуясь магнитными характеристиками участков, аналогичными вольтамперным характеристикам нелинейных электрических элементов.

Магнитной характеристикой называется зависимость $\Phi(U_M)$ или $\Phi(Hl)$, которая легко определяется по кривой намагничивания материала участка и его геометрическим размерам.

В результате можно составить схему замещения магнитной цепи, которую можно проанализировать, пользуясь методами расчета нелинейных электрических цепей (рис. 5.6).

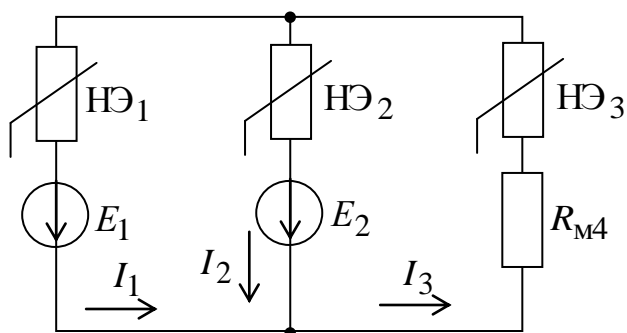


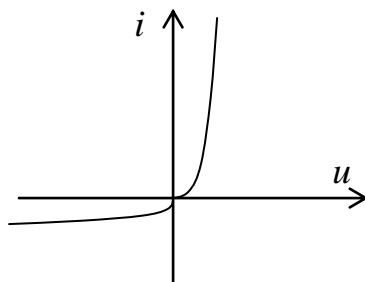
Рис. 5.6. Схема замещения магнитной цепи

6. НЕЛИНЕЙНЫЕ ЦЕПИ ПРИ ГАРМОНИЧЕСКОМ ВОЗДЕЙСТВИИ

6.1 Идеальный и реальный вентили

Нелинейный резистивный элемент с наиболее резко выраженной несимметрией вольт-амперной характеристики (ВАХ) (относительно начала координат), т.е. элемент с односторонней проводимостью, называется вентилем.

Примерами являются селеновые, германиевые, кремниевые и другие полупроводниковые диоды, ртутные вентили, газотроны, электронные лампы всех типов, транзисторы, тиристоры и др. Один из типов вольтамперных характеристик приведен на рис. 6.1.



В зависимости от реальных параметров цепи ВАХ можно приблизительно

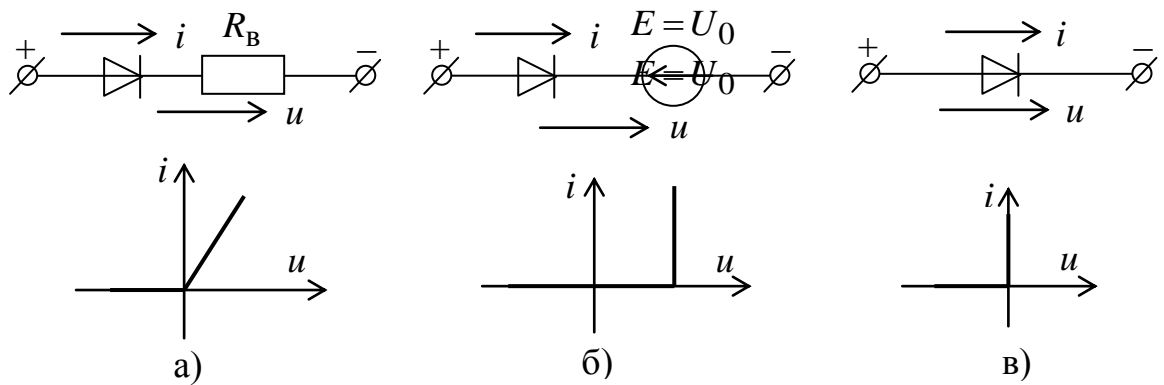


Рис. 6.2. ВАХ различных вентилей
 Элементы а) и б) можно представить схемами замещения, состоящими из идеального вентиля и включенного с ним последовательно резистивного элемента с R_B или источника ЭДС E .

Под идеальным вентилем понимается такой элемент, сопротивление которого при одной полярности напряжения равно нулю, а при обратной – равно бесконечности.

6.2. Выпрямители

Схема однополупериодного выпрямителя (рис. 6.3) состоит из идеального диода и сопротивления нагрузки. При подаче на схему переменного напряжения $u = U_m \sin \omega t$ через сопротивление нагрузки ток протекает только в одном направлении в течение одной половины периода питающего напряжения. Соответственно при этом создается напряжение на выходе выпрямителя.

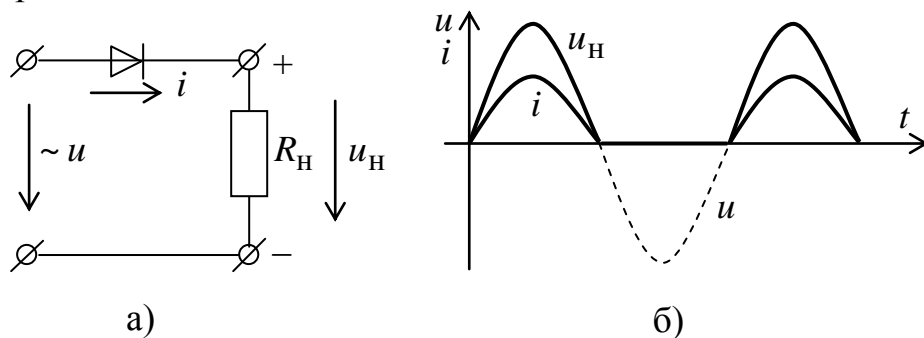


Рис. 6.3. Схема (а) и временные диаграммы работы

Чаще применяются выпрямители, у которых ток через нагрузку протекает в одном направлении обе половины периода (рис. 6.4а, 6.5).

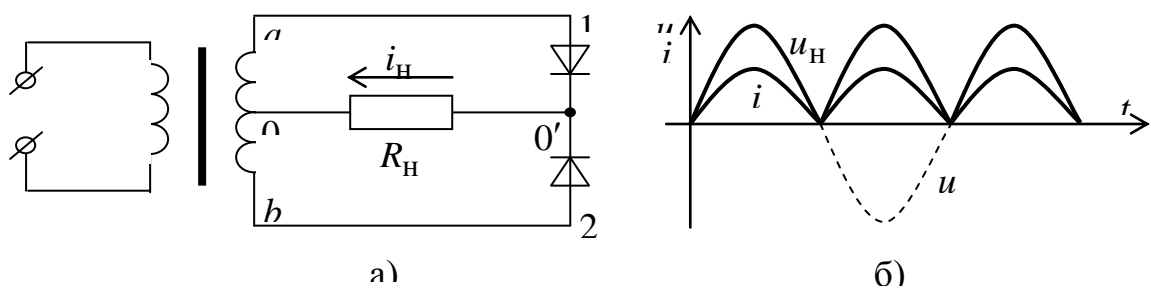


Рис.6.4. Схема (а) и временные диаграммы работы (б) выпрямителя со средней точкой

В схеме (рис. 6.4а) ток в течение одной половины периода проходит через верхнюю часть вторичной обмотки трансформатора и первый диод ($0 - a - 1 - 0' - 0$), а в течение другого полупериода – через нижнюю часть обмотки и второй диод ($0 - b - 2 - 0' - 0$). Таким образом, токи, проходящие через оба вентиля в разные половины периода, совпадают по направлению в сопротивлении нагрузки R_H . Поэтому такой выпрямитель называется двухполупериодным.

Для двухполупериодного выпрямления широко применяются мостовые схемы (рис. 6.5).

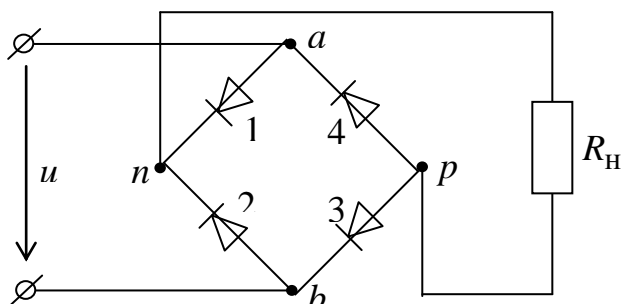


Рис. 6.5. Мостовой выпрямитель

К выводам $a - b$ моста, составленного из четырех диодов, подведено синусоидальное напряжение. В течение первой половины периода напряжение u положительно по отношению к зажимам $a - b$, и ток протекает через диод 1, сопротивление нагрузки и диод 3. В течение второй половины периода напряжение u положительно по отношению к зажимам $b - a$, и ток протекает через диод 2, сопротивление нагрузки и диод 4. При этом направление тока в сопротивлении нагрузки одинаково в течение всего периода (временная диаграмма напряжения и тока в нагрузке аналогична, показанной на рис.6.4). Поэтому эта схема также относится к схемам с двухполупериодным выпрямлением.

6.3. Нелинейная индуктивность. Связь тока с магнитным потоком

В катушках со стальными магнитопроводами при синусоидальных напряжениях на выводах токи обычно оказываются несинусоидальными, и, наоборот, при синусоидальных токах в напряжениях появляются высшие гармоники.

Рассмотрим форму кривой тока при синусоидальном напряжении $u = U_m \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$ на выводах катушки.

Допустим, что сопротивление обмотки катушки ничтожно мало и им, так же как и потоком рассеяния, можно пренебречь. В этом случае между потоком в магнитопроводе и напряжением на выводах катушки существует зависимость:

$$\frac{d\Psi}{dt} = W \frac{d\Phi}{dt} = u = U_m \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right), \quad (6.1)$$

где W – число витков обмотки, $\Phi = \frac{U_m}{\omega W} \sin \omega t$.

Таким образом, при синусоидальном напряжении магнитный поток также синусоидален и отстает по фазе от напряжения на угол $\frac{\pi}{2}$.

Найдем зависимость между током и напряжением в дросселе при однозначной зависимости $B = f(H)$.

Рассмотрим магнитопровод, выполненный из магнитомягкой стали с малыми потерями, для которой петель гистерезиса можно пренебречь.

Имея зависимость $I(\Phi)$ и зная зависимость $\Phi(t)$, можно легко найти зависимость $i(t)$. Пример построения этой зависимости показан на рис. 6.6.

Кривая тока имеет заостренную форму. Чем больше амплитуда магнитного потока, тем сильнее сказывается насыщение стали, острее кривая тока и резче в ней проявляются, в первую очередь, третья, а затем и пятая гармоника.

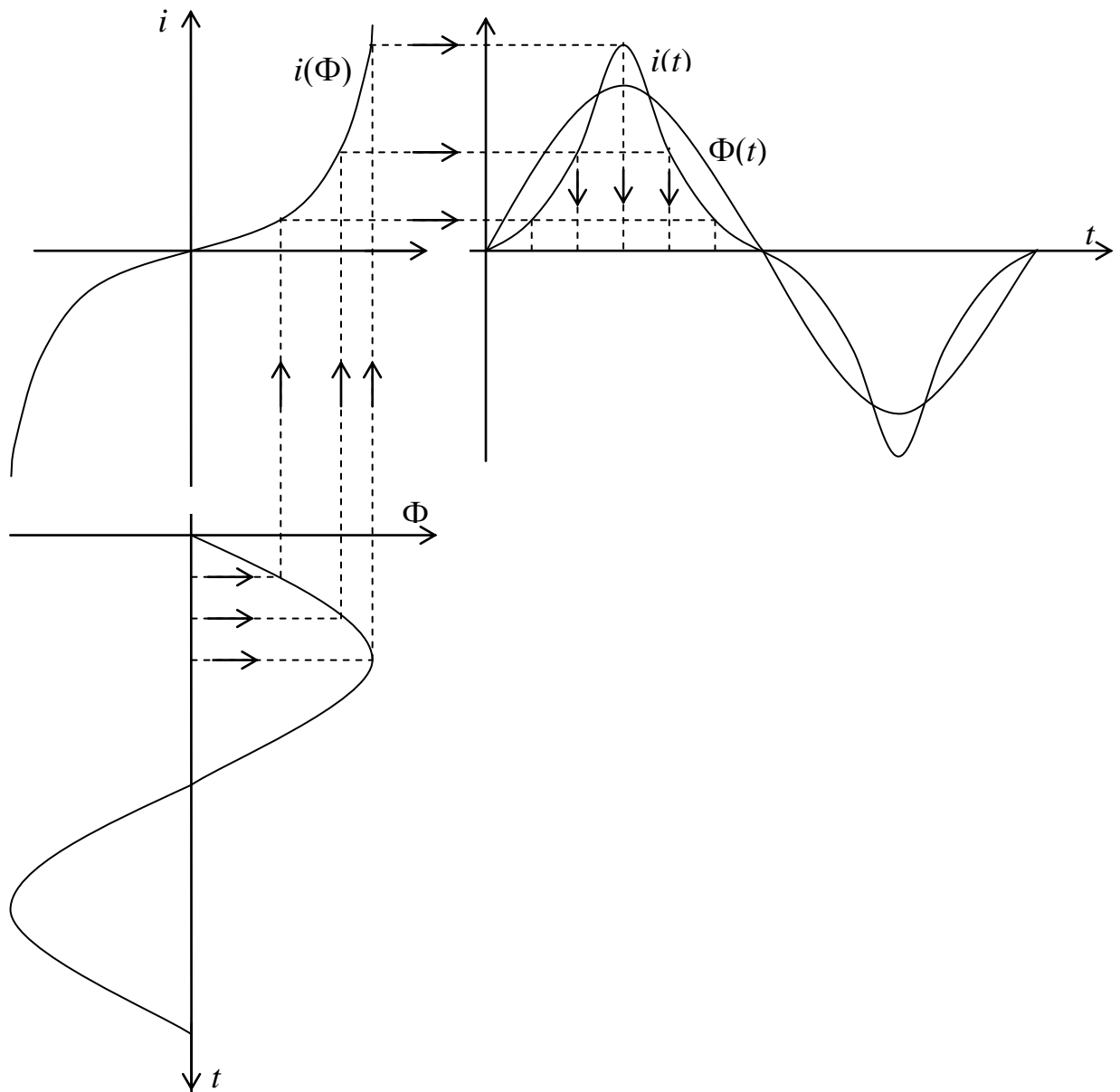


Рис. 6.6. Построение зависимости $i(t)$

Основная гармоника тока совпадает по фазе с магнитным потоком и отстает от напряжения на четверть периода. Активная мощность, потребляемая от источника синусоидального напряжения равна нулю.

При расчете потерь в стали необходимо учитывать неоднозначность зависимости тока от магнитного потока.

Графическое построение выполняется по точкам аналогично предыдущему случаю (рис. 6.7).

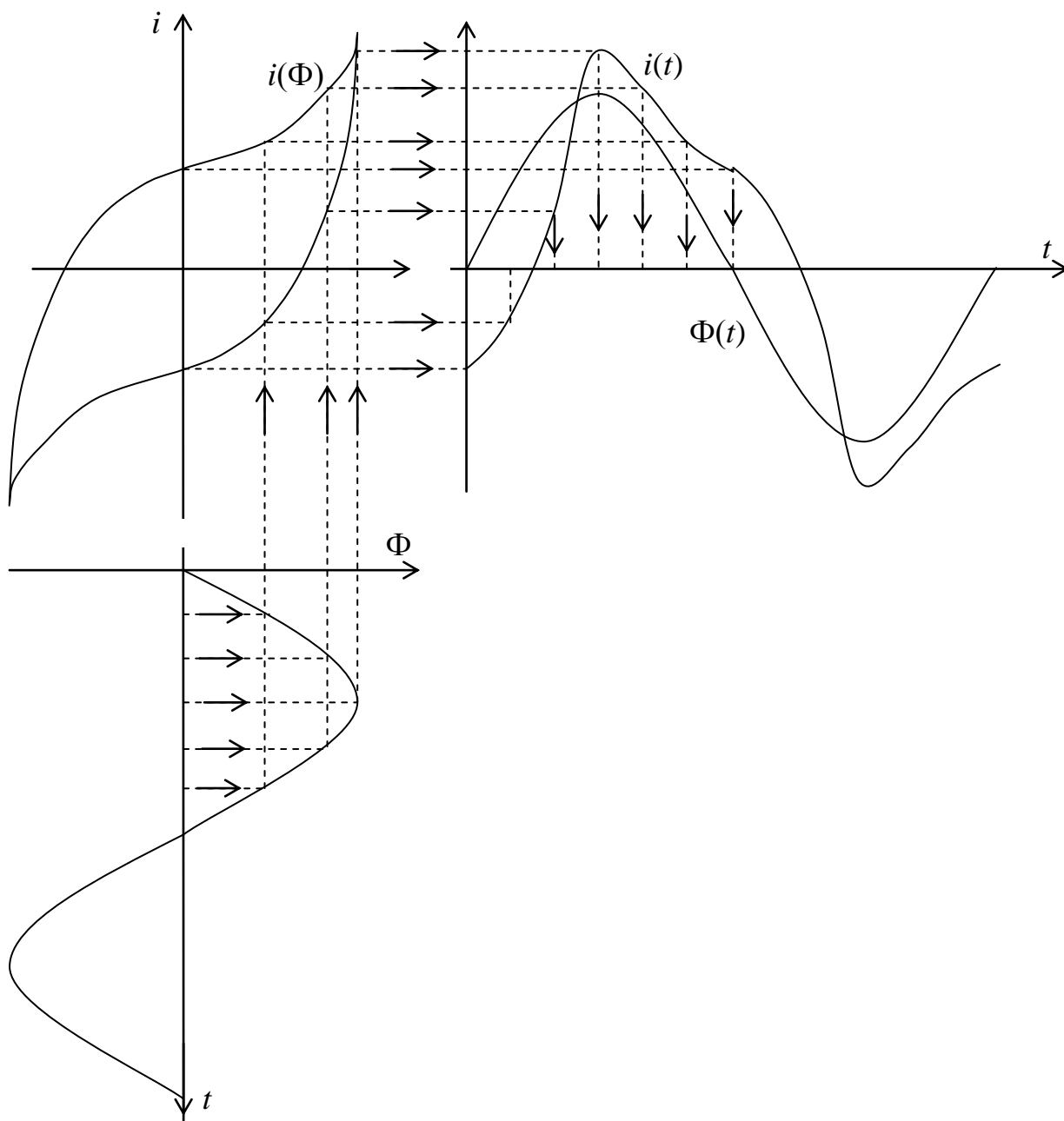


Рис. 6.7. Построение зависимости $i(t)$ при учете явления гистерезиса

Максимумы тока и магнитного потока совпадают, но ток проходит через ноль несколько раньше, чем магнитный поток достигает нуля, что обусловлено явлением гистерезиса.

6.4. Потери в стали для катушки с ферромагнитным сердечником

Ранее были рассмотрены характеристики катушек со сталью без учета потерь в стали, т.е. той части энергии, которая расходуется на нагрев в стали, обусловленный гистерезисом и вихревыми токами. При инженерных расчетах технических устройств, содержащих стальные магнитопроводы и работающих при переменном токе, такое допущение делать нельзя, так как именно этими явлениями и обусловлены потери энергии, значение которых во многом определяет тепловой режим работы устройств. Вихревые токи возникают в стальном магнитопроводе под влиянием электрического поля, наводимого в магнитопроводе переменным магнитным потоком.

Кроме потерь энергии вихревые токи производят размагничивающее действие.

Для уменьшения влияния вихревых токов магнитопровод собирают из отдельных электрически изолированных один от другого листов. Кроме того, для уменьшения вихревых токов листы изготавливаются из специальных сортов электротехнической стали, содержащих различные примеси, снижающие удельную проводимость.

Если пренебречь неравномерностью распределения магнитного потока в поперечном сечении листов, то мощность потерь от вихревых токов

$$P_B = \sigma_B f^2 B_m^2 G, \quad (6.2)$$

где σ_B – коэффициент, зависящий от сорта стали и толщины листов;

B_m – амплитуда магнитной индукции;

G – масса рассматриваемой части магнитопровода.

Периодическое перемагничивание стали сопряжено с потерями энергии, обусловленными гистерезисом. Мощность потерь от гистерезиса определяется по различным эмпирическим формулам, например:

$$P_H = \sigma_H f B_m^n G, \quad (6.3)$$

где σ_H – коэффициент, зависящий от сорта стали;

$n = 1,6$ при $0,1 < B_m < 1$, Тл;

$n = 2$ при $1 < B_m < 1,6$, Тл.

Мощность потерь в стали

$$P_{ст} = P_B + P_H. \quad (6.4)$$

6.5. Эквивалентная схема замещения катушки со сталью.

Векторная диаграмма

Рассмотрим катушку со стальным магнитопроводом при достаточно низкой частоте, так что емкостью между витками катушки можно пренебречь (рис. 6.8).

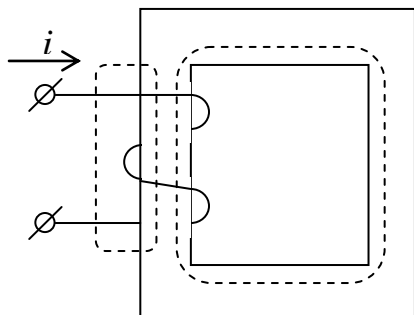


Рис. 6.8. Распределение потоков в катушке

Часть магнитных линий замыкается помимо магнитопровода, через воздух, и определяет индуктивность рассеяния L_{σ} и индуктивное сопротивление рассеяния X_{σ} . Катушка имеет активное сопротивление R , величина которого зависит от сечения провода, его удельного сопротивления, числа витков катушки и размеров магнитопровода.

Схема замещения катушки со сталью представлена на рис. 6.9.

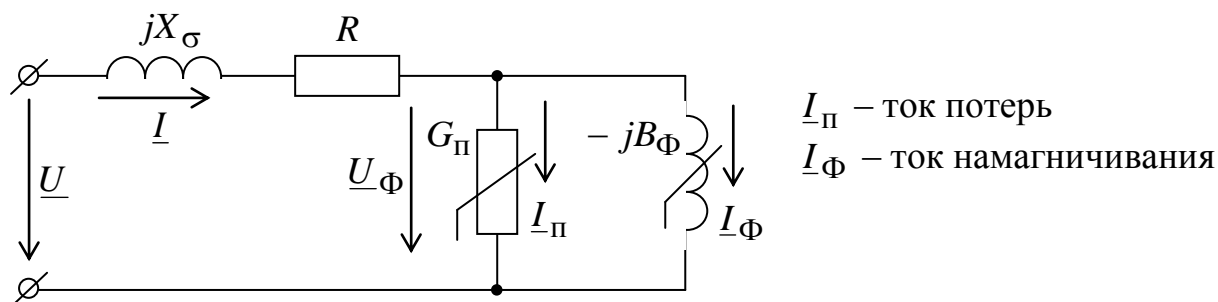


Рис. 6.9. Схема замещения катушки со сталью

Токи потерь и намагничивания зависят от числа витков катушки и размеров магнитопровода, а также от характеристик (максимальная индукция, площадь петли гистерезиса, проводимость и толщина листов стали) магнитопровода.

Векторная диаграмма катушки показана на рис. 6.10.

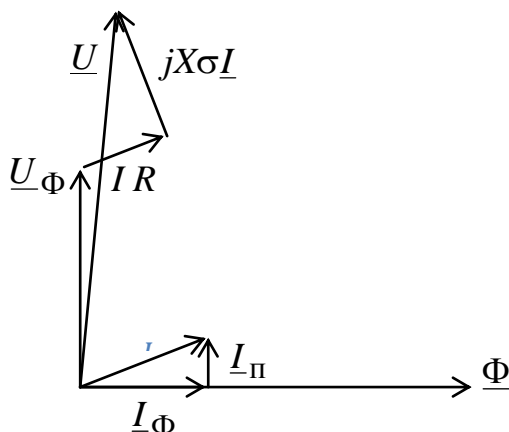


Рис. 6.10. Векторная диаграмма катушки

6.6. Феррорезонанс токов и напряжений. Феррорезонансный стабилизатор напряжения

В цепях с нелинейной катушкой индуктивности и конденсатором плавное изменение напряжения может вызвать скачки фазы и амплитуды основной гармоники тока и наоборот – плавное изменение тока может сопровождаться скачкообразным изменением фазы и амплитуды основной гармоники напряжения на некоторых участках цепи.

Явление изменения знака угла сдвига фаз между основными гармониками напряжения и тока источника питания, обусловленное нелинейностью катушек со сталью, носит название феррорезонанса.

При последовательном соединении катушки со стальным магнитопроводом и конденсатора возникает феррорезонанс напряжений, а при параллельном соединении – феррорезонанс токов.

Это явление используют в феррорезонансных стабилизаторах напряжения, одна из схем которых показана на рис. 6.11. Изменение напряжения питания на значительную величину сопровождается незначительным изменением напряжения на катушке. Сущность явления стабилизации заключается в таком изменении параметров

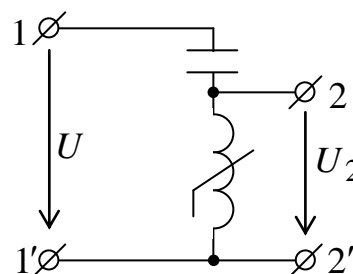


Рис. 6.11. Схема феррорезонансного стабилизатора напряжения

последовательно включенных элементов нелинейной цепи с изменением напряжения питания, при котором относительное изменение напряжения на одном из участков цепи оказывается значительно ниже, чем на входе.

Так в цепи на рис. 6.11 с увеличением напряжения питания ток резко возрастает, и его увеличение приводит к уменьшению индуктивности катушки со стальным сердечником, в то время как емкость конденсатора остается без изменений.

Присоединение приемника к вторичным выводам стабилизатора создает ветвь, параллельную нелинейной катушке, в результате чего ток в катушке уменьшается. С изменением напряжения питания полное сопротивление между выводами 2-2' изменяется меньше, чем при отсутствии нагрузки, а, следовательно, ухудшаются стабилизирующие свойства цепи.

Коэффициент стабилизации нагруженного стабилизатора обычно ниже, чем в режиме холостого хода

$$k_{ст} = \frac{dU_1}{U_1} / \frac{dU_2}{U_2} = \frac{dU_1}{dU_2} \cdot \frac{U_2}{U_1}.$$

КУРС ЛЕКЦИЙ МОДУЛЯ №6

Содержание модуля 6. Переходные процессы в линейных электрических цепях

Тема 15. Расчет переходных процессов в R-L цепях первого порядка.

Тема 16. Расчет переходных процессов в R-C цепях первого порядка

Тема 17. Расчет переходных процессов в цепях второго порядка

Тема 18. Операторный метод расчета

ПЕРЕХОДНЫЕ ПРОЦЕССЫ В ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЯХ С СОСРЕДОТОЧЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

26.1. Возникновение переходных процессов и законы коммутации

В электрических цепях могут происходить включения и отключения пассивных или активных цепей, короткие замыкания отдельных участков, различного рода переключения, внезапные изменения параметров и т.д. В результате таких изменений, называемых коммутационными или просто *коммутациями*, которые будем считать происходящими мгновенно, в цепи возникают переходные процессы, заканчивающиеся спустя некоторое (теоретически бесконечно большое) время после коммутации.

Примем следующие обозначения:

$t = 0$ – начало отсчета времени переходного процесса;

0_- – момент времени непосредственно перед мгновенной коммутацией;

0_+ – момент времени непосредственно сразу после мгновенной коммутации.

В индуктивном элементе ток (и магнитный поток) непосредственно после коммутации в момент, который и назван моментом коммутации, сохраняет значение, которое он имел непосредственно перед коммутацией, т.е. при $t = 0_-$ и дальше начинает изменяться именно с этого значения. Записанное в математической форме это явление называется первым законом коммутации:

$$i_L(0_-) = i_L(0) = i_L(0_+).$$

Так, при включении ветви с катушкой, в которой не было тока, ток в этой ветви в момент коммутации равен нулю. Если для такой ветви допустить, что в момент коммутации ток изменяется скачком, то напряжение на индуктивном элементе $u_L = L \frac{di}{dt}$ будет бесконечно большим и не будет выполняться II закон Кирхгофа.

На емкостном элементе напряжение (и заряд) сохраняет в момент коммутации то значение, которое оно имело непосредственно перед коммутацией, и в дальнейшем изменяется, начиная именно с этого значения. Это явление называется вторым законом коммутации:

$$u_C(0_+) = u_C(0) = u_C(0_-).$$

Так, при включении ветви с конденсатором, который не был заряжен, напряжение в момент коммутации равно нулю. Если допустить, что в момент коммутации напряжение на емкостном элементе изменится скачком, то ток $i_C = C \frac{du_C}{dt}$ будет бесконечно большим, и в цепи не будет выполняться II закон Кирхгофа.

С энергетической точки зрения невозможность мгновенного изменения тока i_L и напряжения u_C объясняется невозможностью скачкообразного изменения запасенной в индуктивном и емкостном элементах энергии, так как такое изменение энергии требует бесконечно большой мощности.

26.2. Переходные, установившиеся и свободные процессы

Рассмотрим общие вопросы расчета переходных процессов на простом примере – включение RLC – цепи к источнику ЭДС e , которая изменяется во времени непрерывно и задана каким-либо аналитическим выражением:

$$Ri + L \frac{di}{dt} + u_C = e, \quad (9.1)$$

где i – ток переходного процесса, который будем называть переходным током; $u_C = u_C(0) + \frac{1}{C} \int_0^t i \cdot dt$ – напряжение на конденсаторе.

Когда с переходным процессом можно не считаться, наступает принужденный режим. Принужденный режим, создаваемый источником произвольной периодически изменяющейся ЭДС (или током) называется *установившимся*.

В установившемся режиме

$$Ri_y + L \frac{di_y}{dt} + u_{Cy} = e, \quad (9.2)$$

где i_y , u_{Cy} – ток и напряжение установившегося режима (установившийся ток и установившееся напряжение).

Если вычесть из уравнения (9.1) уравнение (9.2) и обозначить $i_{св} = i - i_y$, то

$$Ri_{св} + L \frac{di_{св}}{dt} + u_{Cсв} = 0. \quad (9.3)$$

Разности токов и напряжений переходного процесса и принужденного режима называются током и напряжением свободного процесса или просто свободным током и напряжением.

Процесс, происходящий в цепи, можно рассматривать состоящим из двух накладывающихся друг на друга процессов – установившегося, который как бы наступил сразу, и свободного, имеющего место только во время переходного процесса:

$$\begin{aligned}i &= i_y + i_{св}; \\u_L &= u_{Ly} + u_{Lсв}; \\u_C &= u_{Cy} + u_{Cсв}; \\u_R &= u_{Ry} + u_{Rсв}.\end{aligned}$$

Конечно, физически существуют только переходные токи и напряжения, и разложение их на составляющие является удобным математическим приемом, облегчающим расчет переходных процессов.

Разложение переходных токов и напряжений соответствует правилу решения линейных неоднородных дифференциальных уравнений, согласно которому общее решение равно сумме частного решения неоднородного уравнения и общего решения однородного уравнения.

Свободный ток представляет собой общее решение однородного дифференциального уравнения (9.3), и в его выражении должны быть постоянные интегрирования, число которых равно порядку дифференциального уравнения.

Установившийся ток – частное решение неоднородного дифференциального уравнения (7.1), которое получается из общего решения неоднородного дифференциального уравнения при равных нулю постоянных интегрирования.

При интегрировании дифференциальных уравнений появляются постоянные интегрирования, которые определяют из начальных условий.

Начальные условия – значения переходных токов в индуктивных элементах и напряжений на емкостных элементах при $t = 0$, т.е. те значения, которые в момент коммутации не изменяются скачком. Это так называемые *независимые начальные условия*.

Начальные значения всех остальных токов и напряжений называются *зависимыми начальными условиями*. Их определяют по независимым начальным условиям при помощи уравнений, составленных по I и II законам Кирхгофа. Это является основной трудностью решения *классическим методом*.

26.3. Переходные процессы в цепи с последовательно соединенными участками R и L

Примером такой цепи может служить эквивалентная схема катушки индуктивности, обладающей активным сопротивлением R и индуктивностью L .

Дифференциальное уравнение такой цепи

$$L \frac{di}{dt} + Ri = u(t), \quad (9.4)$$

где $u(t)$ – напряжение на зажимах цепи.

Соответствующее однородное уравнение, определяющее свободный ток:

$$L \frac{di_{св}}{dt} + Ri_{св} = 0.$$

Характеристическое уравнение

$$Lp + R = 0$$

имеет единственный корень $p = -R/L$. Тогда свободный ток можно вычислить как

$$i_{св} = Ae^{pt} = Ae^{-(R/L)t}. \quad (7.5)$$

Выражение установившегося тока $i_y(t)$, являющегося частным решением дифференциального уравнения, определяемое видом заданной функции $u(t)$.

Ток в переходном режиме

$$i = i_y + i_{св} = i_y + Ae^{-(R/L)t}.$$

Постоянная интегрирования A определяется по начальному значению тока i .

Рассмотрим ряд частных случаев.

1. Пусть цепь в момент $t = 0$ отключается от источника и замыкается накоротко (рис. 9.1).

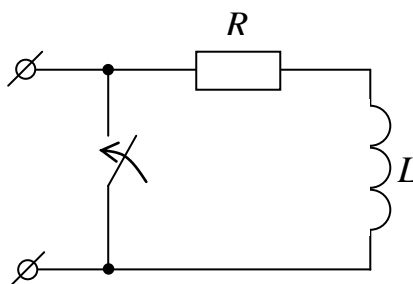


Рис. 9.1. Замыкание катушки индуктивности накоротко
После замыкания накоротко $u = 0$. Установившийся ток в этом случае $i_y = 0$. Тогда полный ток

$$i = i_{св} = Ae^{-(R/L)t}. \quad (9.6)$$

Начальное условие для определения A : $i(0_+) = i(0_-)$.

Пусть к моменту коммутации ток в цепи был равен $i(0_-) = I$. Следовательно, $i(0_+) = I$. Полагая в уравнении (9.6) $i = I$ и $t = 0$, находим $I = A$.

Решение уравнения имеет вид

$$i = Ie^{-(R/L)t} = Ie^{-t/\tau}. \quad (9.7)$$

Величина $\tau = L/R$ имеет размерность времени и называется постоянной времени цепи. За промежуток времени t ток уменьшается в e раз. Чем больше τ , тем медленнее затухает ток.

Теоретически ток станет равным нулю через бесконечно большой промежуток времени, практически он становится малым за промежуток времени в несколько значений τ (рис. 9.2).

Постоянная времени τ равна длине подкасательной в любой точке кривой $i(t)$ на рис. 9.2, так как $\frac{di}{dt} = -\frac{i}{\tau}$.

Энергия, выделяемая в виде теплоты в активном сопротивлении R , равна энергии, запасенной в магнитном поле цепи в начальный момент времени

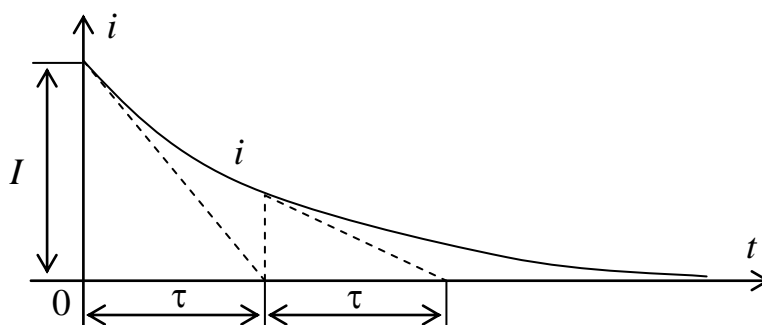


Рис. 9.2. Кривая изменения тока в катушке индуктивности

$$\int_0^{\infty} i^2 R dt = I^2 R \int_0^{\infty} e^{-(2R/L)t} dt = \frac{LI^2}{2}. \quad (9.8)$$

Постоянная времени τ больших катушек с сердечником может быть весьма значительной. Так, постоянная времени обмотки возбуждения крупных гидрогенераторов может иметь значение 5 с.

2. Рассмотрим процесс отключения от источника постоянного напряжения цепи, состоящей из индуктивной катушки с параметрами R и L и соединенной с ней параллельно ветви с сопротивлением R_0 (рис. 9.3).

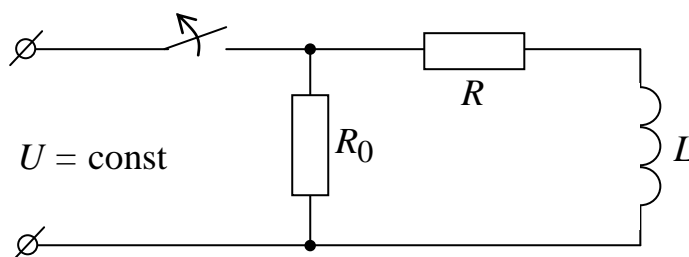


Рис. 9.3. Отключение катушки индуктивности

Переходный процесс описывается уравнением

$$i = i_{\text{св}} = Ae^{-t/\tau},$$

где $\tau = L/(R + R_0)$.

До размыкания рубильника в катушке протекает ток $i_L(0_-) = U/R$.

$$A = i_L(0_+) = i_L(0_-) = U/R.$$

Ток в катушке

$$i = \frac{U}{R} e^{-t/\tau}. \quad (9.9)$$

Напряжение на участке с сопротивлением R_0 до размыкания было равно U , а в первый момент времени после размыкания оно окажется равным

$$R_0 i(0_-) = U R_0/R. \quad (9.10)$$

Если $R_0 > R$, например, на зажимах катушки с сопротивлением R включен вольтметр с большим сопротивлением, то при отключении цепи напряжение на вольтметре в первый момент повысится R_0/R раз.

Если энергия магнитного поля, запасенная в катушке достаточно велика, то вольтметр может быть сожжен. Поэтому во избежание возникновения больших перенапряжений при отключении цепей постоянного тока, обладающих большой индуктивностью, например, обмоток возбуждения генераторов, эти цепи предварительно замыкают на малое сопротивление.

3. Рассмотрим процессы при включении RL цепи на постоянное напряжение $u = U = \text{const}$ (рис. 9.4).

Ток установившегося режима $i_y = U/R$.

Общий ток в переходном режиме $i = \frac{U}{R} + Ae^{-(R/L)t}$.

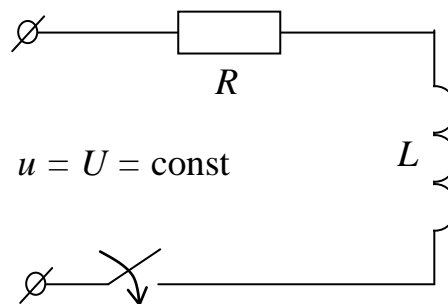


Рис. 9.4. Включение катушки индуктивности на постоянное напряжение

Если до включения ток был равен нулю $i(0_-) = 0$, то при $t = 0$

$$i(0_+) = i(0_-) = U/R + A = 0; \quad A = -U/R.$$

Решение уравнения

$$i = \frac{U}{R} (1 - e^{-t/\tau}). \quad (9.11)$$

Напряжение на зажимах катушки

$$u_L = L \frac{di}{dt} = L \frac{U}{R} \cdot \frac{1}{\tau} e^{-t/\tau} = U e^{-t/\tau}. \quad (9.12)$$

Кривые изменения тока и напряжения на катушке показаны на рис. 9.5.
 4. Рассмотрим процесс при включении цепи под синусоидальное напряжение: $u = U_m \sin(\omega t + \psi)$.

Ток установившегося режима

$$i_y = \frac{U_m}{Z} \sin(\omega t + \psi - \varphi) = I_m \sin(\omega t + \psi - \varphi).$$

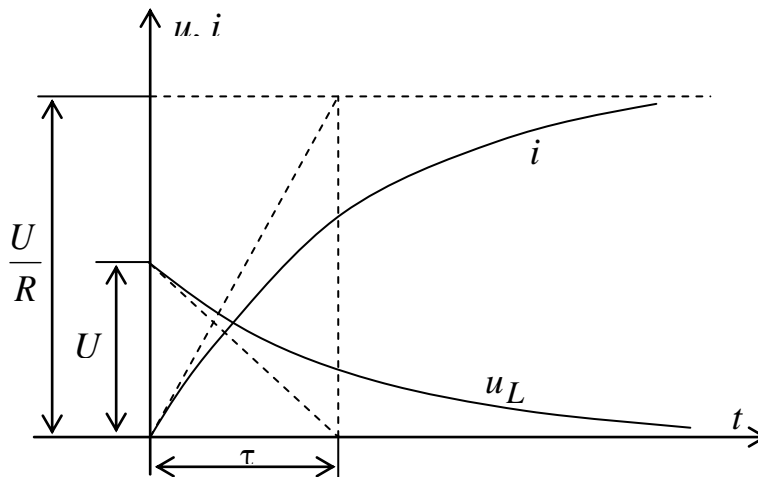


Рис. 9.5. Кривые изменения тока и напряжения
 Общий ток $i = i_y + i_{св} = I_m \sin(\omega t + \psi - \varphi) + A e^{-t/\tau}$,

где $I_m = U_m/Z$; $Z = \sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}$; $\varphi = \arctg \omega L/R$; $\tau = L/R$.

Постоянную интегрирования A определяем из начального условия $i(0_-) = 0$.

$$i(0_+) = i(0_-) = I_m \sin(\psi - \varphi) + A = 0$$

Общий ток:

$$i = i_y + i_{св} = I_m \sin(\omega t + \psi - \varphi) - I_m \sin(\psi - \varphi) e^{-t/\tau}. \quad (9.13)$$

Кривые изменения тока и напряжения изображены на рис. 9.6.

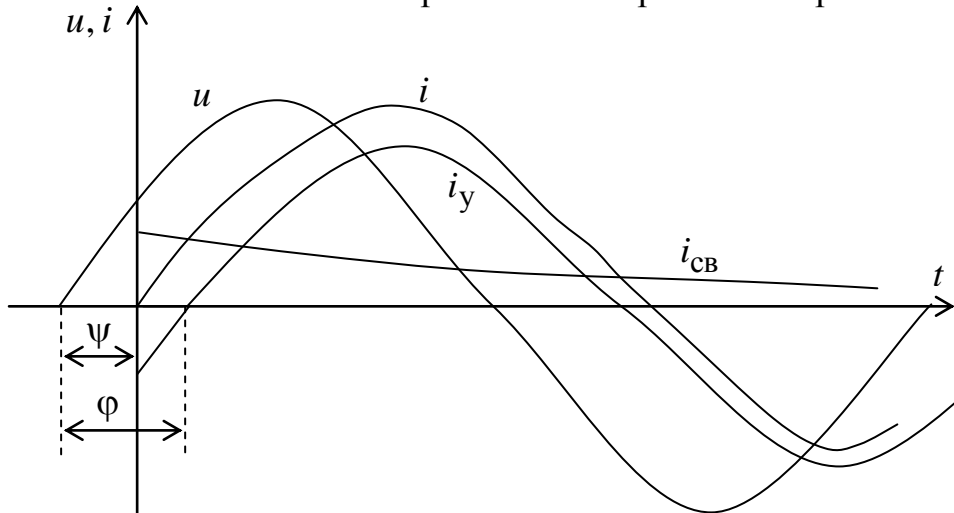


Рис. 9.6. Кривые изменения тока и напряжения при включении катушки на синусоидальное напряжение

Начальное значение свободного тока зависит от начальной фазы ψ напряжения. Наибольшее значение свободного тока, равное амплитуде I_m установившегося тока, имеет место, если $\psi - \varphi = +\pi/2$. Наибольшее значение результирующего тока не превышает двойной амплитуды установившегося тока. Свободный ток не возникает, и сразу наступает установившийся режим при условии $\psi = \varphi$.

27.2. Переходные процессы в цепи с последовательно соединенными участками R и C

Обозначим напряжение на зажимах цепи через u , напряжение на обкладках конденсатора через u_C , значение его заряда через q

$$Ri + u_C = u. \quad (9.14)$$

Так как

$$i = \frac{dq}{dt} = \frac{d(Cdu_C)}{dt} = C \frac{du_C}{dt},$$

то уравнение (9.14) примет вид

$$RC \frac{du_C}{dt} + u_C = u. \quad (9.15)$$

Однородное уравнение цепи

$$RC \frac{du_{C\text{св}}}{dt} + u_{C\text{св}} = 0. \quad (9.16)$$

Характеристическое уравнение: $RCp + 1 = 0$.

Его корень $p = -\frac{1}{RC} = -\frac{1}{\tau}$.

Решение однородного уравнения

$$u_{C\text{св}} = Ae^{pt} = Ae^{-t/RC} = Ae^{-t/\tau}. \quad (9.17)$$

Переходное напряжение:

$$u_C = u_{C\text{у}} + u_{C\text{св}} = u_{C\text{у}} + Ae^{-t/\tau}. \quad (9.18)$$

Рассмотрим ряд частных случаев.

1. Пусть цепь RC замыкается накоротко, т.е. $u = 0$ (рис. 9.7). Для установившегося режима $u_{C\text{у}} = 0$, и

$$u_C = u_{C\text{св}} = Ae^{-t/RC}. \quad (9.19)$$

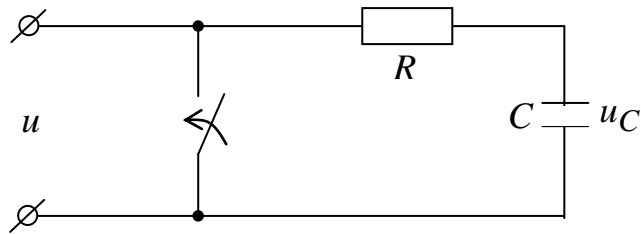


Рис. 9.7. Замыкание RC – цепи

Пусть к моменту коммутации напряжение на зажимах конденсатора равно $u_C(0_-) = U_0$. Подставив в (9.19) $u_C = U_0$ и $t = 0$, получим $U_0 = A$.

$$u_C = U_0 e^{-t/\tau} \quad (9.20)$$

Ток в цепи

$$i = C \frac{du_C}{dt} = -\frac{U_0}{R} e^{-t/\tau}. \quad (9.21)$$

Ток в начальный момент скачком повышается от нуля до величины U_0/R .

Кривые тока и напряжения на конденсаторе представлены на рис. 9.8.

Энергия, выделяемая в виде теплоты в сопротивлении цепи, равна энергии, запасенной в электрическом поле конденсатора к начальному моменту времени

$$\int_0^{\infty} i^2 R dt = \frac{U_0^2}{R} \int_0^{\infty} e^{-2t/\tau} dt = \frac{CU_0^2}{2}. \quad (9.22)$$

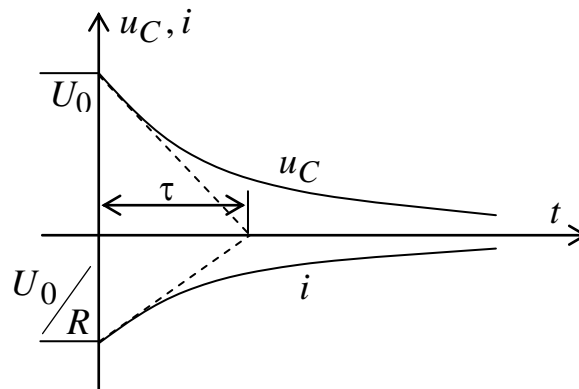


Рис. 9.8. Кривые изменения тока и напряжения на конденсаторе

Постоянная времени $\tau = RC$ в реальных устройствах может иметь различные значения (до нескольких суток).

2. Рассмотрим процесс при включении RC цепи под постоянное напряжение $u = U = \text{const}$.

Пусть конденсатор до включения не был заряжен. Установившееся значение напряжения на зажимах конденсатора после завершения переходного процесса $u_{Cy} = U$. Напряжение в переходном процессе

$$u_C = u_{Cy} + u_{Cсв} = U + Ae^{-t/RC}. \quad (9.23)$$

Постоянную интегрирования A определяем из условия $u_C(0_+) = u_C(0_-) = 0$. Полагая $t = 0$, получим:

$$0 = U + A; \quad A = -U.$$

Общее решение

$$u_C = U - Ue^{-t/RC} = U(1 - e^{-t/RC}). \quad (9.24)$$

Ток в цепи

$$i = C \frac{du_C}{dt} = \frac{U}{R} e^{-t/\tau}. \quad (9.25)$$

Кривые изменения тока и напряжения на конденсаторе показаны на рис. 9.9.

Количество теплоты, выделившееся в цепи во время заряда, равно $\frac{CU^2}{2}$, что составляет ту же величину, что и при разряде конденсатора. Работа источника внешней ЭДС в этом случае равна CU^2 , т.е. удвоенному значению энергии, запасаемой в электрическом поле конденсатора.

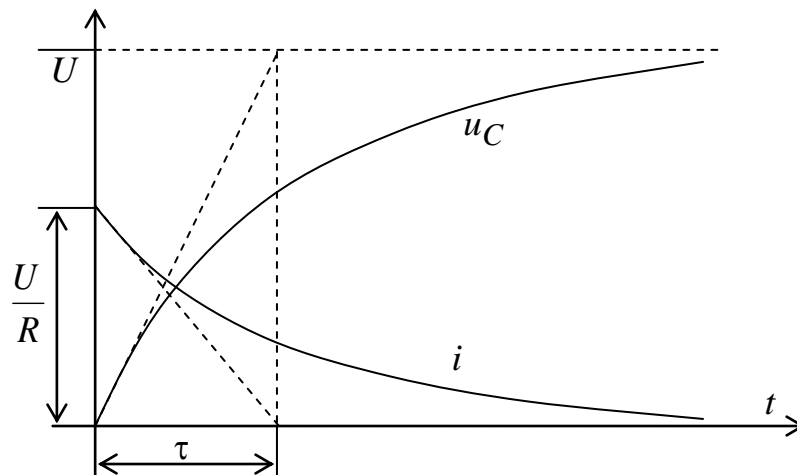


Рис. 9.9. Кривые изменения тока и напряжения на конденсаторе

Если конденсатор до включения был заряжен, т.е.

$$u_C(0_+) = u_C(0_-) = u_C(0), \text{ то } u_C(0) = U + A; \quad A = u_C(0) - U.$$

Если $u_C(0) > 0$, то конденсатор дозаряжается до напряжения U , а если $u_C(0) < 0$ – перезаряжается от начального отрицательного значения до приложенного напряжения. Соответствующие кривые изображены на рис. 9.10.

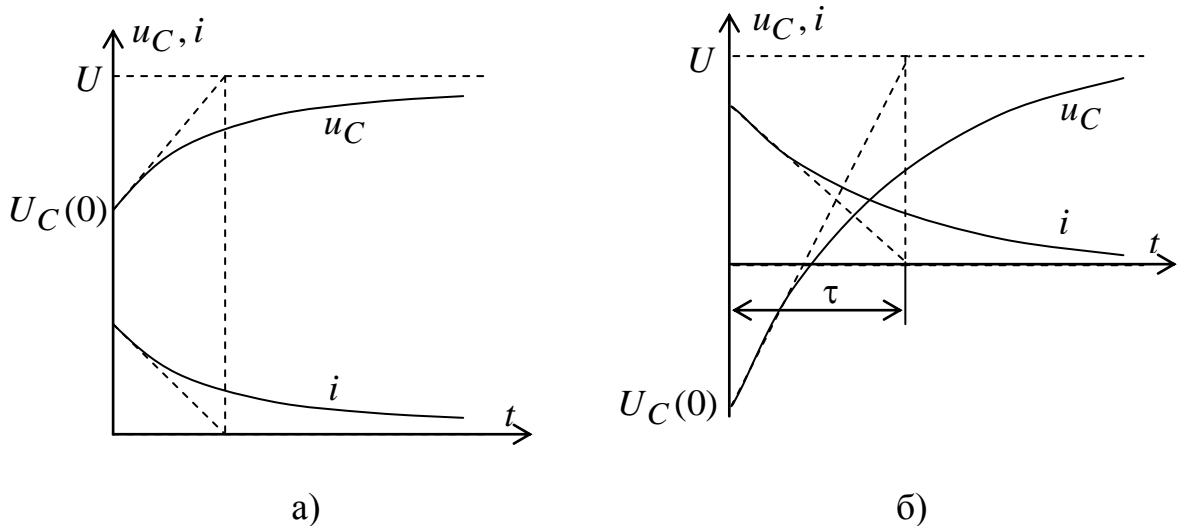


Рис. 9.10. Кривые изменения напряжения на конденсаторе

3. Рассмотрим процесс включения цепи RC под синусоидальное напряжение $u = U_m \sin(\omega t + \psi)$.

Напряжение u_{Cy} в установившемся режиме

$$u_{Cy} = \frac{I_m}{\omega C} \sin\left(\omega t + \psi - \varphi - \frac{\pi}{2}\right) + Ae^{-t/\tau}, \quad (9.26)$$

где $I_m = \frac{U_m}{Z}$; $Z = \sqrt{R^2 + (1/\omega C)^2}$; $\varphi = \text{arctg} \frac{-1}{R\omega C}$; $\tau = RC$.

Если конденсатор не был заряжен, то $u_C(0_-) = 0$:

$$u_C(0_+) = u_C(0_-) = 0 = \frac{I_m}{\omega C} \sin\left(\psi - \varphi - \frac{\pi}{2} + A\right);$$

$$A = -\frac{I_m}{\omega C} \sin\left(\psi - \varphi - \frac{\pi}{2}\right).$$

Напряжение на конденсаторе будет равно

$$u_C = \frac{I_m}{\omega C} \sin\left(\omega t + \psi - \varphi - \frac{\pi}{2}\right) - \frac{I_m}{\omega C} \sin\left(\psi - \varphi - \frac{\pi}{2}\right) e^{-t/\tau}. \quad (9.27)$$

Ток в переходном режиме

$$i = C \frac{du_C}{dt} = I_m \sin(\omega t + \psi - \varphi) - \frac{I_m}{R\omega C} \sin\left(\psi - \varphi - \frac{\pi}{2}\right) e^{-t/\tau}. \quad (9.28)$$

Если конденсатор был предварительно заряжен, то

$$u_C(0_+) = u_C(0_-) = u_C(0) = \frac{I_m}{\omega C} \sin\left(\psi - \varphi - \frac{\pi}{2}\right) + A;$$

$$A = u_C(0) - \frac{I_m}{\omega C} \sin\left(\psi - \varphi - \frac{\pi}{2}\right).$$

Из (9.27) и (9.28) видно, что переходный процесс зависит от величины ψ .

Если $\psi = \varphi \pm \pi/2$, то переходный процесс не возникает и сразу же наступает установившийся режим, так как при этом в момент $t = 0$ установившееся напряжение равно нулю. Таким образом, имеется полное соответствие между запасом энергии в конденсаторе до включения, и запасом энергии, который должен быть в установившемся режиме в этот момент.

Если включение происходит при $\psi = \varphi$, то свободное напряжение $u_{Cсв}$ будет наибольшим и в начальный момент имеет значение $I_m X_C$. Начальное значение свободного тока при этом $-I_m / \omega CR$. Если $\omega CR > 1$, т.е. $R < X_C$, то в начальный момент времени происходит большой всплеск тока, намного превосходящий амплитуду I_m . Однако такой большой ток протекает незначительную часть периода, так как $\omega CR = 2\pi / T < 1$ и $\tau < T$.

Кривые изменения тока при включении конденсатора под переменное напряжение показаны на рис. 9.11.

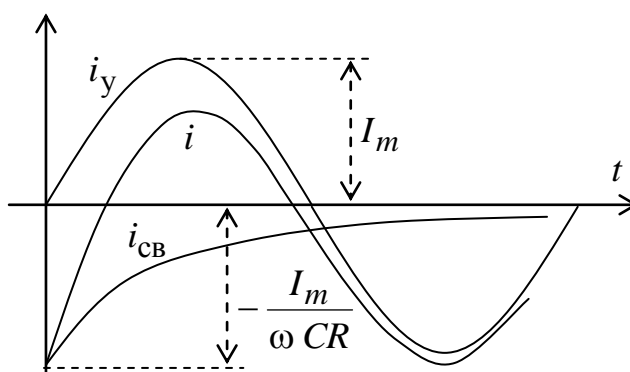


Рис. 9.11. Кривые изменения тока

Максимальное значение напряжение u_C в переходном процессе не превышает удвоенной амплитуды $U_{Cm} = I_m / \omega C$ напряжения на конденсаторе в установившемся режиме.

27.3. Переходные процессы в цепи с последовательно соединенными участками R , L и C

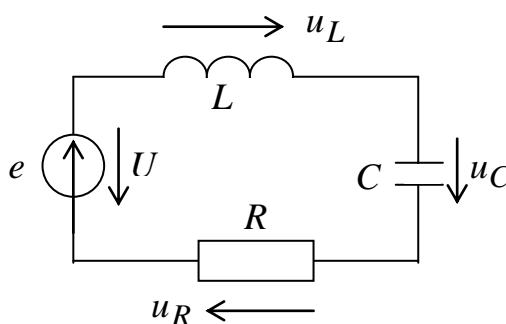


Рис. 9.12. Схема цепи

Уравнение цепи имеет вид

$$Ri + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int_0^t i dt + u_C(0) = u(t). \quad (9.29)$$

Дифференцируя обе части выражения (9.29), получим уравнение второго порядка для тока i в цепи:

$$L \frac{d^2 i}{dt^2} + R \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} i = \frac{du}{dt}. \quad (9.30)$$

Однородное уравнение, определяющее свободный ток, можно записать

$$\frac{d^2 i_{св}}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{di_{св}}{dt} + \frac{i_{св}}{LC} = 0. \quad (9.31)$$

Введем обозначения $R/C = 2\delta$ и $\omega_0^2 = 1/LC$. Тогда

$$\frac{d^2 i_{св}}{dt^2} + 2\delta \frac{di_{св}}{dt} + \omega_0^2 i_{св} = 0. \quad (9.32)$$

Характеристическое уравнение:

$$p^2 + 2\delta p + \omega_0^2 = 0. \quad (9.33)$$

Корни уравнения

$$p_1 = -\delta + \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}; \quad p_2 = -\delta - \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}.$$

Свободный ток

$$i_{св} = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t}. \quad (9.34)$$

Ток переходного режима

$$i = i_y + i_{св} = i_y + A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t}. \quad (9.35)$$

Ток установившегося режима i_y можно найти, если известен вид функции $u(t)$.

Произвольные постоянные интегрирования A_1 и A_2 определяют из начальных физических условий: $i_L(0_+) = i_L(0_-)$; $u_C(0_+) = u_C(0_-)$.

Для определения постоянных A_1 и A_2 надо знать значение тока и всех его производных до $(n - 1)$ включительно в начальный момент времени. В данном случае необходимо знать начальное значение тока и его первой производной. Начальное значение первой производной тока находится из уравнения цепи (9.29) при $(t = 0)$

$$Ri(0) + L \left. \frac{di}{dt} \right|_{t=0} + u_C(0) = u(0), \quad (9.36)$$

где $u(0)$ – значение приложенного напряжения $u(t)$ при $t = 0$.

Из последнего уравнения получаем

$$\left. \frac{di}{dt} \right|_{t=0} = \frac{u(0) - u_C(0) - Ri(0)}{L}. \quad (9.37)$$

Из уравнения (9.35) для производной тока имеем

$$\frac{di}{dt} = \frac{di_y}{dt} + A_1 p_1 e^{p_1 t} + A_2 p_2 e^{p_2 t}.$$

Уравнения для нахождения постоянных интегрирования

$$\begin{cases} i(0) = i_y(0) + A_1 + A_2 \\ \frac{u(0) - u_C(0) - Ri(0)}{L} = \left. \frac{di_y}{dt} \right|_{t=0} + A_1 p_1 + A_2 p_2 \end{cases}, \quad (9.38)$$

где $i_y(0)$ и $\left. \frac{di_y}{dt} \right|_{t=0}$ – значения тока установившегося режима и его

производной в начальный момент времени, известные из найденного ранее частного решения исходного дифференциального уравнения (9.29).

28.1. Расчет переходного процесса классическим методом

В качестве примера рассмотрим расчет переходного процесса классическим методом для схемы, изображенной на рис. 9.13. Определить ток i_1 .

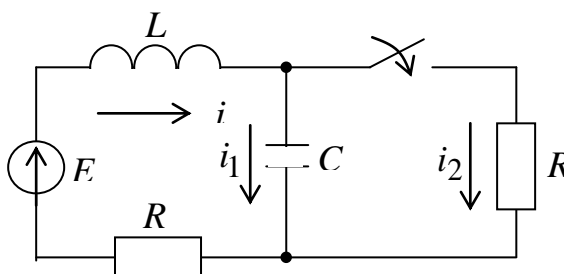


Рис. 9.13. Расчетная схема

1. Для цепи после коммутации составляются уравнения по I и II законам Кирхгофа.

$$\begin{cases} -i + i_1 + i_2 = 0 \\ Ri + L \frac{di}{dt} + u_C = E \\ Ri_2 - u_C = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} i_1 = C \frac{du_C}{dt}; \\ u_C = \frac{1}{C} \int i_1 dt; \end{cases}$$

$$\begin{cases} -i + i_1 + i_2 = 0 \\ R \frac{di}{dt} + L \frac{d^2i}{dt^2} + \frac{i_1}{C} = 0 \\ R \frac{di_2}{dt} - \frac{i_1}{C} = 0. \end{cases}$$

2. Определяются независимые начальные условия ($i_L(0_+)$ и $u_C(0_+)$) из расчета схемы до коммутации:

$$\begin{aligned} u_C(0_-) = u_C(0_+) = E; \\ i(0_-) = i(0_+) = 0. \end{aligned}$$

3. Искомая величина записывается в виде

$$i_1 = i_{1y} + i_{1св}.$$

4. Установившуюся составляющую определяют из расчета режима цепи после коммутации $i_{1y} = 0$ (при $E = \text{const}$ ток после коммутации есть ток во внешнем контуре).

5. Составляется характеристическое уравнение, и определяются его корни

$$\begin{aligned} Z(p) = pL + R + \frac{\frac{1}{pC}R}{\frac{1}{pC} + R} &= \frac{pL}{pC} + RpL + \frac{R}{pC} + R^2 + \frac{R}{pC} = \\ &= pL + p^2RLC + R + R^2pC + R = RLCp^2 + (L + R^2C)p + 2R = 0. \end{aligned}$$

Корни могут быть:

- 1) действительные разные p_1 и p_2 ;
- 2) действительные равные $p_1 = p_2 = p$;
- 3) комплексно сопряженные $p_{1,2} = -\alpha \pm j\omega_{св}$,

где α – коэффициент затухания;

$\omega_{св}$ – угловая частота свободных колебаний.

6. В соответствии с полученными корнями характеристического уравнения записывается свободная составляющая:

$$1) i_{1св} = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t};$$

$$2) i_{1CB} = (A_1 + A_2 t) e^{pt};$$

$$3) i_{1CB} = A e^{-\alpha t} \sin(\omega_{CB} t + \psi), \text{ где } \psi = \operatorname{arctg} \frac{\omega_{CB}}{\alpha}.$$

7. Искомое решение для первого случая

$$i_1 = 0 + A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t}.$$

8. Определяются постоянные интегрирования A_1 и A_2 :

$$\begin{aligned} i_1(0) &= A_1 + A_2, \\ \left. \frac{di_1}{dt} \right|_{t=0} &= p_1 A_1 + p_2 A_2. \end{aligned}$$

Уравнения п.1 для момента времени $t = 0$ запишутся как

$$\begin{cases} -i(0) + i_1(0) + i_2(0) = 0 \\ Ri(0) + L \left. \frac{di}{dt} \right|_{t=0} + u_C(0) = E. \\ Ri_2(0) - u_C(0) = 0 \end{cases}$$

Независимые начальные условия $i(0)$ и $u_C(0)$ уже определены в п.2.

Зависимые начальные условия $i_1(0)$, $i_2(0)$ и $\left. \frac{di}{dt} \right|_{t=0}$ определяются из последней системы уравнений.

Для определения $\left. \frac{di_1}{dt} \right|_{t=0}$ необходимо продифференцировать систему уравнений п.1:

$$\begin{cases} -\left. \frac{di}{dt} \right|_0 + \left. \frac{di_1}{dt} \right|_0 + \left. \frac{di_2}{dt} \right|_0 = 0 \\ R \left. \frac{di}{dt} \right|_0 + L \left. \frac{d^2 i}{dt^2} \right|_0 + \frac{i_1(0)}{C} = 0 \\ R \left. \frac{di_2}{dt} \right|_0 - \frac{i_1(0)}{C} = 0. \end{cases}$$

9. После определения постоянных интегрирования A_1 и A_2 подставляют их в искомое решение и расчет окончен.

Для определения других токов и напряжений не требуется выполнять все этапы расчета. Можно использовать известные выражения

$$i_2 = \frac{u_C}{R}; \quad i = i_1 + i_2; \quad u_C = u_C(0) + \frac{1}{C} \int_0^t i_1 dt.$$

28.2. Разряд конденсатора на цепь RL

В этом случае приложенное напряжение, а также ток установившегося режима равны нулю:

$$u(t) = 0; \quad i_y = 0.$$

Для определения произвольных постоянных интегрирования в уравнении (9.38) необходимо положить:

$$i(0) = 0; \quad i_y(0) = 0; \quad u(0) = 0; \quad \left. \frac{di_y}{dt} \right|_{t=0} = 0.$$

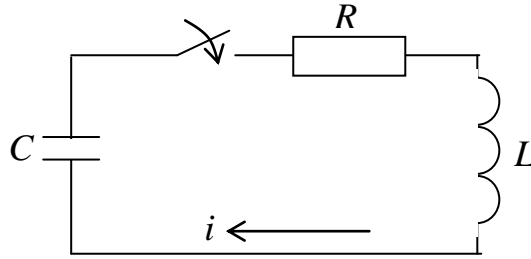


Рис. 9.14. Расчетная схема

Обозначим $u_C(0) = U_0$. Тогда

$$\begin{cases} 0 = A_1 + A_2 \\ -U_0/L = p_1 A_1 + p_2 A_2; \end{cases} \quad A_1 = -A_2 = A = -\frac{U_0}{L(p_1 - p_2)}.$$

Переходный ток

$$i = -\frac{U_0}{L(p_1 - p_2)} (e^{p_1 t} - e^{p_2 t}). \quad (9.39)$$

Напряжения на катушке и конденсаторе

$$\begin{cases} u_L = L \frac{di}{dt} = -\frac{U_0}{p_1 - p_2} (p_1 e^{p_1 t} - p_2 e^{p_2 t}) \\ u_C = \frac{1}{C} \int_0^t i dt + U_0 = -\frac{U_0}{p_1 - p_2} (p_2 e^{p_1 t} - p_1 e^{p_2 t}) \end{cases} \quad (9.40)$$

При выводе последнего уравнения учитывалось, что $p_1 p_2 = \omega_0^2 = \frac{1}{LC}$.

Характер процессов при разряде конденсатора оказывается различным в зависимости от того, будут ли корни характеристического уравнения вещественными или комплексными, что определяется соотношениями между параметрами R , L и C .

Рассмотрим возможные случаи.

1. Пусть корни характеристического уравнения вещественны и отличны друг от друга. Это имеет место при условии

$$\delta = \omega_0, \quad \text{т.е.} \quad R/2L > 1/\sqrt{LC} \quad \text{или} \quad R > 2\sqrt{L/C}.$$

Так как $p_1 < 0$ и $p_2 < 0$ и, кроме того, $|p_2| > |p_1|$, то при изменении t от 0 до ∞ величины $e^{p_1 t}$ и $e^{p_2 t}$ убывают от 1 до 0 и при том разность $e^{p_1 t} - e^{p_2 t}$ всегда положительна (рис. 9.13).

Ток i не меняет своего направления, т.е. конденсатор все время разряжается. Такой односторонний разряд конденсатора называют аperiodическим. Кривые изменения напряжений показаны на рис. 9.14.

В интервале времени $0 < t < t_m$ ток по абсолютному значению возрастает и достигает максимума при $t = t_m = (\ln p_2 / p_1) / (p_1 - p_2)$. Значение t_m находится из условия $di/dt = U_L / L = 0$. В интервале времени $t_m < t < \infty$ ток по абсолютному значению убывает, стремясь к нулю.

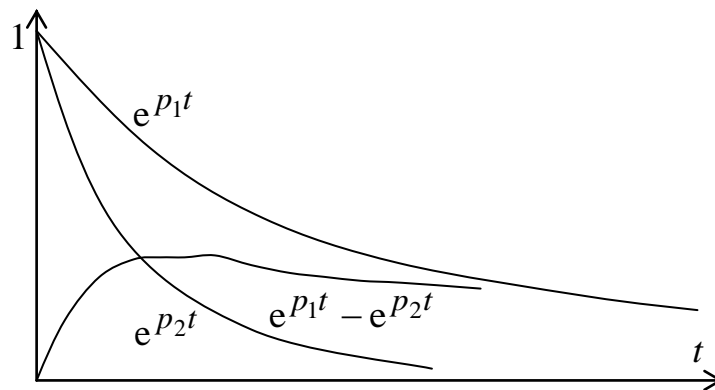


Рис. 9.13. Кривые изменения экспонент и их разности

1. Рассмотрим случай, когда корни характеристического уравнения вещественны и равны друг другу.

Это происходит при $\delta = \omega_0$, т.е. при $R = 2\sqrt{L/C}$. В этом случае $p_1 = p_2 = -\delta$. При этом выражения для тока и напряжения (9.39) и (9.40) становятся неопределенными из-за равенства нулю числителя и знаменателя. Раскроем эти неопределенности по правилу Лопиталья, считая, что p_1 — переменная и стремится к $p_2 = -\delta$. Для тока получим

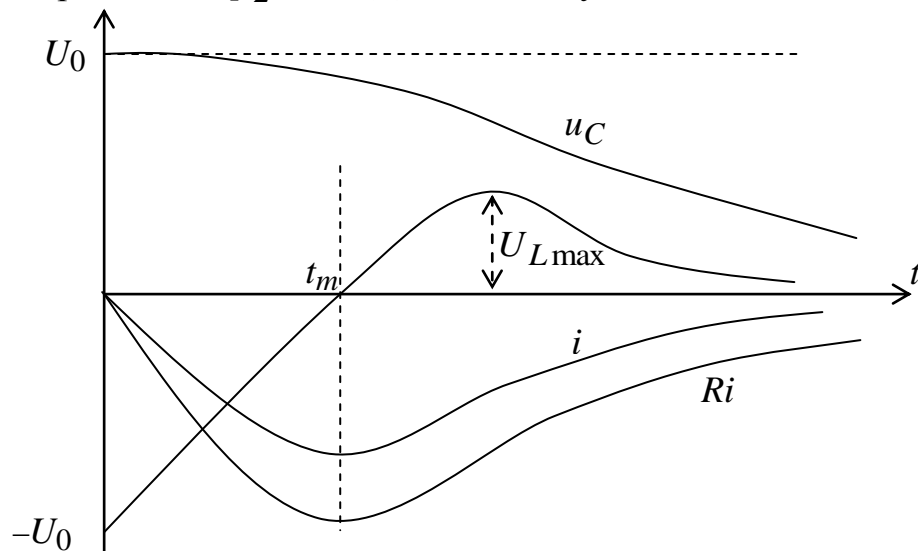


Рис. 9.14. Кривые изменения тока и напряжений на элементах при аperiodическом разряде

$$i = -\frac{U_0}{L} \lim_{p_1 \rightarrow p_2} \frac{e^{p_1 t} - e^{p_2 t}}{p_1 - p_2} = -\frac{U_0}{L} t e^{p_2 t} = -\frac{U_0}{L} t e^{-\delta t}. \quad (9.41)$$

Для напряжений

$$\begin{cases} u_L = L \frac{di}{dt} = U_0 (\delta t - 1) e^{-\delta t} \\ u_C = \frac{1}{C} \int_0^\infty i dt + U_0 = U_0 (\delta t + 1) e^{-\delta t} \end{cases}. \quad (9.42)$$

Характер процесса здесь также аperiodический. Момент достижения током максимума абсолютного значения равен $t_m = 1/\delta$. Данный случай при $\delta = \omega_0$ является предельным случаем аperiodического разряда.

3. Пусть корни характеристического уравнения являются комплексными. Это имеет место при условии $\delta < \omega_0$, т.е. при $R < 2\sqrt{L/C}$.

Обозначим $\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} = \omega'$. Тогда корни характеристического уравнения запишутся:

$$\begin{cases} p_1 = -\delta + \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} = -\delta + j\omega' = \omega_0 e^{j\Theta} \\ p_2 = -\delta - \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} = -\delta - j\omega' = \omega_0 e^{-j\Theta} \end{cases}, \quad (9.43)$$

где $\Theta = \arctg[\omega'/(\delta) + \pi]$. Угол Θ лежит в пределах $\pi/2 < \Theta < \pi$, так как $\sin \Theta = \omega'/\omega_0 > 0$ и $\cos \Theta = -\delta/\omega_0 < 0$.

Переходный ток

$$\begin{aligned} i &= -\frac{U_0}{L(p_1 - p_2)} (e^{p_1 t} - e^{p_2 t}) = -\frac{U_0}{2j\omega' L} (e^{-\delta t} e^{j\omega' t} - e^{-\delta t} e^{-j\omega' t}) = \\ &= -\frac{U_0}{\omega' L} e^{-\delta t} \sin \omega' t = -I e^{-\delta t} \sin \omega' t. \end{aligned} \quad (9.44)$$

Уравнения для напряжений

$$\begin{cases} u_L = -\frac{U_0}{p_1 - p_2} (p_1 e^{p_1 t} - p_2 e^{p_2 t}) = \frac{U_0}{2j\omega'} (\omega_0 e^{j\Theta} e^{-\delta t} e^{j\omega' t} - \omega_0 e^{-j\Theta} e^{-\delta t} e^{-j\omega' t}) = \\ = -\frac{U_0 \omega_0}{2j\omega'} e^{-\delta t} (e^{j(\omega' t + \Theta)} - e^{-j(\omega' t + \Theta)}) = -U_0 \frac{\omega_0}{\omega'} e^{-\delta t} \sin(\omega' t + \Theta) \\ u_C = U_0 \frac{\omega_0}{\omega'} e^{-\delta t} \sin(\omega' t - \Theta). \end{cases} \quad (9.45)$$

На рис. 9.15 показаны кривые колебательного разряда конденсатора.

Кривая тока i подобна кривой Ri . Процесс в данном случае является колебательным. Ток и напряжение на всех участках периодически меняют знак. Амплитуда колебаний убывает по экспоненциальному закону, в цепи совершаются затухающие колебания. Угловая частота этих колебаний

$$\omega' = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} = \sqrt{1/(LC) - R^2/(4L^2)}.$$

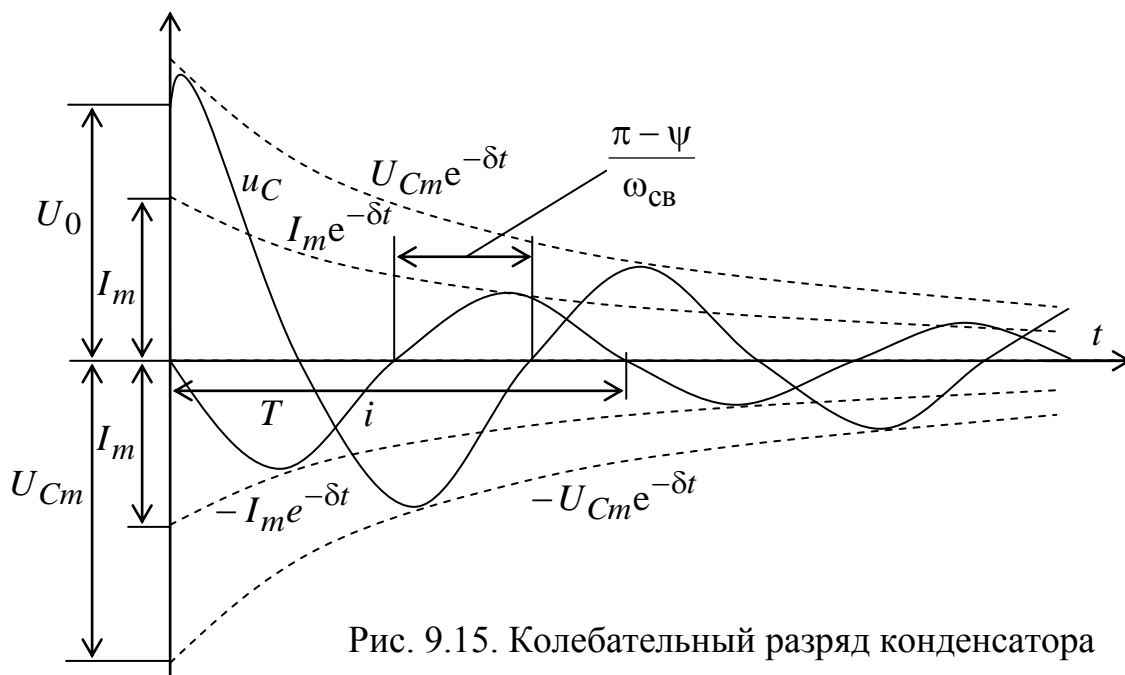


Рис. 9.15. Колебательный разряд конденсатора

В предельном случае $R = 0$ имеем $\delta = 0$ и $\omega' = \omega_0$, $T' = T_0 = 2\pi\sqrt{LC}$. В этом случае колебания будут незатухающими. Период незатухающих колебаний и угловая частота этих колебаний:

$$T_0 = 2\pi\sqrt{LC}; \quad \omega_0 = 1/\sqrt{LC}.$$

Следовательно, ω_0 равна резонансной частоте контура.

Быстроту затухания тока принято характеризовать декрементом колебаний:

$$\Delta = \frac{Ie^{-\delta t}}{Ie^{-\delta(t+T')}} = e^{\delta T'}.$$

(9.46)

Логарифмический декремент колебаний

$$\upsilon = \ln \Delta = \delta T'. \quad (9.47)$$

При малом затухании

$$\upsilon = \delta T' \approx \delta T_0 = \frac{R}{2L} 2\pi\sqrt{LC} = \pi R \sqrt{C/L} = \pi d,$$

где d – затухание контура.

28.3. Включение RLC контура под постоянное напряжение

Рассмотрим процесс при нулевых начальных условиях, т.е. $i(0_-) = 0$, $u_C(0_-) = 0$.

Уравнение цепи запишется в виде

$$Ri + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int_0^t idt + u_C(0) = u(t). \quad (9.29)$$

Его решение

$$i = i_y + i_{св} = i_y + A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t}. \quad (9.35)$$

Ток установившегося режима равен нулю, поэтому

$$i = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t};$$

$$u_L = L \frac{di}{dt} = L(A_1 p_1 e^{p_1 t} + A_2 p_2 e^{p_2 t}).$$

Начальные условия: $i(0) = 0 = A_1 + A_2$.

Учитывая, что $u_C(0) = 0$ $u(t) = U = \text{const}$, при $t = 0$ получим

$$L \left. \frac{di}{dt} \right|_{t=0} = L(A_1 p_1 + A_2 p_2) = U;$$

$$A_1 = -A_2 = \frac{U}{L(p_1 - p_2)};$$

$$\begin{cases} i = \frac{U}{L(p_1 - p_2)} (e^{p_1 t} - e^{p_2 t}) \\ u_C = \frac{1}{C} \int_0^t idt + u_C(0) = \frac{1}{C} \int_0^t idt = \frac{U}{p_1 - p_2} (p_2 e^{p_1 t} + p_1 e^{p_2 t}) + U \end{cases} \quad (9.48)$$

Закон изменения тока в этом и предыдущем случае один и тот же, только токи отличаются знаками. Напряжение на конденсаторе также изменяется по подобному закону, только в этом случае он заряжается (рис. 9.16 и 9.17).

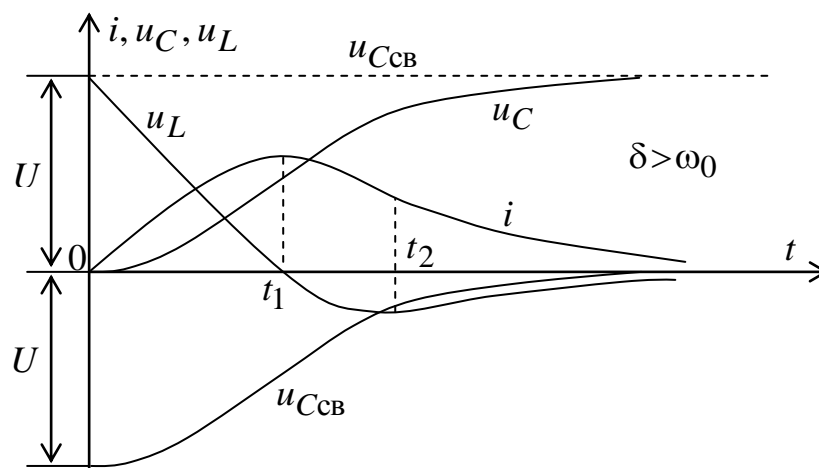


Рис. 9.16. Кривые тока и напряжений при аperiодическом процессе

29.1. Включение цепи RLC под синусоидальное напряжение

Ток установившегося режима при приложенном напряжении $u = U_m \sin(\omega t + \psi_u)$ будет равен $i_y = I_m \sin(\omega t + \psi_i)$,

$$\text{где } I_m = \frac{U_m}{Z}; Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}; \psi_i = \psi_u - \varphi; \varphi = \arctg \frac{\omega L - 1/\omega C}{R}.$$

Пусть в начальный момент времени ток в цепи и напряжение на зажимах конденсатора равны нулю: $i(0) = 0$ и $u_C(0) = 0$. Тогда

$$0 = I_m \sin \psi_i + A_1 + A_2;$$

$$L \frac{di}{dt} \Big|_{t=0} = U_m \sin \psi_u = L \frac{di'}{dt} \Big|_{t=0} + p_1 A_1 + p_2 A_2;$$

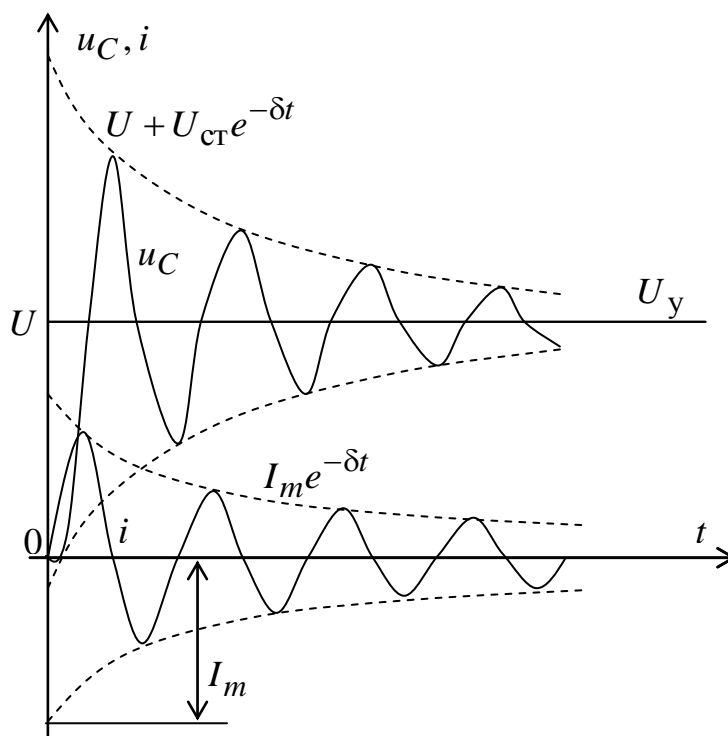


Рис. 9.17. Кривые тока и напряжения при колебательном процессе

$$\begin{aligned} U_m \sin \psi_u &= I_m Z \sin(\psi_i + \varphi) = I_m (Z \cos \varphi \cdot \sin \psi_i + Z \sin \varphi \cdot \cos \psi_i) = \\ &= I_m (R \sin \psi_i + X \cos \psi_i) = I_m \left[R \sin \psi_i + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) \cos \psi_i \right]; \end{aligned}$$

$$L \frac{di'}{dt} \Big|_{t=0} = \omega L I_m \cos \psi_i;$$

$$\frac{1}{LC} = \omega_0^2, \quad R/L = 2\delta, \quad \omega' = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2};$$

$$-I \frac{\omega_0}{\omega'} \cos \psi_i + I_m 2\delta \sin \psi_i = p_1 A_1 + p_2 A_2;$$

$$\begin{cases} A_1 = -\frac{I_m}{p_1 - p_2} \left(p_1 \sin \psi_i + \frac{\omega_0^2}{\omega'} \cos \psi_i \right) \\ A_2 = \frac{I_m}{p_1 - p_2} \left(p_2 \sin \psi_i + \frac{\omega_0^2}{\omega'} \cos \psi_i \right) \end{cases}; \quad (9.49)$$

$$i = I_m \sin(\omega t + \psi_i) - I_m \frac{\sin \psi_i}{p_1 - p_2} (p_1 e^{p_1 t} - p_2 e^{p_2 t}) - I_m \frac{\cos \psi_i}{p_1 - p_2} \cdot \frac{\omega_0}{\omega'} (e^{p_1 t} - e^{p_2 t}); \quad (9.50)$$

$$u_C = \frac{1}{C} \int_0^t i dt + u_C(0) = \frac{1}{C} \int_0^t i dt = -I_m \frac{1}{\omega t} \cos(\omega t + \psi_i) - I_m \frac{\sin \psi_i}{C(p_1 - p_2)} (e^{p_1 t} - e^{p_2 t}) - I_m \frac{\cos \psi_i}{\omega C(p_1 - p_2)} (p_2 e^{p_1 t} - p_1 e^{p_2 t}). \quad (9.51)$$

Для комплексных корней характеристического уравнения, т.е. когда $\delta < \omega_0$ переходный процесс является колебательным. В этом случае можно записать:

$$\begin{cases} i = I_m \sin(\omega t + \psi_i) - \left[\sin \psi_i \cdot \sin(\omega' t + \Theta) + \frac{\omega_0}{\omega} \cos \psi_i \cdot \sin \omega' t \right] \frac{\omega_0}{\omega'} I_m e^{-\delta t} \\ u_C = -\frac{I_m}{\omega C} \cos(\omega t + \psi_i) - \left[\sin \psi_i \cdot \sin \omega' t + \frac{\omega_0}{\omega} \cos \psi_i \cdot \sin(\omega' t - \Theta) \right] \frac{I_m}{\omega'} e^{-\delta t} \end{cases} \quad (9.52)$$

Рассмотрим случаи, когда $\omega' = \omega$ и ω и ω' близки, но не равны друг другу. При этом затухание будем предполагать малым, т.е. $\delta \ll \omega_0$.

Пусть $\omega = \omega'$. Принимая во внимание, что $\delta \ll \omega_0$, можно считать, что $\omega' \approx \omega_0$ и $\Theta \approx \pi/2$. Тогда

$$\begin{cases} i \approx I_m (1 - e^{-\delta t}) \sin(\omega t + \psi_i) \\ u_C \approx -\frac{I_m}{\omega C} (1 - e^{-\delta t}) \cos(\omega t + \psi_i) \end{cases} \quad (9.53)$$

Кривая изменения тока в этом случае показана на рис. 9.18.

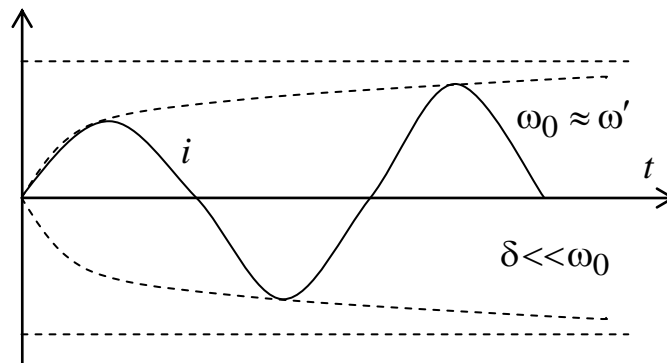


Рис. 9.18. Кривая изменения тока

Амплитуда тока и напряжения на конденсаторе постепенно нарастает от нуля до своего установившегося значения.

29.2. Переходные процессы в цепях со взаимной индуктивностью

Рассмотрим переходные процессы в цепи, у которой имеются две катушки с одинаковыми параметрами (для упрощения вычислений: $R_1 = R_2 = R$ и $L_1 = L_2 = L$) имеют индуктивную связь.

Вторая катушка замкнута накоротко, а первая подключается к источнику постоянного напряжения (рис. 9.19).

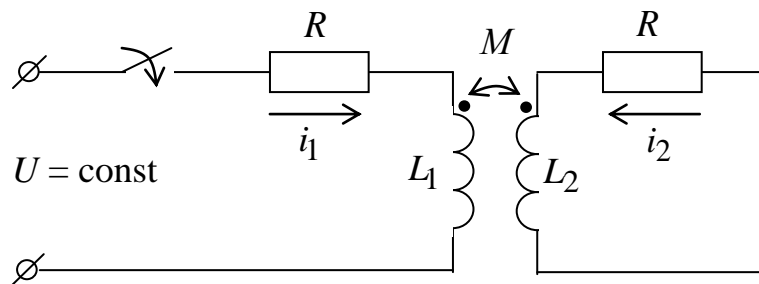


Рис. 9.19. Схема цепи со взаимной индуктивностью

Токи i_1 и i_2 связаны уравнениями:

$$Ri_1 + L \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} = U, \quad (9.28)$$

$$Ri_2 + L \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt} = 0. \quad (9.29)$$

В данном случае имеем нулевые начальные условия, т.е. $i_1(0) = i_2(0) = 0$.

Установившиеся значения токов – $i_{1уст} = \frac{U}{R}$; $i_{2уст} = 0$.

Приравняв нулю главный определитель, найдем корни характеристического уравнения:

$$\begin{vmatrix} R + pL & pM \\ pM & R + pL \end{vmatrix} = 0,$$

откуда $p_1 = -R/(L + M)$, $p_2 = -R/(L - M)$.

При этом токи будут равны

$$i_1 = U/R + A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t}, \quad (9.30)$$

$$i_2 = B_1 e^{p_1 t} + B_2 e^{p_2 t}. \quad (9.31)$$

Для нахождения постоянных интегрирования A_1 и A_2 находим $\left. \frac{di_1}{dt} \right|_{t=0}$.

Для этого умножим (9.28) на L , а (9.29) на M и вычтем его из первого уравнения при $t = 0$. Тогда

$$L^2 \left. \frac{di_1}{dt} \right|_{t=0} - M^2 \left. \frac{di_1}{dt} \right|_{t=0} = LU,$$

откуда $\left. \frac{di_1}{dt} \right|_{t=0} = \frac{LU}{L^2 - M^2} = \frac{LU}{(L + M)(L - M)}$.

При $t = 0$

$$i_1(0) = U/R + A_1 + A_2;$$

$$\left. \frac{di_1}{dt} \right|_{t=0} = p_1 A_1 + p_2 A_2.$$

Отсюда $A_1 = A_2 = -U/2R$. Аналогично находим $B_1 = -B_2 = -U/2R$.

Тогда токи катушек будут равны

$$i_1 = \frac{U}{2R} \left(2 - e^{-\frac{R}{L+M}t} - e^{-\frac{R}{L-M}t} \right);$$

$$i_2 = -\frac{U}{2R} \left(e^{-\frac{R}{L+M}t} - e^{-\frac{R}{L-M}t} \right).$$

На рис. 9.20 построены кривые изменения токов i_1 и i_2 . Одна из свободных составляющих затухает медленнее, т.е. имеет большую постоянную времени, определяемую суммой индуктивности L и взаимной индуктивности M , а вторая затухает быстрее, так как ее постоянная времени определяется разностью $L - M$. Для сравнения на рис. 9.20 показано, как изменялся бы ток первой катушки при ее включении, если бы вторая была разомкнута (штриховая линия).

Поскольку при включении токи катушек имеют противоположные направления, механические силы их взаимодействия стремятся оттолкнуть их друг от друга.

Получаемая от источника энергия преобразуется частично в тепло – джоулевы потери обеих катушек, а частично запасается в магнитном поле обеих катушек.

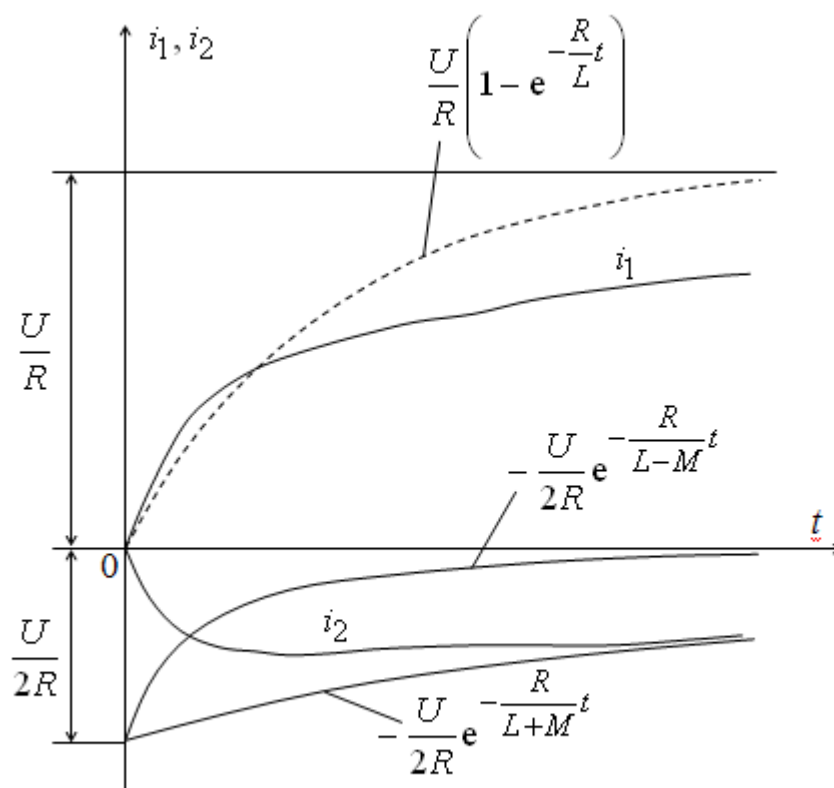


Рис. 9.20. Токи переходного процесса

РАСЧЕТ ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ ОПЕРАТОРНЫМ МЕТОДОМ

30.1. Операторное изображение функций, их производных и интегралов

При использовании операторного метода действительные функции времени, называемые оригиналами, заменяются операторными изображениями. Соответствие между оригиналом и изображением устанавливается с помощью некоторого функционального преобразования. Это преобразование выбирается так, чтобы операции интегрирования и дифференцирования оригиналов заменялись алгебраическими операциями над их изображениями. В этом случае дифференциальные уравнения для оригиналов переводят в алгебраические для их изображений.

Связь между оригиналом $f(t)$ и его изображением устанавливается с помощью интеграла Лапласа:

$$F(p) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-pt} dt, \quad (10.1)$$

где $p = G + j\eta$ – комплексное число.

Операторное изображение действительной функции $f(t)$ является функцией комплексного числа p .

Для того чтобы интеграл Лапласа имел конечное значение, функция $f(t)$ должна удовлетворять определенным условиям. Она должна удовлетворять условиям Дирихле: за любой конечный промежуток времени иметь конечное число разрывов первого рода и конечное число максимумов и минимумов. Кроме того, будем считать, что при $t > 0$ удовлетворяется условие: $|f(t)| < Ae^{\alpha t}$, где A и α – некоторые положительные числа. Все реальные токи и напряжения удовлетворяют этим условиям. Для того чтобы интеграл Лапласа имел конечное значение, необходимо полагать $G > \alpha$.

Комплексное число p называют оператором.

Условимся записывать преобразование Лапласа в виде

$$F(p) = L[f(t)]. \quad (10.2)$$

Соответствие между оригиналом и изображением

$$F(p) := f(t). \quad (10.3)$$

По определению, преобразование Лапласа применимо с момента $t = 0_+$. Обозначая значение функции и ее производных $f(0)$, $f'(0)$, $f''(0)$ и т.д., будем понимать под ними их значение при $t = 0_+$.

Существует обратное функциональное преобразование Лапласа, по которому можно определить оригинал, зная его изображение. Его называют обратным преобразованием Лапласа:

$$\frac{1}{2\pi j} \int_{G_0 - j\omega}^{G_0 + j\omega} F(p)e^{pt} dp = f(t), \quad (10.4)$$

где $p = G_0 + j\eta$.

Обратное преобразование Лапласа кратко записывается в виде

$$L^{-1}[F(p)] = f(t). \quad (10.5)$$

Соответствие некоторых характерных функций и их изображений приведено в приложении.

В электротехнике распространено также функциональное преобразование, называемое преобразованием по Карсону:

$$p \int_0^{\infty} f(t)e^{-pt} dt = pF(p) = \Phi(p). \quad (10.6)$$

Достоинством преобразования по Карсону является одинаковость размерностей оригинала и изображения. При преобразовании Лапласа размерность изображения равна размерности оригинала, умноженной на размерность времени.

Достоинством преобразования по Лапласу является его соответствие с преобразованием Фурье, на котором основывается широко используемый в настоящее время частотный метод анализа цепей. В дальнейшем будем использовать преобразование Лапласа.

Преобразование производной

$$f'(t) = pF(p) - f(0). \quad (10.7)$$

Изображение второй производной

$$f''(t) = p^2 \left[F(p) - \frac{f(0)}{p} - \frac{f'(0)}{p^2} \right]. \quad (10.8)$$

Изображение производной n -го порядка

$$f^{(n)}(t) = p^n \left[F(p) - \frac{f(0)}{p} - \frac{f'(0)}{p^2} - \dots - \frac{f^{(n-1)}(0)}{p^n} \right]. \quad (10.9)$$

При нулевых начальных значениях

$$f^{(n)}(t) = p^n F(p). \quad (10.10)$$

Изображение интеграла

$$\int_0^t f(t) dt = \frac{F(p)}{p}. \quad (10.11)$$

В дифференциальных уравнениях электрических цепей с производной во времени чаще всего встречаемся в напряжении на катушке: $u_L = L \frac{di}{dt}$.

Операторное изображение для u_L

$$U_L(p) = pLi(p) - Li(0). \quad (10.12)$$

С интегралом чаще всего встречаемся в выражении напряжения на конденсаторе: $u_C = \frac{1}{C} \int_0^t i dt + u_C(0)$.

Изображение по Лапласу

$$U_C(p) = \frac{I(p)}{pC} + \frac{U_C(0)}{p}, \quad (10.13)$$

где $U_C(0)/p$ – изображение постоянной величины $u_C(0)$.

Таким образом, при составлении уравнений цепи в операторной форме автоматически будут учитываться физические начальные условия – значения токов в катушках и напряжений на конденсаторах при $t = 0$.

Соответствие некоторых наиболее часто встречающихся функций их изображениям приведено в приложении. Более полно таблицы соответствия оригиналов и изображений приведены в справочниках по высшей математике.

При использовании преобразования Карсона следует умножить все изображения на p .

Изображение функции, смещенной во времени на величину x :

$$f(t - x) = e^{-px} F(p). \quad (10.14)$$

Если изображение смещено в комплексной плоскости на комплексное число α , то

$$f(t)e^{-\alpha t} = F(p + \alpha). \quad (10.15)$$

30.2. Законы Ома и Кирхгофа в операторной форме

Первый закон Кирхгофа

$$\sum i_k = 0; \quad \sum I_k(p) = 0.$$

Второй закон Кирхгофа

$$\sum e_k = \sum u_k; \quad \sum E_k(p) = \sum U_k(p).$$

Правило составления операторных уравнений по I и II законам Кирхгофа точно такое, как для действительных токов.

Для k -ой ветви, содержащей элементы R, L, C :

$$u_k = R_k i_k + L_k \frac{di_k}{dt} + \frac{1}{C_k} \int_0^t i_k dt + u_{Ck}(0).$$

Операторное уравнение при ненулевых начальных условиях

$$U_k(p) = R_k I_k(p) + pL_k I_k(p) - L_k i_k(0) + \frac{I_k(p)}{pC_k} + \frac{u_{Ck}(0)}{p} \quad (10.16)$$

или

$$U_k(p) + L_k i_k(0) - \frac{u_{Ck}(0)}{p} = I_k(p) \left(R_k + pL_k + \frac{1}{pC_k} \right).$$

(10.17)

Величину

$$R_k + pL_k + \frac{1}{pC_k} = Z_k(p)$$

(10.18)

называют обобщенным, или операторным, сопротивлением ветви.

Операторная запись законов Кирхгофа

$$\begin{cases} \sum I_k(p) = 0 \\ \sum E_k(p) = \sum \left[I_k(p) Z_k(p) - L_k i_k(0) + \frac{u_{Ck}(0)}{p} \right]. \end{cases} \quad (10.19)$$

Закон Ома для k -й ветви

$$I_k(p) = \frac{U_k(p) + L_k i_k(0) - u_{Ck}/p}{Z(p)}. \quad (10.20)$$

Следует отметить, что структура записи операторного сопротивления ветви и комплексное сопротивление той же ветви тождественны. Одно из другого можно получить заменой p на $j\omega$, т.е. $Z_k(p) \rightarrow Z_k(j\omega)$.

При нулевых начальных условиях способ расчета любых сложных цепей при переходных процессах операторным методом аналогичен способам расчета установившихся процессов комплексным методом.

При ненулевых начальных условиях II закон Кирхгофа можно записать

$$\sum E_k(p) + \sum L_k i_k(0) - \sum \frac{u_{Ck}(0)}{p} = \sum I_k(p) Z_k(p). \quad (10.21)$$

Рассматривая члены $\sum L_k i_k(0)$ и $\sum u_{Ck}(0)/p$ как ЭДС добавочных источников энергии в контурах, можно использовать все общие методы расчета сложных цепей.

Соответствие изображений индуктивности и конденсатора во временной и операторной областях показано на рис. 10.1.

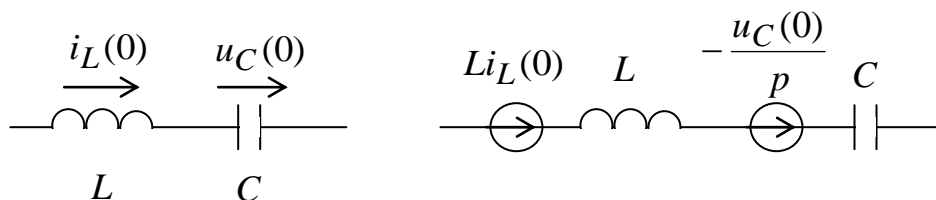


Рис. 10.1. Соответствие изображений индуктивности и конденсатора с ненулевыми начальными условиями во временной

В частности, можно воспользоваться методом наложения и рассчитать процесс в цепи сначала при нулевых начальных условиях, а затем наложить на него процесс, возникающий только под действием одних добавочных ЭДС, т.е. обусловленный первоначальным запасом энергии в цепи.

Рассмотрим, как можно преобразовать операторные схемы при последовательном и параллельном соединениях нескольких участков.

Пусть цепь состоит из одного контура:

$$\sum E_k(p) = I(p) \sum Z_k(p) - i(0) \sum L_k + \sum \frac{u_{Ck}(0)}{p}.$$

Величина $Z(p) = \sum Z_k(p)$ является операторным сопротивлением всей цепи. При последовательном соединении участков их операторные сопротивления складываются.

Рассмотрим параллельное соединение двух ветвей, в каждой из которых имеются элементы R, L, C :

$$\begin{cases} U(p) = I_1(p)Z_1(p) - L_1 i_1(0) + \frac{u_{C1}(0)}{p} \\ U(p) = I_2(p)Z_2(p) - L_2 i_2(0) + \frac{u_{C2}(0)}{p}, \end{cases}$$

где $Z_1(p) = R_1 + L_1 p + \frac{1}{C_1 p}$; $Z_2(p) = R_2 + L_2 p + \frac{1}{C_2 p}$.

Суммарный ток в неразветвленной части цепи

$$I(p) = I_1(p) + I_2(p) = \frac{U(p) + L_1 i_1(0) - u_{C1}(0)/p}{Z_1(p)} + \frac{U(p) + L_2 i_2(0) - u_{C2}(0)/p}{Z_2(p)}.$$

Очевидно, что при ненулевых начальных условиях нельзя представить $I(p)$ как произведение $U(p)$ на некоторый множитель $Y(p)$, имеющий смысл операторной проводимости. Это можно записать только при нулевых начальных условиях:

$$I(p) = U(p) \left[\frac{1}{Z_1(p)} + \frac{1}{Z_2(p)} \right] = U(p) Y(p).$$

Величина $Y(p) = Y_1(p) + Y_2(p) = \frac{1}{Z_1(p)} + \frac{1}{Z_2(p)}$ называется

операторной проводимостью.

30.3. Расчет переходных процессов операторным методом

Рассмотрим сначала несколько простых примеров, исследованных ранее классическим методом.

1. При включении RL -цепи под постоянное напряжение $u = U = \text{const}$ имеем $U(p) = U/p$; $Z(p) = pL + R$.

При нулевом начальном условии $i(0) = 0$

$$I(p) = \frac{U(p)}{Z(p)} = \frac{U/p}{R + pL} = \frac{U}{R} \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p + R/L} \right).$$

Искомый ток

$$i(t) = \frac{U}{R} \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t} \right).$$

2. При включении RC -цепи под постоянное напряжение при $u_C(0) = 0$ имеем

$$I(p) = \frac{U/p}{R + 1/pC} = \frac{U}{R} \cdot \frac{1}{p + 1/RC},$$

$$i(t) = \frac{U}{R} e^{-\frac{t}{RC}}.$$

3. При включении RLC -цепи под постоянное напряжение при нулевых начальных условиях

$$I(p) = \frac{U/p}{R + pL + \frac{1}{pC}} = \frac{U}{L} \cdot \frac{1}{p^2 + \frac{R}{L}p + \frac{1}{LC}} =$$

$$= \frac{U}{L} \cdot \frac{1}{\left(p + \frac{R}{2L}\right)^2 + \frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2} = \frac{U}{\omega' L} \cdot \frac{\omega'}{(p + \delta)^2 + \omega'^2},$$

где $\delta = \frac{R}{2L}$; $\omega'^2 = \omega_0^2 - \delta^2$; $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$.

Оригинал этого изображения

$$i(t) = \frac{U}{\omega' L} e^{-\delta t} \sin \omega' t.$$

4. Главное достоинство операторного метода для расчета переходных процессов, заключающееся в алгебраизации дифференциальных уравнений цепи, особенно проявляется при расчете сложных цепей. Ранее было доказано, что, учитывая члены $L_k i_k(0)$ и $u_{Ck}(0)/p$ как добавочные ЭДС, можно применить к расчету переходных процессов все методы расчета сложных цепей.

Рассмотрим переходный процесс в следующей цепи (рис. 10.2):

По методу контурных токов

$$\begin{cases} Z_{11}(p)I_{11}(p) + Z_{12}(p)I_{22}(p) = E_{11}(p) \\ Z_{21}(p)I_{11}(p) + Z_{22}(p)I_{22}(p) = E_{22}(p) \end{cases},$$

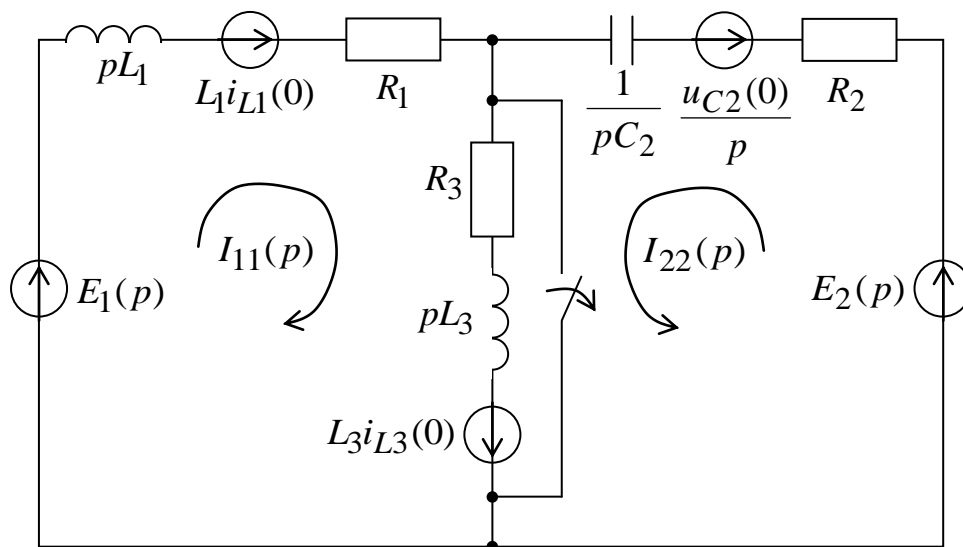


Рис. 10.2. Схема цепи

где

$$\begin{cases} Z_{11}(p) = R_1 + R_3 + p(L_1 + L_3) \\ Z_{12}(p) = Z_{21}(p) = R_3 + pL_3 \\ Z_{22}(p) = R_2 + R_3 + pL_3 + \frac{1}{pC_3}; \\ E_{11}(p) = E_1(p) + L_1 i_{L1}(0) + L_3 i_{L3}(0) \\ E_{22}(p) = E_2(p) - \frac{u_{C2}(0)}{p} + L_3 i_{L3}(0). \end{cases}$$

Решение уравнений

$$\begin{cases} I_1(p) = \frac{Z_{22}(p)}{D(p)} E_{11}(p) - \frac{Z_{12}(p)}{D(p)} E_{22}(p) \\ I_2(p) = -\frac{Z_{21}(p)}{D(p)} E_{11}(p) - \frac{Z_{11}(p)}{D(p)} E_{22}(p), \end{cases}$$

где $D(p) = Z_{11}(p) Z_{22}(p) - Z_{12}^2(p)$.

Пусть $e_1 = E_0 = \text{const}$; $e_2 = E_m \sin \omega t$.

Изображения этих функций

$$E_1(p) = \frac{E_0}{p}; \quad E_2(p) = \frac{E_m \omega}{p^2 + \omega^2}.$$

Если подставить эти изображения ЭДС в формулу для токов, то видно, что последнее представляет собой рациональную дробь, где числитель и знаменатель являются полиномами оператора p . Как правило, в таблицах формулы соответствия оригиналов и изображений приведены только для полиномов относительно низкого порядка.

30.4. Переход от изображения к оригиналу. Теорема разложения

Для перехода к оригиналу необходимо представить изображение в виде рациональной дроби и заменить его простейшими слагаемыми, для которых известны оригиналы. Воспользуемся теоремой разложения.

Пусть имеется изображение в виде

$$X(p) = \frac{G(p)}{H(p)}, \quad (10.22)$$

где $G(p)$ и $H(p)$ – полиномы от p , причем будем полагать $m < n$ (m – степень полинома в числителе, n – в знаменателе). Предположим, что $H(p) = 0$ не имеет кратных корней, а также не имеет корней, равных корням уравнения

$G(p) = 0$. При указанных условиях рациональную дробь можно разложить на простейшие дроби

$$\frac{G(p)}{H(p)} = \frac{A_1}{p - p_1} + \frac{A_2}{p - p_2} + \dots + \frac{A_n}{p - p_n} = \sum_{k=1}^n \frac{A_k}{p - p_k}, \quad (10.23)$$

где p_n – корни полинома $H(p)$.

Из алгебры известно, что

$$A_k = \frac{G(p_k)}{H'(p_k)}.$$

Таким образом,

$$X(p) = \frac{G(p)}{H(p)} = \sum_{k=1}^n \frac{A_k}{p - p_k} = \sum_{k=1}^n \frac{G(p_k)}{H'(p_k)} \cdot \frac{1}{p - p_k}. \quad (10.24)$$

Искомая величина

$$x(t) = \sum_{k=1}^n \frac{G(p_k)}{H'(p_k)} e^{p_k t}. \quad (10.25)$$

Выражение (10.25) называют теоремой разложения.

Если один из корней характеристического уравнения равен нулю, то

$$e^{p_1 t} = 1 \text{ и } X(p) \doteq x(t) = \frac{G(0)}{H'(0)} + \sum_{k=2}^n \frac{G(p_k)}{H'(p_k)} e^{p_k t} \quad (10.26)$$

Полином $H(p)$ может иметь корень $p_1 = 0$, когда в цепи имеются источники постоянной ЭДС. Выделенный постоянный член представляет собой установившийся ток или напряжение в цепи.

Если $H(p)$ имеет пару сопряженных чисто минимальных корней $p_1 = j\omega$ и $p_2 = -j\omega$, то можно записать:

$$X(p) \doteq \frac{G(j\omega)}{H'(j\omega)} + \frac{G(-j\omega)}{H'(-j\omega)} + \sum_{k=3}^n \frac{G(p_k)}{H'(p_k)} e^{p_k t}. \quad (10.27)$$

Полином $H(p)$ может иметь пару чисто мнимых сопряженных корней в случае, если рассматривается переходный процесс при наличии в цепи источников синусоидальных ЭДС. Два первых члена определяют синусоидальный ток или напряжение установившегося режима.

Самостоятельная работа

Анализ переходных процессов в линейных электрических цепях классическим и операторным методами.

[Л 3, с. 273–278, 297–299]