

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«КАЗАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ЭЛЕКТРОТЕХНИКИ

Методические указания
и контрольное задание №2

Для студентов заочной формы обучения
электроэнергетических специальностей

Казань 2017

УДК 621.3
ББК 31.21
Т 33

Теоретические основы электротехники: Метод. указания и контрольное задание №2 для студентов заочной формы обучения электроэнергетических специальностей. Сост.: Н.А. Тарасова, Ю.Н. Ерашова., Ш.Ф. Тагиров – Казань: Казан. гос. энерг. ун-т, 2010. – 44 с.

Приведены основные теоретические сведения, охватывающие вторую часть курса «Теоретические основы электротехники», методические указания по самостоятельному изучению дисциплины, варианты контрольного задания №2.

Методическая разработка предназначена для студентов заочной формы обучения электроэнергетических специальностей по направлениям 140200, 140600 и 210100.

УДК 621.3
ББК 31.21

© Казанский государственный энергетический университет, 2010

ПРЕДИСЛОВИЕ

Предлагаемые задания охватывают вторую и третью части основного материала дисциплины и соответствуют программе, утвержденной Министерством образования и науки Российской Федерации.

Последовательность изучения этих частей курса изложена в программе, которая представлена в первой части пособия.

ЛИТЕРАТУРА

Основная:

1. Бессонов Л.А. Теоретические основы электротехники. Электрические цепи. – 11-е изд. – М: Гардарики, 2006.
2. Демирчян. К.С. Теоретические основы электротехники. В 3-х т. – 4-е изд. – Питер, 2006.
3. Основы теории электрических цепей: Учебник для вузов / Ю.А. Бычков, В.М. Золотницкий, Э.П. Чернышев. – 3-е изд., стер. – СПб.: Лань, 2004.
4. Сборник задач по теоретическим основам электротехники: Учеб. пособие – 4-е изд., перераб. и доп. – Под ред. Л.А. Бессонова – М.: Высш. шк., 2003.

Дополнительная:

5. Бессонов Л.А. Теоретические основы электротехники. – М.: Высшая школа. – Т.1, 1986; Т.2, 1989.
6. Основы теории цепей / Г.В. Зевеке, П.А. Ионкин, А.В. Нетушил, и др. – М.: Энергоатомиздат, 1989.
7. Лоторейчук Е.А. Теоретические основы электротехники. – М.: ИД «ФОРУМ» – ИНФРА-М, 2008.
8. Сурай Л.А. Теория электрических цепей с распределенными параметрами в примерах и задачах. – Казань КГЭУ, 2005.

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ИЗУЧЕНИЮ ДИСЦИПЛИНЫ

Раздел 4

Трехфазные электрические цепи

При изучении трехфазных цепей особое внимание необходимо обратить на преимущество, которое дает трехфазная система по сравнению с од-

нофазной. Рассматривая схемы соединения обмоток генератора, надо уяснить связь между фазными и линейными напряжениями в схеме соединения звездой, а также связь между фазными и линейными токами в схеме соединения нагрузки треугольником. Необходимо четко представлять, что в трехфазной цепи могут быть два режима: симметричный и несимметричный (расчет цепи в симметричном режиме сводится к расчету одной фазы).

Литература: [1], с. 185-207;
[2], т. 1, с. 321-331;
[3], с. 222-232.

Вопросы для самопроверки

1. Основные элементы трехфазной цепи.
2. Какие способы соединения обмоток генератора вы знаете?
3. Какие режимы работы трехфазного потребителя можете назвать?
4. Какова роль нейтрального провода?
5. Особенности расчета трехфазной цепи в зависимости от способа соединения и режима работы потребителя.
6. Принцип построения векторной диаграммы.

Раздел 5

Несинусоидальные токи и напряжения в линейных электрических цепях

При разложении несинусоидальных кривых в ряд Фурье следует оценить наличие условий симметрии кривых (относительно оси абсцисс или ординат или начала координат). При этом разложение в ряд значительно упрощается за счет отсутствия в разложении целых секторов гармоник.

Часто кривая задается графически (получена экспериментально), поэтому применяют приближенный метод разложения кривой на гармоники. В отличие от синусоидальных, несинусоидальные токи, ЭДС и напряжения характеризуются целым рядом электрических величин и коэффициентов, что позволяет с их помощью предварительно оценить форму несинусоидальных кривых. Кроме действующих значений, применяют еще следующие величины: I_0 – среднее значение или постоянная составляющая; $I_{\text{ср}}$ – среднее по модулю значение, а также коэффициент амплитуды, формы, искажений гармоник, по которым можно оценить отклонение формы несинусоидальной кривой от синусоидальной.

Сопротивление электрической цепи, содержащей индуктивные катушки и конденсаторы, зависит от частоты, и, следовательно, оно оказывается

различным для разных гармоник. Поэтому если к зажимам такой цепи приложено периодическое несинусоидальное напряжение, то кривая тока в цепи отличается по форме от кривой напряжения. Кривая тока подобна кривой напряжения только в активном сопротивлении, одинаковом для всех частот.

Зависимость реактивных (индуктивных и емкостных) сопротивлений от частот используется для изменения формы кривой тока и напряжения. В ряде случаев требуется выделять действие ЭДС какой-либо одной частоты или, наоборот, устранять действие ЭДС или тока некоторой определенной частоты. Такие устройства предполагают использование резонансных контуров, настроенных на частоты соответствующих гармоник, и поэтому называются резонансными частотными фильтрами.

В трехфазных цепях с несинусоидальными ЭДС в фазах появляются токи, содержащие целый спектр высших гармоник прямой, обратной и нулевой последовательностей. Влияние гармоник, кратных трем, по-разному проявляется в кривых фазных и линейных токов при соединении обмотки генератора и фаз нагрузки в звезду или треугольник и должно быть учтено при расчете режимов работы трехфазных усилителей.

Литература: [1], с. 209-229;
[2], т. 1, с. 335-350;

Вопросы для самопроверки

1. Какие виды симметричных кривых негармонической формы вы знаете? Амплитуда каких членов равна нулю, если симметрична относительно: а) горизонтальной оси; б) вертикальной оси; в) начала координат?
2. Кривая состоит из двух гармонических составляющих. Изменится ли форма кривой, если частоту и начальную фазу одной гармоники оставить без изменения, а изменять: а) частоту; б) начальную фазу второй гармоники?
3. Почему при постоянном токе индуктивное сопротивление равно нулю, а емкостное – бесконечно большое?
4. У синусоиды с периодом $T = 1$ мс обрезали начальную полуволну. Определите частоту первой, второй и четвертой гармоник.
5. Объясните влияние индуктивности и емкости на форму кривых тока и напряжения.
6. Приведите схемы электрических цепей, где используется явление резонанса токов на высших гармониках.

Раздел 6

Переходные процессы в линейных электрических цепях

При изучении теории переходных процессов следует обратить внимание на причину возникновения переходных процессов, т.е. на инерционность индуктивных и емкостных элементов, связанную с ограниченностью напряжений и токов, а также с непрерывностью энергии, накопленной в магнитном или электрическом поле. Нужно уяснить физический смысл первого и второго законов коммутации, вспомнить понятия пределов функций слева и справа.

При знакомстве с классическим методом расчета переходных процессов надо уяснить, что расчет цепи до коммутации в установившемся режиме нужен для определения начальных условий переходного процесса после коммутации, т.е. значений токов катушек индуктивности и напряжений на конденсаторах в момент коммутации. Следует обратить внимание на представление напряжений в виде производных и интегралов от токов при составлении уравнений по I и II законам Кирхгофа, причем напряжение на конденсаторе имеет начальное значение.

При отыскании принужденной составляющей ее вид должен соответствовать закону изменения ЭДС или приложенного к цепи напряжения. Следует обратить внимание на соответствие между методом расчета цепи в установившемся режиме и формой напряжения или ЭДС.

При изучении методов составления характеристического уравнения надо учесть, что при приведении системы дифференциальных уравнений к одному уравнению высокого порядка получается одно и то же характеристическое уравнение относительно тока любой ветви схемы. Желательно выбирать такой ток, чтобы иметь минимальное количество преобразований.

При изучении метода определителя и операторного сопротивления желательно вспомнить основные свойства преобразования Лапласа, в частности, то, что операциям дифференцирования и интегрирования оригинала соответствуют операции умножения и деления изображения на комплексную переменную преобразования Лапласа. При методе операторного сопротивления следует обратить внимание на место разрыва одной из ветвей, при котором получается более простой путь составления выражения для сопротивления. При разложении определителя по элементам строки или столбца целесообразен их выбор с максимальным числом нулевых элементов, что сокращает преобразования.

При записи свободной составляющей искомого тока нужно предварительно ознакомиться с видами решений дифференциальных уравнений, соответствующими формам корней характеристического уравнения. Следует обратить внимание на случай комплексно сопряженных корней, которым соответствует произведение экспоненты на синусоиду, а также случай кратных

корней, которым соответствует множитель-полином степени, на единицу меньше кратности корней.

При знакомстве с зависимыми начальными условиями надо учесть, что они зависят от конфигурации цепи после коммутации или от изменившихся параметров ее элементов, в то время как независимые начальные условия инвариантны относительно их изменений. Целесообразно обратить внимание на приемы использования исходной схемы уравнений по I и II законам Кирхгофа для вычисления начального значения искомого тока и его производной.

Важными величинами при анализе переходных процессов являются постоянные времени, определяющие скорость затухания свободных составляющих. Желательно уяснить, во сколько раз они уменьшаются за время, равное одной, двум и трем постоянным времени, а также как они влияют на время переходного процесса и выбор интервала времени для графиков переходных процессов.

При изучении операторного метода расчета переходных процессов целесообразно вспомнить изображения элементарных функций: константы, экспоненты, полинома, синусоиды, а также производной и интеграла с переменным верхним пределом. Нужно уяснить смысл операторных сопротивлений и проводимостей, а также операторных схем замещения резистора, катушки индуктивности и конденсатора. Желательно попрактиковаться в составлении уравнений по закону Ома и по I и II законам Кирхгофа в операторной форме.

При рассмотрении перехода от изображения искомого тока к функции времени с помощью теоремы разложения следует обратить внимание на условия ее применения, а также на случай кратных корней, одного нулевого корня и комплексно сопряженных корней. Целесообразно вспомнить и метод неопределенных коэффициентов для нахождения числителей элементарных дробей.

При изучении метода переменных состояния следует обратить внимание на отличие переменных состояния от управляющих воздействий и от других переменных, на возможность их скачкообразного изменения и связь с энергией и мощностью реактивных элементов. Важным моментом является выбор контуров для составления уравнений цепи по II закону Кирхгофа, а также применение теоремы графов и выбор дерева, которому соответствуют уравнения, требующие минимальных преобразований для перехода к системе дифференциальных уравнений в нормальной форме.

Желательно знакомство с одним из численных методов, позволяющих проинтегрировать систему дифференциальных уравнений на персональном компьютере, а также представление о выборе шага интегрирования.

Литература: [1], с. 231-310;
[2], т. 2, с. 11-102;
[3], с. 52-86.

Вопросы для самопроверки

1. Объясните, почему возникают переходные процессы в цепях с катушками индуктивности и конденсаторами.
2. Дайте энергетическое обоснование первого и второго законов коммутации.
3. Дайте определение принужденной и свободной составляющих тока при переходном процессе.
4. Объясните разницу между независимыми и зависимыми начальными условиями.
5. Перечислите этапы расчета переходных процессов классическим методом в линейных электрических цепях.
6. Объясните построение операторной схемы цепи по электрической схеме с учетом начальных условий.
7. Сформулируйте теорему разложения и перечислите условия ее применения.
8. Запишите уравнения Ома и Кирхгофа в операторной форме.
9. Перечислите этапы операторного метода расчета переходных процессов в линейных цепях.
10. Дайте определение переменной состояния, приведите примеры механических и электрических переменных состояния.

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К ОФОРМЛЕНИЮ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ

К представленным на рецензию контрольным заданиям предъявляются следующие требования:

1. На обложке тетради следует указывать фамилию, имя и отчество, домашний адрес, номер контрольного задания, название дисциплины и вариант студента;
2. В тетради следует оставлять поля шириной не менее 4 см для замечаний рецензента;
3. Начиная решение задачи, необходимо указать, какие физические законы, расчетные методы предполагается использовать при решении, привести математическую запись этих законов и методов; причем все основные положения, приводимые при решении, должны быть пояснены;

4. Промежуточные и конечные результаты расчетов должны быть четко выделены в общем тексте;

5. Решение задач не следует перегружать приведением всех алгебраических преобразований и арифметических расчетов;

6. Вычисления должны быть сделаны с точностью до третьей значащей цифры;

7. Рисунки, графики, схемы должны быть выполнены аккуратно и в удобочитаемом масштабе. Рекомендуется при построении кривых выбирать такой масштаб, чтобы на 1 см оси координат приходилось $1 \cdot 10^{\pm n}$ или $2 \cdot 10^{\pm n}$ единиц измерения физической величины. Градуировку осей выполнять, начиная с нуля, равномерно, через один или два сантиметра. Числовые значения координат точек, по которым строятся кривые, не приводить. Весь график в целом и отдельные кривые на нем должны иметь названия;

8. Выполненные контрольные задания должны быть датированы и подписаны студентом;

9. Незачтенное контрольное задание должно быть выполнено и прислано на повторную рецензию вместе с первоначальной работой и замечаниями рецензента. Исправление ошибок в отрецензированном тексте не допускается. Если неправильно выполнена не вся работа, а только часть ее, то переработанный и исправленный текст следует записать в тетради после первоначального текста с подзаголовком «Исправление ошибок».

Контрольные задания зачитываются, если решение не содержит ошибок принципиального характера и выполнены все перечисленные требования.

Номер варианта контрольных задач выбирается по порядковому номеру студента в учебной группе.

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ

Трехфазная цепь может рассматриваться как разветвленная цепь с тремя источниками питания, и для ее расчета применяются методы, используемые при расчете сложных разветвленных цепей. Например, если несимметричный приемник соединен звездой без нейтрального провода, то для расчета можно применить метод узлового напряжения в комплексной форме.

При выполнении задания по расчету переходных процессов следует четко разделить его этапы. На каждом этапе нужно продумать, в каком режиме рассматривается цепь, какой метод применяется для выполнения этапа и в какой форме должны быть представлены результаты.

При расчете цепи до коммутации используйте комплексный метод расчета.

5 СЕМЕСТР

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 2

Работа содержит две задачи.

Задача 4

Питание трехфазной нагрузки Z_A , Z_B , Z_C осуществляется от симметричного трехфазного источника (рис. 1).

Напряжение фазы А

$$u_A = 170\sin\omega t + 113\sin(3\omega t + \pi/6) + 78,7 \sin(5\omega t - \pi/4) \text{ В,}$$

где $\omega = 314$ рад/с.

Требуется определить:

1. При замкнутом и разомкнутом рубильнике показания ваттметров, показание вольтметра на зажимах рубильника, показание амперметра в нулевом проводе и одного из трех амперметров включенных в линейные провода.
2. При замкнутом рубильнике мгновенное значение линейного напряжения u_{CA} и тока в фазе В i_B .
3. Мгновенное значение тока в нулевом проводе и построить график тока $i_0(t)$.

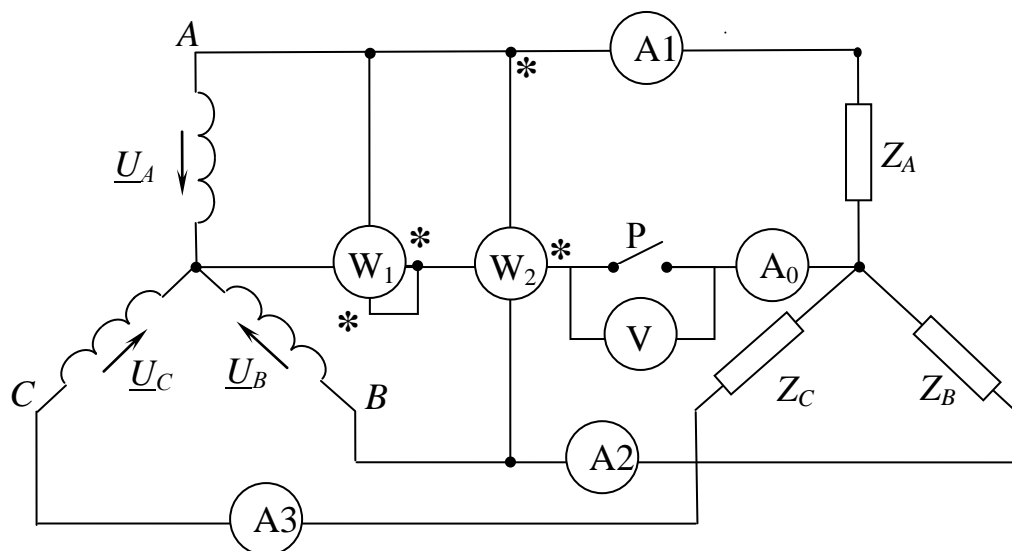


Рис. 1

Все измерительные приборы, включенные в схему, являются приборами электродинамической системы.

Характер и числовые значения сопротивления в фазах нагрузки, номер амперметра, включенного в линейный провод, показание которого надо определить приведены в табл.1.

Таблица 1.

№ варианта	Z_A	Z_B	Z_C	A
1	30	$j18$	$-j27$	A1
2	$j12$	$-j18$	20	A2
3	$-j36$	40	$j24$	A3
4	25	$-j30$	$j18$	A1
5	$-j30$	$j18$	18	A2
6	$j9$	9	$-j27$	A3
7	18	18	$j15$	A1
8	12	$j10$	12	A2
9	$j16$	27	27	A3
10	35	35	$-j45$	A1
11	18	$-j27$	18	A2
12	$-j42$	25	25	A3
13	$j18$	$j18$	30	A1
14	$j12$	20	$j12$	A2
15	40	$j24$	$j24$	A3
16	$-j30$	$-j30$	25	A1
17	$-j30$	18	$-j30$	A2
18	10	$-j27$	$-j27$	A3
19	$j15$	$j15$	$-j52$	A1
20	$j10$	$-j35$	$j10$	A3

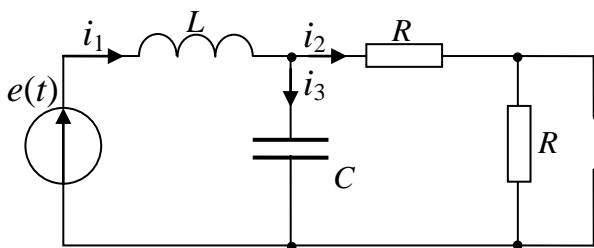
Задача 5

1. По номеру зачетной книжки выбрать вариант. Каждому варианту соответствует схема, содержащая источник ЭДС и тока. Здесь $e(t) = 100\sin(500t + \alpha)$, $i(t) = 10\sin(500t + \alpha)$.

2. Рассчитать переходный процесс классическим методом. Найти ток ветви, не содержащей катушки индуктивности и источник ЭДС.

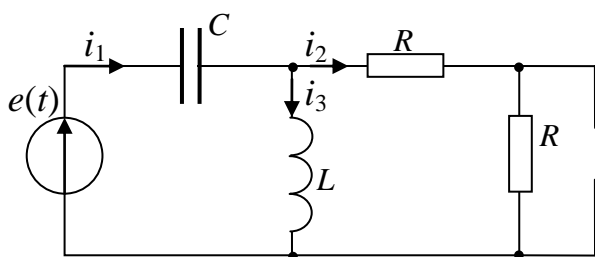
3. Рассчитать переходный процесс операторным методом и сравнить результаты с п.2.

4. Начертить в масштабе графики найденного тока и его принужденной и свободной составляющих.



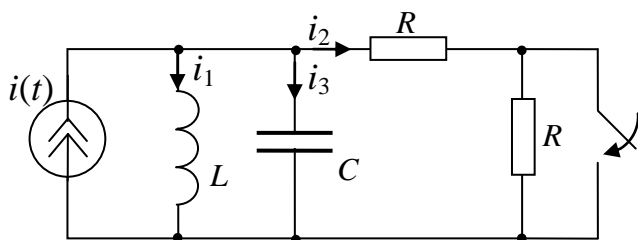
Вариант 1
 $R = 10 \text{ Ом}$
 $L = 10 \text{ мГн}$
 $C = 50 \text{ мкФ}$
 $\alpha = 120^\circ$

Вариант 2
 $R = 5 \text{ Ом}$
 $L = 10 \text{ мГн}$
 $C = 100 \text{ мкФ}$
 $\alpha = -30^\circ$



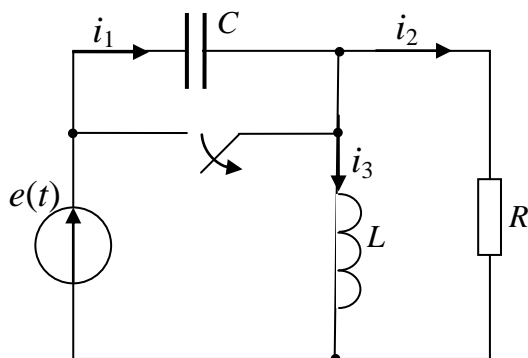
Вариант 3
 $R = 4 \text{ Ом}$
 $L = 10 \text{ мГн}$
 $C = 100 \text{ мкФ}$
 $\alpha = -120^\circ$

Вариант 4
 $R = 10 \text{ Ом}$
 $L = 10 \text{ мГн}$
 $C = 50 \text{ мкФ}$
 $\alpha = -150^\circ$



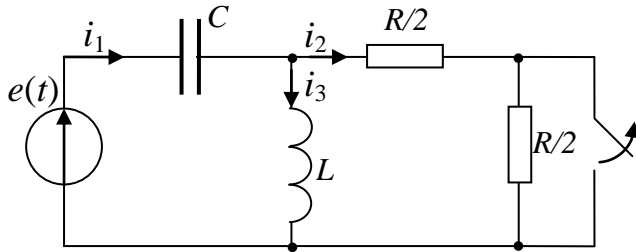
Вариант 5
 $R = 5 \text{ Ом}$
 $L = 10 \text{ мГн}$
 $C = 100 \text{ мкФ}$
 $\alpha = 60^\circ$

Вариант 6
 $R = 4 \text{ Ом}$
 $L = 10 \text{ мГн}$
 $C = 100 \text{ мкФ}$
 $\alpha = -45^\circ$



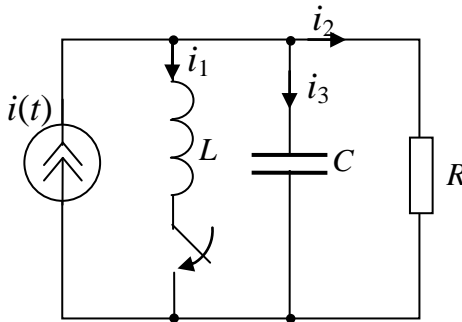
Вариант 7
 $R = 10 \text{ Ом}$
 $L = 10 \text{ мГн}$
 $C = 50 \text{ мкФ}$
 $\alpha = 135^\circ$

Вариант 8
 $R = 5 \text{ Ом}$
 $L = 10 \text{ мГн}$
 $C = 100 \text{ мкФ}$
 $\alpha = 150^\circ$



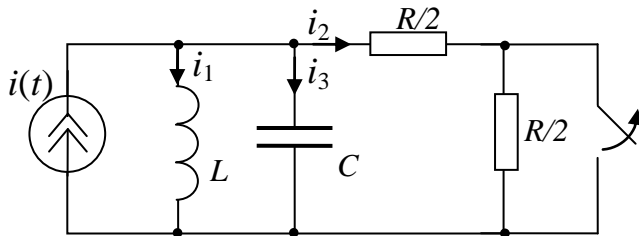
Вариант 9
 $R = 4 \text{ Ом}$
 $L = 10 \text{ мГн}$
 $C = 100 \text{ мкФ}$
 $\alpha = -45^\circ$

Вариант 10
 $R = 10 \text{ Ом}$
 $L = 10 \text{ мГн}$
 $C = 50 \text{ мкФ}$
 $\alpha = 30^\circ$



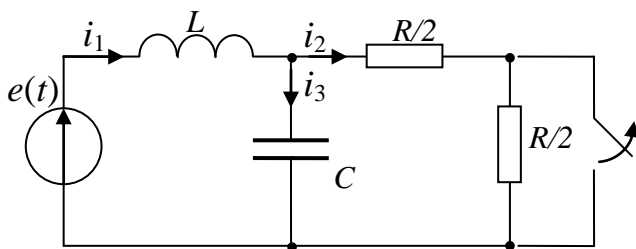
Вариант 11
 $R = 5 \text{ Ом}$
 $L = 10 \text{ мГн}$
 $C = 100 \text{ мкФ}$
 $\alpha = -60^\circ$

Вариант 12
 $R = 4 \text{ Ом}$
 $L = 10 \text{ мГн}$
 $C = 100 \text{ мкФ}$
 $\alpha = 45^\circ$



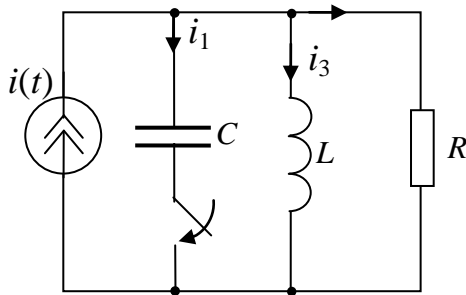
Вариант 13
 $R = 10 \text{ Ом}$
 $L = 10 \text{ мГн}$
 $C = 50 \text{ мкФ}$
 $\alpha = 60^\circ$

Вариант 14
 $R = 5 \text{ Ом}$
 $L = 10 \text{ мГн}$
 $C = 100 \text{ мкФ}$
 $\alpha = -45^\circ$



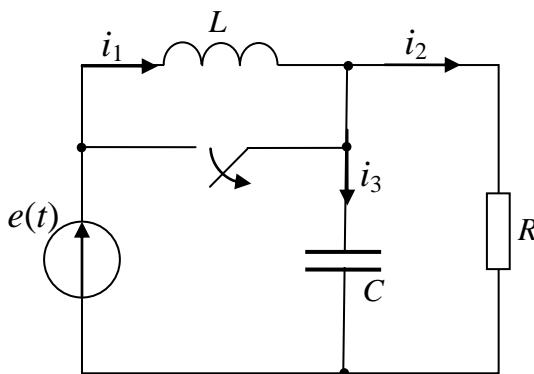
Вариант 15
 $R = 4 \text{ Ом}$
 $L = 10 \text{ мГн}$
 $C = 100 \text{ мкФ}$
 $\alpha = -120^\circ$

Вариант 16
 $R = 10 \text{ Ом}$
 $L = 10 \text{ мГн}$
 $C = 50 \text{ мкФ}$
 $\alpha = -150^\circ$



Вариант 17
 $R = 10 \text{ Ом}$
 $L = 100 \text{ мГн}$
 $C = 50 \text{ мкФ}$
 $\alpha = 135^\circ$

Вариант 18
 $R = 5 \text{ Ом}$
 $L = 10 \text{ мГн}$
 $C = 100 \text{ мкФ}$
 $\alpha = -135^\circ$



Вариант 19
 $R = 5 \text{ Ом}$
 $L = 10 \text{ мГн}$
 $C = 100 \text{ мкФ}$
 $\alpha = -60^\circ$

Вариант 20
 $R = 5 \text{ Ом}$
 $L = 10 \text{ мГн}$
 $C = 100 \text{ мкФ}$
 $\alpha = 150^\circ$

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ

ТРЕХФАЗНЫЕ ЦЕПИ

Трёхфазной системой ЭДС называется совокупность трех ЭДС, имеющих одну частоту и созданных общим источником. ЭДС e_A , e_B , e_C образуют симметричную систему прямой последовательности, если они изменяются по законам и имеют комплексные действующие значения:

$$\begin{aligned} e_A &= E_m \sin(\omega t + \alpha), & \underline{E}_A &= E e^{j\alpha}, \\ e_B &= E_m \sin\left(\omega t + \alpha - \frac{2\pi}{3}\right), & \underline{E}_B &= E e^{j(\alpha - 2\pi/3)}, \\ e_C &= E_m \sin\left(\omega t + \alpha + \frac{2\pi}{3}\right), & \underline{E}_C &= E e^{j(\alpha + 2\pi/3)}. \end{aligned}$$

Симметричную трёхфазную систему обратной последовательности образуют ЭДС:

$$\begin{aligned} e_A &= E_m \sin(\omega t + \alpha), & \underline{E}_A &= E e^{j\alpha}, \\ e_B &= E_m \sin\left(\omega t + \alpha + \frac{2\pi}{3}\right), & \underline{E}_B &= E e^{j(\alpha + 2\pi/3)} \end{aligned}$$

$$e_C = E_m \sin(\omega t + \alpha - \frac{2\pi}{3}), \quad \underline{E}_C = E e^{j(\alpha - 2\pi/3)}.$$

Три равных ЭДС дают систему нулевой последовательности:

$$e_A = e_B = e_C = E_m \sin(\omega t + \alpha);$$

$$\underline{E}_A = \underline{E}_B = \underline{E}_C = E e^{j\alpha}.$$

На рис. 2 даны графики системы ЭДС прямой последовательности.

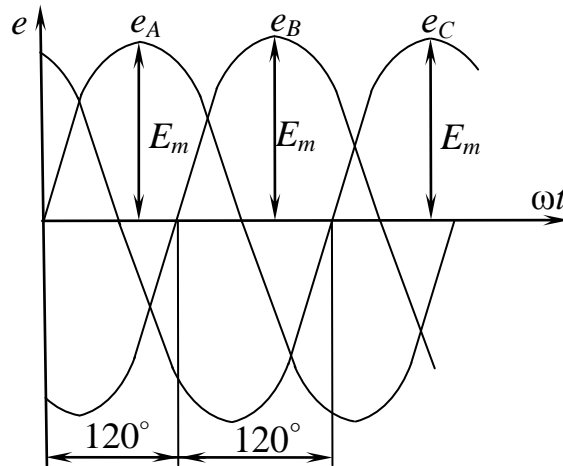


Рис. 2

На рис. 3а показана векторная диаграмма ЭДС прямой последовательности, на рис. 3б – векторная диаграмма ЭДС обратной последовательности, на рис. 3в – векторная диаграмма ЭДС нулевой последовательности.

Симметричные системы прямой и обратной последовательностей являются уравновешенными, т.е. $e_A + e_B + e_C \equiv 0$ или $\underline{E}_A + \underline{E}_B + \underline{E}_C = 0$.

Любую несимметричную систему ЭДС можно представить суммой симметричных систем прямой, обратной и нулевой последовательностей.

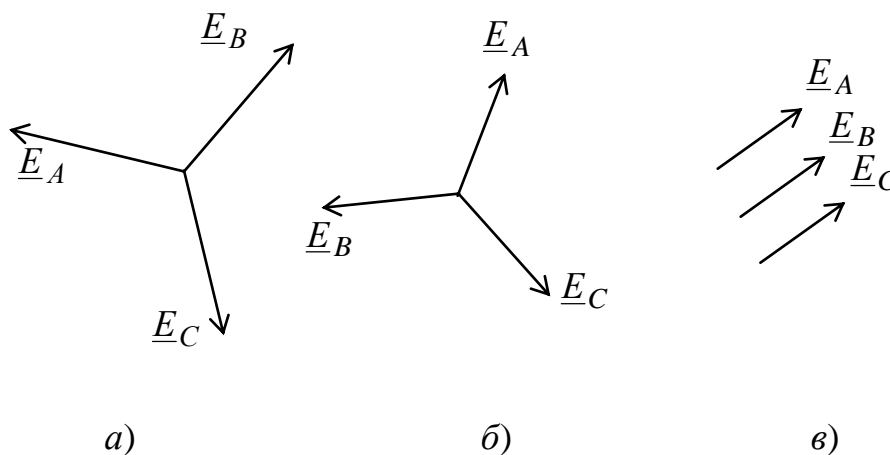


Рис. 3

Трехфазной называется цепь, в которой действует трехфазная система ЭДС. Части цепи, в которых действует одна ЭДС, называются фазами генератора и нагрузки. На рис. 4 показана трехфазная цепь, где фазы генератора и фазы нагрузки соединены в звезду. В фазах генератора наводятся ЭДС \underline{E}_A , \underline{E}_B , \underline{E}_C . В фазах нагрузки имеются сопротивления \underline{Z}_A , \underline{Z}_B , \underline{Z}_C с фазными напряжениями \underline{U}_A , \underline{U}_B , \underline{U}_C и фазными токами \underline{I}_A , \underline{I}_B , \underline{I}_C . Провода AA' , BB' , CC' называются линейными, провод OO' – нулевым. Линейные напряжения \underline{U}_{AB} , \underline{U}_{BC} , \underline{U}_{CA} удовлетворяют равенствам

$$\underline{U}_{AB} = \underline{U}_A - \underline{U}_B, \underline{U}_{BC} = \underline{U}_B - \underline{U}_C, \underline{U}_{CA} = \underline{U}_C - \underline{U}_A.$$

Линейные токи совпадают с фазными.

При симметричной нагрузке

$$\underline{Z}_A = \underline{Z}_B = \underline{Z}_C = \underline{Z}_H = Z_H e^{j\varphi_H}.$$

Если ЭДС e_A , e_B , e_C образуют симметричную систему прямой последовательности, то токи i_A , i_B , i_C – тоже:

$$\underline{I}_A = I e^{j(\alpha - \varphi_H)}, \underline{I}_B = I e^{j(\alpha - \varphi_H - 2\pi/3)}, \underline{I}_C = I e^{j(\alpha - \varphi_H + 2\pi/3)}, I = \frac{E}{Z_H}.$$

При этом $I_0 = 0$ и нейтральный провод не нужен.

На рис. 5 приведена векторная диаграмма напряжений и токов в случае симметричной нагрузки. Здесь имеют место равенства:

$$U_{\text{л}} = \sqrt{3}U_{\text{ф}}, I_{\text{л}} = I_{\text{ф}}, P = \sqrt{3}U_{\text{л}}I_{\text{л}} \cos\varphi_H.$$

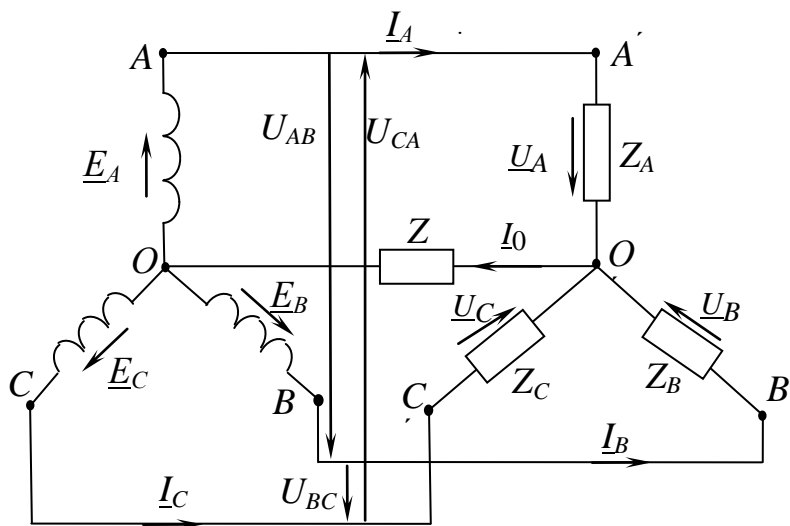


Рис. 4

При несимметричной нагрузке

$$\underline{Z}_A \neq \underline{Z}_B \neq \underline{Z}_C.$$

Методом двух узлов определяем напряжение между нейтральными генератора и нагрузки:

$$\underline{U}_{O'O} = \frac{\underline{E}_A \underline{Y}_A + \underline{E}_B \underline{Y}_B + \underline{E}_C \underline{Y}_C}{\underline{Y}_A + \underline{Y}_B + \underline{Y}_C}.$$

Затем находим фазные напряжения:

$$\underline{U}_A = \underline{E}_A - \underline{U}_{O'O}, \underline{U}_B = \underline{E}_B - \underline{U}_{O'O}, \underline{U}_C = \underline{E}_C - \underline{U}_{O'O}.$$

После чего определяем токи

$$\underline{I}_A = \underline{Y}_A \underline{U}_A; \underline{I}_B = \underline{Y}_B \underline{U}_B; \underline{I}_C = \underline{Y}_C \underline{U}_C;$$

$$\underline{I}_0 = \underline{Y}_0 \underline{U}_0; \text{ или } \underline{I}_0 = \underline{I}_A + \underline{I}_B + \underline{I}_C.$$

Нейтральный провод служит для выравнивания потенциалов нейтральных точек генератора и нагрузки, когда она несимметрична. При этом система фазных напряжений $\underline{U}_A, \underline{U}_B, \underline{U}_C$ близка к симметричной.

На рис. 5 показана цепь, где фазы генератора и фазы нагрузки соединены в треугольник.

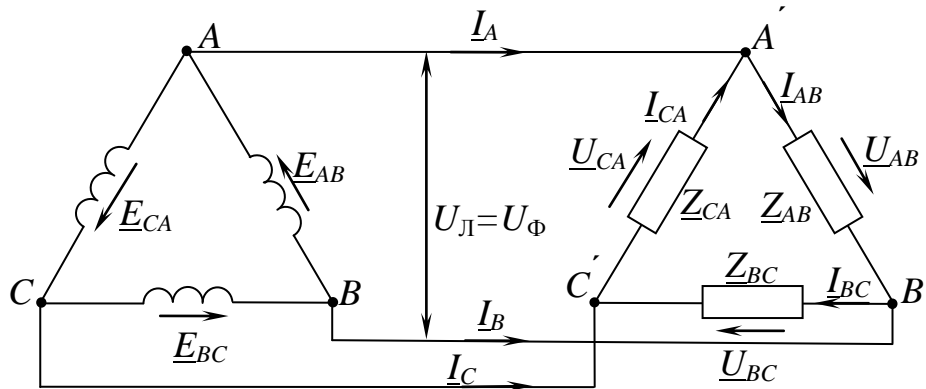


Рис. 1.5

В фазах генератора наводятся ЭДС $\underline{E}_{AB}, \underline{E}_{BC}, \underline{E}_{CA}$. В фазах нагрузки имеются сопротивления $\underline{Z}_{AB}, \underline{Z}_{BC}, \underline{Z}_{CA}$ с фазными напряжениями $\underline{U}_{AB}, \underline{U}_{BC}, \underline{U}_{CA}$ и фазными токами $\underline{I}_{AB}, \underline{I}_{BC}, \underline{I}_{CA}$. Линейные напряжения совпадают с фазными, линейные токи $\underline{I}_A, \underline{I}_B, \underline{I}_C$ связаны с фазными токами равенствами:

$$\underline{I}_A = \underline{I}_{AB} - \underline{I}_{CA}; \underline{I}_B = \underline{I}_{BC} - \underline{I}_{AB}; \underline{I}_C = \underline{I}_{CA} - \underline{I}_{BC}.$$

Фазные токи находятся по закону Ома:

$$\underline{I}_{AB} = \frac{\underline{E}_{AB}}{\underline{Z}_{AB}}; \underline{I}_{BC} = \frac{\underline{E}_{BC}}{\underline{Z}_{BC}}; \underline{I}_{CA} = \frac{\underline{E}_{CA}}{\underline{Z}_{CA}}.$$

Если ЭДС e_{AB}, e_{BC}, e_{CA} образуют симметричную систему прямой последовательности, а нагрузка симметрична, т.е.

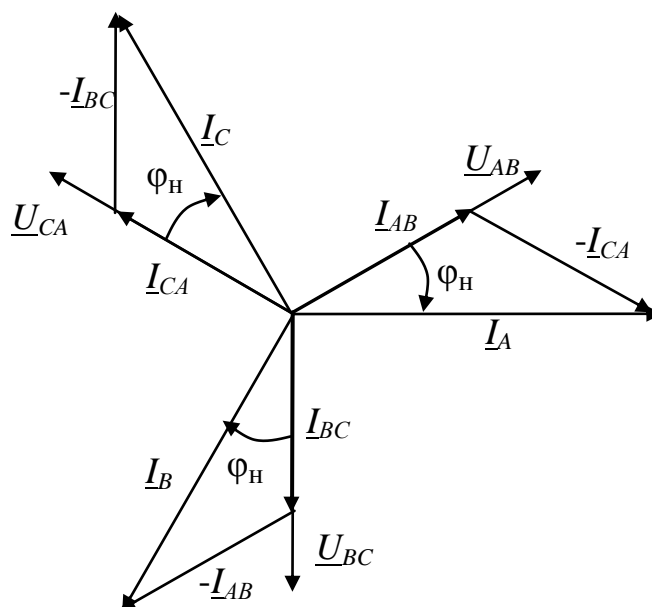


Рис. 6

$$\underline{Z}_{AB} = \underline{Z}_{BC} = \underline{Z}_{CA} = \underline{Z}_H = Z_H e^{j\varphi_H},$$

то токи i_{AB} , i_{BC} , i_{CA} тоже образуют симметричную систему:

$$\underline{I}_{AB} = I e^{j(\alpha - \varphi_H)}, \underline{I}_{BC} = I e^{j(\alpha - \varphi_H - 2\pi/3)}, \underline{I}_{CA} = I e^{j(\alpha - \varphi_H + 2\pi/3)}, I = \frac{E}{Z_H}.$$

На рис. 6 дана векторная диаграмма напряжений и токов.

Здесь имеют место равенства:

$$U_{\text{л}} = U_{\text{ф}}, I_{\text{л}} = \sqrt{3}I_{\text{ф}}, P = \sqrt{3}U_{\text{л}}I_{\text{л}} \cos\varphi_H.$$

Трехфазная система ЭДС может быть получена с помощью трехфазного синхронного генератора, схематично показанного на рис. 7.

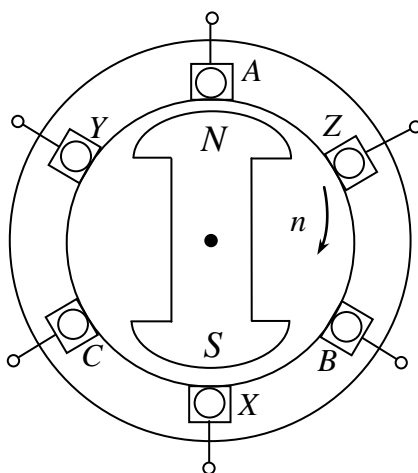


Рис. 7

Ротор-индуктор (электромагнит или постоянный магнит) создает в зазоре магнитное поле с синусоидальным распределением магнитной индукции.

При вращении магнита с постоянной частотой ω в обмотках (фазах) генератора наводятся ЭДС:

$$e_A = E_m \sin(\omega t + \alpha),$$

$$e_B = E_m \sin\left(\omega t + \alpha - \frac{2\pi}{3}\right),$$

$$e_C = E_m \sin\left(\omega t + \alpha + \frac{2\pi}{3}\right).$$

Объединение трех однофазных цепей в трехфазную цепь позволяет ограничиться тремя линейными проводами. Для питания трех потребителей от каждой обмотки отдельно потребуется шесть проводов.

ЦЕПИ НЕСИНУСОИДАЛЬНОГО ТОКА

Несинусоидальный периодический ток $i(t)$ характерен равенством $i(t + T) = i(t)$ при любом t . Здесь T – период (рис. 8).

Если функция $i(t)$ удовлетворяет условию Дирихле, то её можно разложить в ряд Фурье:

$$i = I_0 + I_{1m} \sin(\omega t + \alpha_1) + \dots + I_{km} \sin(k\omega t + \alpha_k) + \dots \text{ или}$$

$$i = I_0 + B_1 \sin \omega t + C_1 \cos \omega t + \dots + B_k \sin k\omega t + C_k \cos k\omega t + \dots$$

Здесь I_0 – постоянная составляющая; $I_1 \sin(\omega t + \alpha_1)$ – первая (основная) гармоника с периодом $T_1 = T$; $I_{km} \sin(k\omega t + \alpha_k)$ – k -я гармоника с периодом T_k .

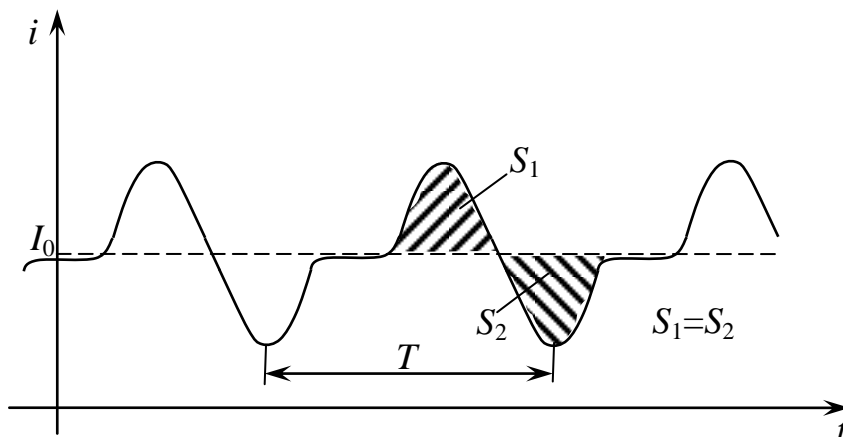


Рис. 8

На рис. 9 показаны графики постоянной составляющей U_0 , первой $u_1(t)$, второй $u_2(t)$ и третьей $u_3(t)$ гармоник. Период второй T_2 и третьей T_3 гармоник меньше периода первой гармоники T_1 в 2 и 3 раза соответственно.

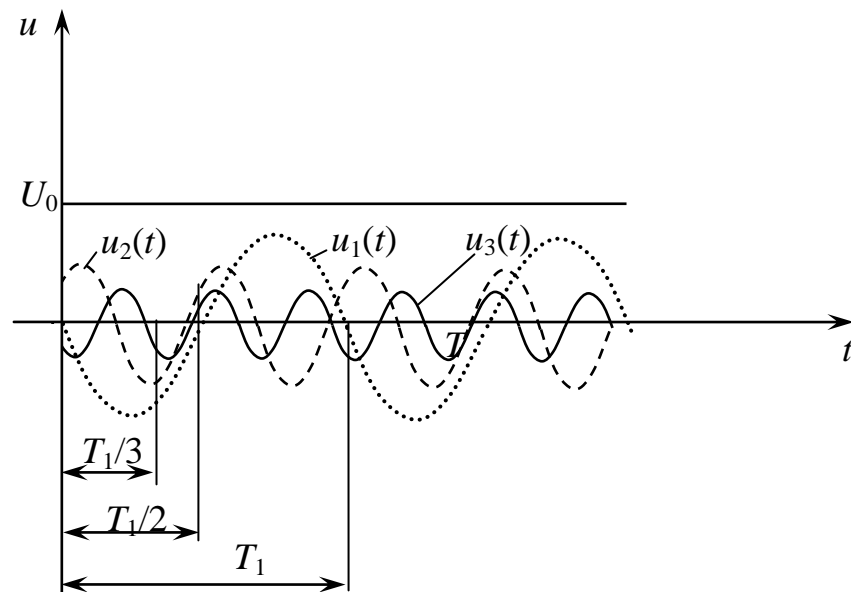


Рис. 9

Расчет цепи, в которой действует несинусоидальная ЭДС e , проводится методом наложения. Для этого ЭДС представляют рядом Фурье:

$$e = E_0 + E_1 \sin(\omega t + \beta_1) + \dots + E_{km} \sin(k\omega t + \beta_k) + \dots$$

Определяют постоянные токи в ветвях, созданные постоянной составляющей ЭДС E_0 . При этом ветви, содержащие конденсаторы, разрываются, а катушки индуктивности заменяются проводниками с нулевым сопротивлением.

Затем определяют токи в ветвях, созданные первой гармоникой ЭДС $e_1 = E_1 \sin(\omega t + \beta_1)$. При этом катушки имеют сопротивление $x_{L1} = \omega L$, а конденсаторы — $x_{C1} = \frac{1}{\omega C}$. Полученные токи примут вид $i_1 = I_{1m} \sin(\omega t + \gamma_1)$.

Далее находят токи, созданные второй гармоникой ЭДС. При этом катушки имеют сопротивления $x_{L2} = 2\omega L$, а конденсаторы $x_{C2} = \frac{1}{2\omega C}$. Токи имеют вид $i_2 = I_{2m} \sin(\omega t + \gamma_2)$. Аналогично определяют токи от других высших гармоник. Результат записывается как сумма найденных токов, т.е.

$$i = I_0 + i_1 + \dots + i_k + \dots$$

Если двухполюсник имеет ток

$$i = I_0 + I_{1m} \sin(\omega t + \alpha_1) + \dots + I_{km} \sin(k\omega t + \alpha_k) + \dots$$

и напряжение

$$u = U_0 + U_{1m}\sin(\omega t + \alpha_1 + \varphi_1) + \dots + U_{km}\sin(k\omega t + \alpha_k + \varphi_k) + \dots,$$

то действующее значение тока I , активная мощность P и реактивная мощность Q определяются:

$$I = \sqrt{I_0^2 + I_1^2 + \dots + I_k^2 + \dots};$$

$$P = U_0 I_0 + U_1 I_1 \cos\varphi_1 + \dots + U_k I_k \cos\varphi_k + \dots;$$

$$Q = U_1 I_1 \sin\varphi_1 + \dots + U_k I_k \sin\varphi_k + \dots$$

Высшие гармоники в трехфазных цепях

В трехфазных цепях кривые напряжения обычно имеют одинаковую форму и сдвинуты относительно друг друга на треть периода, т.е.

$$u_A = f(t); \quad u_B = f(t - T/3); \quad u_C = f(t + T/3),$$

где T – период основной частоты.

Пусть $u_{Ak} = U_{km}\sin(k\omega t + \psi_k)$.

Учитывая, что $\omega T = 2\pi$, и подставляя вместо t соответственно $t - T/3$ и $t + T/3$, получаем

$$u_{Bk} = U_{km}\sin(k\omega t + \psi_k - 2k\pi/3);$$

$$u_{Ck} = U_{km}\sin(k\omega t + \psi_k + 2k\pi/3).$$

Анализируя эти выражения для различных значений k , можно заметить, что напряжения гармоник, кратных трем ($k = 3n$), во всех фазах имеют одинаковое значение, т.е. образуют нулевую последовательность. При $k = 3n + 1$ гармоники трех фаз образуют симметричную систему напряжений, последовательность которой совпадает с последовательностью фаз первой гармоники (прямая последовательность). При $k = 3n + 2$ гармоники образуют симметричную систему обратной последовательности.

В силовой электроэнергетике, как правило, отсутствуют постоянная составляющая и четные гармоники.

Рассмотрим некоторые частные случаи.

Если фазы генератора соединены звездой, то при несинусоидальном фазном напряжении линейные напряжения не содержат гармоник, кратных трем, так как они образуют нулевую последовательность. Это приводит к тому, что отношение линейных напряжений к фазным меньше, чем $\sqrt{3}$:

$$U_{\phi} = \sqrt{U_1^2 + U_3^2 + U_5^2 + U_7^2 + \dots};$$

$$U_{\text{л}} = \sqrt{U_1^2 + U_5^2 + U_7^2 + \dots},$$

т.е. $U_{\text{л}} < \sqrt{3} U_{\phi}$.

При симметричной нагрузке фазные токи основной частоты и все высшие гармоники, за исключением гармоник, кратным трем, образуют

системы прямой и обратной последовательностей, и в сумме дают ноль. Гармоники же порядка, кратного трем, образуют систему нулевой последовательности, т.е. имеют в любой момент времени одинаковые значения и направления соответственно токов и ЭДС. Поэтому ток в нейтральном проводе равен утроенной сумме токов высших гармоник нулевой последовательности:

$$I_N = 3\sqrt{I_3^2 + I_9^2 + I_{15}^2 + \dots}$$

При отсутствии нейтрального провода токи в каждой из фаз не могут содержать высших гармоник, кратных трем, так как в этой схеме сумма токов в любой момент времени должна быть равна нулю. Поэтому в приемнике нет напряжений от токов нулевой последовательности, и между нейтральными точками генератора и симметричного приемника может появиться значительное напряжение, содержащее только гармоники, кратные трем.

Если фазы генератора соединены «треугольником», то при несинусоидальных ЭДС в фазах сумма ЭДС, действующих в замкнутом контуре генератора, равна утроенной сумме гармоник, кратных трем. Если включить вольтметр в рассечку треугольника, то он измерит гармоники ЭДС, кратные трем (схема разомкнутого треугольника), так как остальные гармоники в сумме дадут ноль (рис. 10). Такая схема может применяться как утроитель частоты.

Если фазы соединены в замкнутый треугольник, то гармоники, кратные трем, вызывают внутренний ток даже в режиме холостого хода. Фазные ЭДС не содержат гармоник, кратных трем, так как они компенсируются падением напряжения на внутренних сопротивлениях фазы.

Поэтому во внешней цепи токи не содержат гармоник порядка, кратного трем.

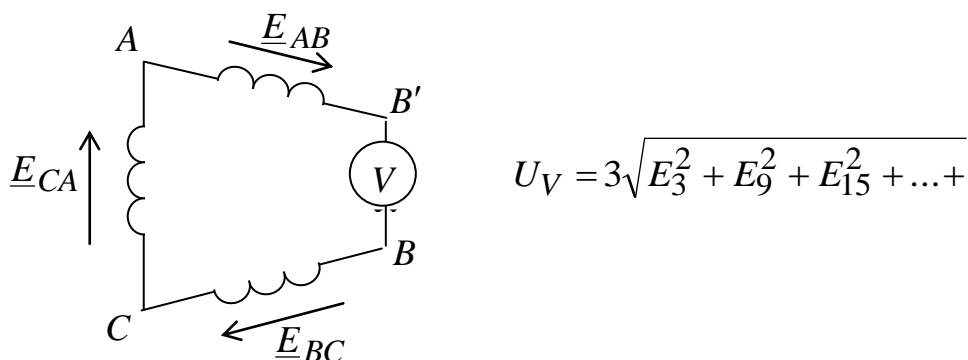


Рис. 10

Фазный ток генератора при симметричной нагрузке

$$I_\Phi = \sqrt{I_1^2 + I_3^2 + I_5^2 + I_7^2 + \dots +}$$

Линейный ток во внешней цепи

$$I_{\text{л}} = \sqrt{I_1^2 + I_5^2 + I_7^2 + \dots} < \sqrt{3}I_{\text{ф}}.$$

Пример решения задачи

Дано: напряжение фазы А – $u_A = 170\sin 314t + 113\sin(942t + \pi/6) + 70,7\sin(1570t - \pi/4)$ В, сопротивления в фазах потребителя первой гармоники $\underline{Z}_A = 30$ Ом, $\underline{Z}_B = j12$ Ом, $\underline{Z}_C = -j36$ Ом (схема на рис. 1).

Определить:

1. При замкнутом и разомкнутом рубильнике показания ваттметров, показание вольтметра на зажимах рубильника, показание амперметра в нулевом проводе и амперметра A_1 , включенного в линейный провод.

2. При замкнутом рубильнике мгновенное значение линейного напряжения u_{CA} и тока в фазе В i_B . Мгновенное значение тока в нулевом проводе i_N .

Решение:

Заданное напряжение u_A имеет три гармонические составляющие – прямой, нулевой и обратной последовательностей. Запишем мгновенные значения фазных напряжений

$$u_A = 170\sin 314t + 113\sin(942t + \pi/6) + 70,7\sin(1570t - \pi/4),$$

$$u_B = 170\sin(314t - 2\pi/3) + 113\sin(942t + \pi/6) + 70,7\sin(1570t + 5\pi/12),$$

$$u_C = 170\sin(314t + 2\pi/3) + 113\sin(942t + \pi/6) + 70,7\sin(1570t - 11\pi/12).$$

Дальнейшие вычисления ведем для каждой гармонической составляющей отдельно.

Ключ Р замкнут.

Расчет цепи под действием трехфазного напряжения первой гармоники.

Сопротивления фаз первой гармоники

$$\underline{Z}_{A1} = 30 \text{ Ом}, \underline{Z}_{B1} = j12 \text{ Ом}, \underline{Z}_{C1} = -j36 \text{ Ом}.$$

Комплексные действующие значения фазных напряжений первой гармоники

$$\underline{U}_{A1} = 120,57e^{j0^\circ} = 120,57 \text{ В}, \underline{U}_{B1} = 120,57e^{-j120^\circ} \text{ В}, \underline{U}_{C1} = 120,57e^{j120^\circ} \text{ В}.$$

Расчет фазных токов трехфазного потребителя соединенного звездой, подключенного к симметричной трехфазной сети прямой последовательности, ведется по закону Ома

$$\underline{I}_{A1} = \frac{\underline{U}_{A1}}{\underline{Z}_{A1}} = \frac{120,57}{30} = 4,019 \text{ А};$$

$$\underline{I}_{B1} = \frac{\underline{U}_{B1}}{\underline{Z}_{B1}} = \frac{120,57e^{-j120^\circ}}{j12} = 10,048e^{j150^\circ} \text{ А,}$$

$$\underline{I}_{C1} = \frac{\underline{U}_{C1}}{\underline{Z}_{C1}} = \frac{120,57e^{j120^\circ}}{-j36} = 3,349e^{-j150^\circ} \text{ А.}$$

Для расчета тока нейтрального провода применяем первый закон Кирхгофа.

$$\underline{I}_{N1} = \underline{I}_{A1} + \underline{I}_{B1} + \underline{I}_{C1} = -7,58 + j3,35 = 8,29e^{j156^\circ} \text{ А.}$$

Линейное напряжение между фазами А и В можно определить как разность напряжений этих фаз

$$\underline{U}_{AB1} = \underline{U}_{A1} - \underline{U}_{B1} = 208,5 e^{j30^\circ} \text{ В.}$$

Расчет цепи под действием трехфазного напряжения третьей гармоники.

Сопровитления фаз третьей гармоники

$$\underline{Z}_{A3} = 30 \text{ Ом, } \underline{Z}_{B3} = j36 \text{ Ом, } \underline{Z}_{C3} = -j12 \text{ Ом.}$$

Комплексные действующие значения фазных напряжений третьей гармоники

$$\underline{U}_{A3} = 80,14e^{j30^\circ} \text{ В, } \underline{U}_{B3} = 80,14e^{j30^\circ} \text{ В, } \underline{U}_{C1} = 80,14e^{j30^\circ} \text{ В.}$$

Расчет фазных токов трехфазного потребителя, соединенного звездой, подключенного к симметричной трехфазной сети нулевой последовательности, ведется по закону Ома

$$\underline{I}_{A3} = \frac{\underline{U}_{A3}}{\underline{Z}_{A3}} = \frac{80,14e^{j30^\circ}}{30} = 2,67 e^{j30^\circ} \text{ А;}$$

$$\underline{I}_{B3} = \frac{\underline{U}_{B3}}{\underline{Z}_{B3}} = \frac{80,14e^{j30^\circ}}{j36} = 2,23e^{-j60^\circ} \text{ А,}$$

$$\underline{I}_{C3} = \frac{\underline{U}_{C3}}{\underline{Z}_{C3}} = \frac{80,14e^{j30^\circ}}{-j12} = 6,68e^{j120^\circ} \text{ А.}$$

Для расчета тока нейтрального провода применяем первый закон Кирхгофа.

$$\underline{I}_{N3} = \underline{I}_{A3} + \underline{I}_{B3} + \underline{I}_{C3} = 0,085 + j5,195 = 5,196e^{j89^\circ} \text{ А.}$$

Линейное напряжение между фазами А и В третьей гармоники

$$\underline{U}_{AB3} = \underline{U}_{A3} - \underline{U}_{B3} = 0.$$

Расчет цепи под действием трехфазного напряжения пятой гармоники.

Сопровитления фаз пятой гармоники

$$\underline{Z}_{A1} = 30 \text{ Ом, } \underline{Z}_{B1} = j60 \text{ Ом, } \underline{Z}_{C1} = -j7,2 \text{ Ом.}$$

Комплексные действующие значения фазных напряжений пятой гармоники

$$\underline{U}_{A5} = 50,14e^{-j45^\circ} \text{ В}, \underline{U}_{B5} = 50,14e^{j75^\circ} \text{ В}, \underline{U}_{C5} = 50,14e^{-j165^\circ} \text{ В}.$$

Расчет фазных токов трехфазного потребителя, соединенного звездой, подключенного к симметричной трехфазной сети обратной последовательности, ведется по закону Ома

$$\underline{I}_{A5} = \frac{\underline{U}_{A5}}{\underline{Z}_{A5}} = \frac{50,14e^{-j45^\circ}}{30} = 1,67e^{-j45^\circ} \text{ А};$$

$$\underline{I}_{B5} = \frac{\underline{U}_{B5}}{\underline{Z}_{B5}} = \frac{50,14e^{j75^\circ}}{j60} = 0,84e^{-j15^\circ} \text{ А},$$

$$\underline{I}_{C5} = \frac{\underline{U}_{C5}}{\underline{Z}_{C5}} = \frac{50,14e^{-j165^\circ}}{-j7,2} = 6,96e^{-j75^\circ} \text{ А}.$$

Для расчета тока нейтрального провода применяем первый закон Кирхгофа.

$$\underline{I}_{N5} = \underline{I}_{A5} + \underline{I}_{B5} + \underline{I}_{C5} = 3,79 - j8,13 = 8,97e^{-j65^\circ} \text{ А}.$$

Линейное напряжение между фазами А и В можно определить как разность напряжений этих фаз

$$\underline{U}_{AB5} = \underline{U}_{A5} - \underline{U}_{B5} = 86,8 e^{-j75^\circ} \text{ В}.$$

Показание амперметра в нейтральном проводе A_0

$$I_N = \sqrt{I_{N1}^2 + I_{N3}^2 + I_{N5}^2} = 13,27 \text{ А}.$$

Показание амперметра в фазе A_1

$$I_A = \sqrt{I_{A1}^2 + I_{A3}^2 + I_{A5}^2} = 5,1 \text{ А}.$$

Показание вольтметра при замкнутом ключе составит ноль.

Показания ваттметров

$$\begin{aligned} P_1 &= U_{A1}I_{N1} \cos(\varphi_{A1} + 180^\circ) + U_{A3}I_{N3} \cos(\varphi_{A3} + 180^\circ) + U_{A5}I_{N5} \cos(\varphi_{A5} + 180^\circ) \\ &= 120,57 \cdot 8,29 \cos(0^\circ - 156^\circ + 180^\circ) + 80,14 \cdot 5,196 \cos(30^\circ - 89^\circ + 180^\circ) + \\ &\quad 50,14 \cdot 8,97 \cos(-45^\circ + 65^\circ + 180^\circ) = 276 \text{ Вт}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_2 &= U_{AB1}I_{N1} \cos(\varphi_{AB1}) + U_{AB3}I_{N3} \cos(\varphi_{AB3}) + U_{AB5}I_{N5} \cos(\varphi_{AB5}) = \\ &= 208,5 \cdot 8,29 \cos(30^\circ - 156^\circ) + 86,8 \cdot 8,97 \cos(-75^\circ + 65^\circ) = -249 \text{ Вт}. \end{aligned}$$

Запишем мгновенное значение тока в фазе В

$$i_B(t) = 14,17 \sin(314t + 150^\circ) + 3,14 \sin(942t - 60^\circ) + 1,18 \sin(1578t - 15^\circ) \text{ А}.$$

Мгновенное значение линейного напряжения

$$u_{AB}(t) = 293,99 \sin(314t + 150^\circ) + 122,39 \sin(1578t + 45^\circ) \text{ В}.$$

Мгновенное значение тока в нейтральном проводе

$$i_N(t) = 11,69 \sin(314t + 156^\circ) + 7,33 \sin(942t + 89^\circ) + 12,65 \sin(1578t - 65^\circ) \text{ А}.$$

Ключ разомкнут.

Расчет цепи под действием трехфазного напряжения первой гармони-

ки.

В трехпроводной трехфазной цепи, соединенной звездой, между нейтральными точками возникает напряжение смещения. Напряжение смещения рассчитывается методом двух узлов

$$\underline{U}_{nN1} = \frac{\frac{\underline{U}_{A1}}{\underline{Z}_{A1}} + \frac{\underline{U}_{B1}}{\underline{Z}_{B1}} + \frac{\underline{U}_{C1}}{\underline{Z}_{C1}}}{\frac{1}{\underline{Z}_{A1}} + \frac{1}{\underline{Z}_{B1}} + \frac{1}{\underline{Z}_{C1}}} = \frac{\frac{120,57}{30} + \frac{120,57e^{-j120^\circ}}{j12} + \frac{120,57e^{j120^\circ}}{-j36}}{\frac{1}{30} + \frac{1}{j12} + \frac{1}{-j36}} =$$

$$= -105,59 - j74,47 = 129,21e^{-j145^\circ} \text{ В.}$$

Запишем закон Ома для расчета токов в фазах с учетом напряжения смещения

$$\underline{I}_{A1} = \frac{\underline{U}_{A1} - \underline{U}_{nN1}}{\underline{Z}_{A1}} = \frac{120,57 + 105,59 + j74,47}{30} = 7,54 + j2,48 = 7,94e^{j18^\circ} \text{ А,}$$

$$\underline{I}_{B1} = \frac{\underline{U}_{B1} - \underline{U}_{nN1}}{\underline{Z}_{B1}} = \frac{120,57e^{-j120^\circ} + 105,59 + j74,47}{30} =$$

$$= \frac{-60,29 - j104,42 + 105,95 + j74,47}{30} = -2,5 - j3,78 = 4,53e^{-j123^\circ} \text{ А,}$$

$$\underline{I}_{C1} = \frac{\underline{U}_{C1} - \underline{U}_{nN1}}{\underline{Z}_{C1}} = \frac{120,57e^{j120^\circ} + 105,59 + j74,47}{j12} =$$

$$= \frac{-60,29 + j104,42 + 105,52 + j74,47}{j12} = -4,97 + j1,26 = 5,13e^{j166^\circ} \text{ А.}$$

Расчет цепи под действием трехфазного напряжения третьей гармоники.

Токи в фазах трехпроводной трехфазной цепи, соединенной звездой, не содержат гармоник, кратных трем. Напряжение смещения нейтрали равно фазному напряжению

$$\underline{U}_{nN3} = \underline{U}_{\phi3} = 80,14e^{j30^\circ} \text{ В.}$$

Расчет цепи под действием трехфазного напряжения пятой гармоники.

$$\underline{U}_{nN5} = \frac{\frac{\underline{U}_{A5}}{\underline{Z}_{A5}} + \frac{\underline{U}_{B5}}{\underline{Z}_{B5}} + \frac{\underline{U}_{C5}}{\underline{Z}_{C5}}}{\frac{1}{\underline{Z}_{A5}} + \frac{1}{\underline{Z}_{B5}} + \frac{1}{\underline{Z}_{C5}}} = \frac{\frac{50,14e^{-j45^\circ}}{30} + \frac{50,14e^{j75^\circ}}{j60} + \frac{50,14e^{-j165^\circ}}{-j7,2}}{\frac{1}{30} + \frac{1}{j60} + \frac{1}{-j7,2}} =$$

$$= -53,95 - j74,4745,29 = 70,44e^{-j140^\circ} \text{ В,}$$

$$\begin{aligned} \underline{I}_{A5} &= \frac{\underline{U}_{A5} - \underline{U}_{nN5}}{\underline{Z}_{A5}} = \frac{50,14e^{-j45^\circ} + 53,45 + j45,29}{30} = \\ &= \frac{35,45 - j35,45 + 53,45 + j45,29}{30} = 2,98 + j0,33 = 2,99e^{j6^\circ} \text{ A}, \\ \underline{I}_{B5} &= \frac{\underline{U}_{B5} - \underline{U}_{nN5}}{\underline{Z}_{B5}} = \frac{50,14e^{j75^\circ} + 53,45 + j45,29}{j60} = \\ &= \frac{12,98 + j48,43 + 53,45 + j45,29}{j60} = 1,56 - j1,12 = 1,92e^{-j35^\circ} \text{ A}, \\ \underline{I}_{C5} &= \frac{\underline{U}_{C5} - \underline{U}_{nN5}}{\underline{Z}_{C5}} = \frac{50,14e^{-j165^\circ} + 53,45 + j45,29}{-j7,2} = \\ &= \frac{-48,43 - j12,98 + 53,45 + j45,29}{-j7,2} = -4,49 + j0,77 = 4,56e^{j170^\circ} \text{ A}. \end{aligned}$$

Из расчета цепи при разомкнутом ключе запишем показания приборов. Показания амперметра в нейтральном проводе, а также первого и второго ваттметров, составят ноль.

Показание амперметра в фазе А

$$I_A = \sqrt{I_{A1}^2 + I_{A5}^2} = \sqrt{7,94^2 + 2,99^2} \approx 8,5 \text{ A}.$$

Показание вольтметра между нейтральными точками

$$U_{nN} = \sqrt{U_{nN1}^2 + U_{nN3}^2 + U_{nN5}^2} = \sqrt{129,21^2 + 80,14^2 + 70,44^2} \approx 167,6 \text{ В}.$$

ПЕРЕХОДНЫЕ ПРОЦЕССЫ В ЛИНЕЙНЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЯХ

Установившимся называется процесс, который может протекать длительно, не меняя своего характера. На рис. 11 показаны примеры постоянного тока (а), синусоидального тока (б) и несинусоидального перио-

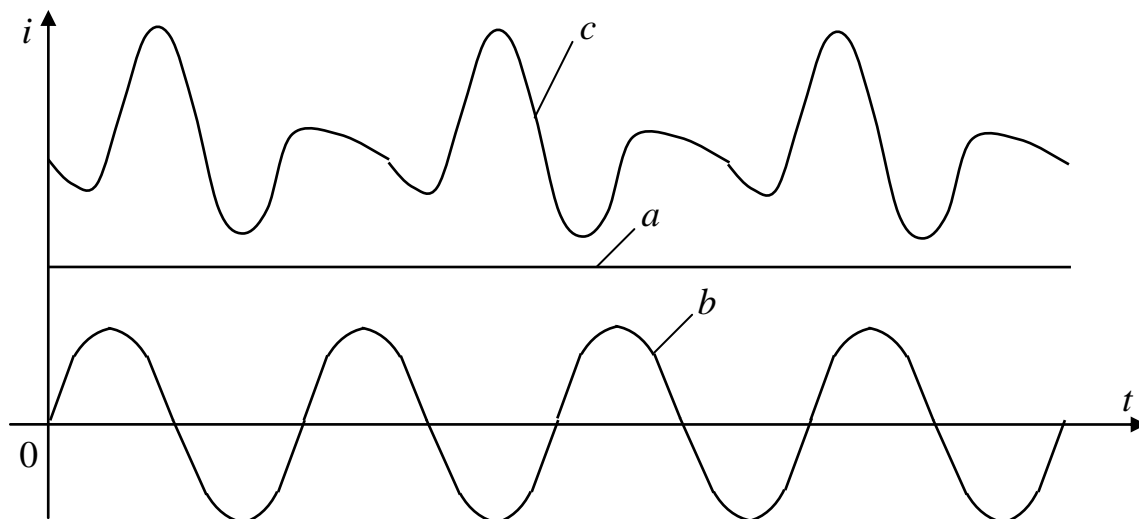


Рис. 11

дического тока (c).

Переходным называется процесс между двумя установившимися режимами, связанный с инерционностью элементов. Переходные процессы возникают при коммутации цепи, т.е. при подключении и отключении ее от источника электроэнергии, при скачкообразном изменении конфигурации цепи или значений ее параметров.

На рис. 12 показан переходный процесс при подключении цепи RL к источнику постоянного напряжения.

Ток i и напряжение на катушке индуктивности u_L изменяются по законам

$$i = \frac{U}{R} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right), \quad u_L = U e^{-\frac{t}{\tau}}, \quad \tau = \frac{L}{R}.$$

На рис. 13 представлен переходный процесс в RC -цепи при ее подключении к источнику постоянного напряжения.

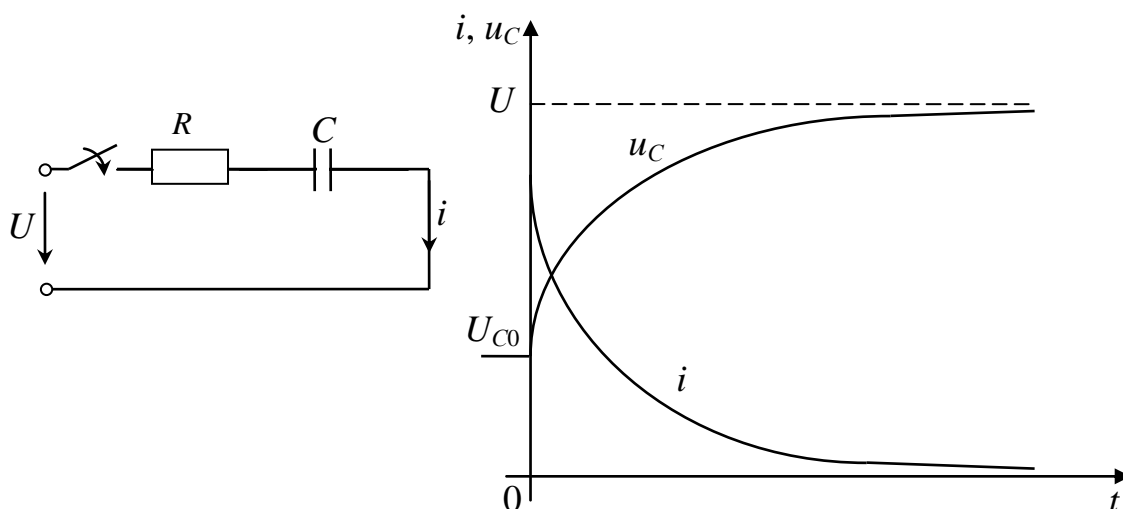


Рис.13

Ток i и напряжение на конденсаторе u_C изменяются по законам

$$i = \frac{U - U_{C0}}{R} e^{-\frac{t}{\tau}}, \quad u_C = U - (U - U_{C0}) e^{-\frac{t}{\tau}}, \quad \tau = RC.$$

В основе расчета переходных процессов лежат законы коммутации. Первый закон коммутации: в момент коммутации ток в цепи с катушкой индуктивности не меняется скачком. Второй закон коммутации: в момент коммутации напряжение на конденсаторе не меняется скачком. Математически законы коммутации записывают в виде

$$i_L(-0) = i_L(+0), \quad u_C(-0) = u_C(+0).$$

Классический метод расчета переходных процессов можно разбить на этапы.

1. Расчет цепи до коммутации в установившемся режиме для определения начальных значений $i_L(0)$, $u_C(0)$.

2. Расчет цепи после коммутации в установившемся режиме. Определение принужденной составляющей искомого тока $i'(t)$.

3. Составление системы дифференциальных уравнений по I и II законам Кирхгофа относительно мгновенных значений токов цепи. При этом используются равенства:

$$u_R = i_R R, u_L = L \frac{di_L}{dt}, u_C = \frac{1}{C} \int i_C dt.$$

4. Составление характеристического уравнения для системы однородных дифференциальных уравнений методом приведения к одному уравнению высокого порядка, методом определителя или методом операторного сопротивления (проводимости).

5. Решение характеристического уравнения и запись свободной составляющей искомого тока в виде, содержащем неизвестные постоянные A_1 и A_2 (для цепи с двумя реактивными элементами)

$$i'' = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t}, i'' = e^{p_1 t} (A_1 t + A_2), i'' = e^{\sigma t} (A_1 \sin(\omega t) + A_2 \cos(\omega t)).$$

6. Определение зависимых начальных $i(+0)$, $di(+0)/dt$ условий, используя независимые $i_L(0)$, $u_C(0)$.

7. Составление уравнений и определение постоянных интегрирования A_1, A_2 , после чего искомым ток записывается в виде $i(t) = i'(t) + i''(t)$.

Этапы расчета переходных процессов *операторным методом*.

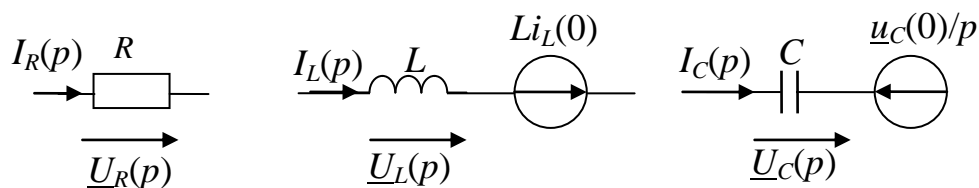
1. Расчет цепи до коммутации в установившемся режиме, определение начальных значений $i_L(0)$ и $u_C(0)$.

2. Составление системы уравнений в операторной форме с помощью системы дифференциальных уравнений и замены:

$$i(t) \rightarrow I(p), u(t) \rightarrow U(p), e(t) \rightarrow E(p),$$

$$\frac{di}{dt} \rightarrow pI(p) - i(0), \int i(t) dt \rightarrow \frac{I(p)}{p}.$$

Либо с помощью операторной схемы замещения, где элементам R, L и C соответствуют приведенные ниже схемы.



Изображения напряжений на этих схемах имеют вид:

$$U_R(p) = RI_R(p), U_L(p) = pLI_L(p) - Li_L(0), U_C(p) = I_C(p)/pC + u_C(0)/p.$$

3. Решение системы алгебраических уравнений относительно изображения искомого тока $I(p)$.

4. Переход от изображения $I(p)$ к оригиналу $i(t)$ с помощью таблицы обратного преобразования Лапласа или по теореме разложения

$$I(p) = \frac{F_1(p)}{F_2(p)} \rightarrow i(t) = \sum_{k=1}^n \frac{F_1(p_k)}{F_2'(p_k)} e^{p_k t}.$$

Переходные процессы в линейных и нелинейных электрических цепях могут быть рассчитаны *методом переменных состояния*, имеющим следующие этапы.

1. Рассчитывается цепь до коммутации в установившемся режиме, определяются начальные значения $i_L(0)$ и $u_C(0)$.

2. Составляется система уравнений по I и II законам Кирхгофа. При этом напряжения на элементах R , L и C имеют вид u_R , u_L , u_C .

3. Записываются уравнения для напряжений и токов на элементах в виде:

$$u_R = Ri_R, u_L = L \frac{di}{dt}, i_C = C \frac{du_C}{dt}.$$

4. Выражения для u_R , u_L , i_C подставляются в систему уравнений.

5. Из полученной системы исключаются все переменные, кроме переменных состояния i_L , u_C .

6. Полученная система дифференциальных уравнений представляется в нормальной форме

$$\frac{di_L}{dt} = f_1(i_L, u_C, t); \frac{du_C}{dt} = f_2(i_L, u_C, t).$$

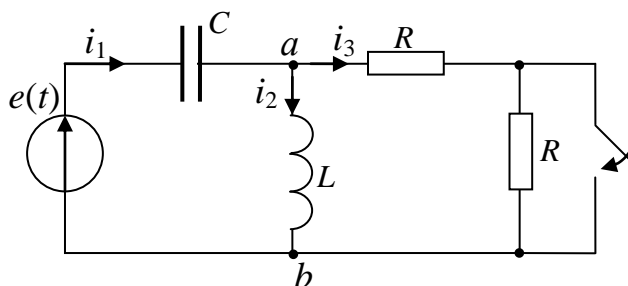
7. Последнюю систему решают аналитическим или численным методом с использованием начальных условий, найденных в п. 1.

Примеры решения задач

Задача 1.

Дано: $R = 10$ Ом, $L = 10$ мГн, $C = 50$ мкФ, $e(t) = 120\sin(500t + 60^\circ)$ В.

Найти: ток i_3



1. Рассчитать переходный процесс классическим методом.
2. Рассчитать переходный процесс операторным методом и сравнить результаты.

Решение:

Расчет переходного процесса классическим методом.

1. Рассчитать цепь до коммутации в установившемся режиме. Найдем комплексные сопротивления и проводимости:

$$\underline{Z}_L = j\omega L = j500 \cdot 10 \cdot 10^{-3} = j5 \text{ Ом}; \quad \underline{Y}_L = -j0,2 \text{ См};$$

$$\underline{Z}_C = -j \frac{1}{\omega C} = -j \frac{1}{500 \cdot 50 \cdot 10^{-6}} = -j40 \text{ Ом};$$

$$\underline{Y}_C = j0,025 \text{ См}; \quad \underline{Y}_{2R} = 0,05 \text{ См}.$$

Комплексная амплитуда ЭДС

$$\underline{E}_m = 120e^{j60^\circ} \text{ В}.$$

Методом двух узлов найдем напряжение между узлами a и b :

$$\underline{U}_{abm} = \frac{\underline{E}_m \underline{Y}_C}{\underline{Y}_{2R} + \underline{Y}_L + \underline{Y}_C} = \frac{120e^{j60^\circ} 0,025e^{j90^\circ}}{0,05 - j0,2 + j0,025} = 16,48e^{-j136^\circ} \text{ В}.$$

Теперь найдем ток \underline{I}_{Lm} и напряжение \underline{U}_{Cm} , а также начальные значения $i_L(0)$ и $u_C(0)$:

$$\underline{I}_{Lm} = \underline{U}_{abm} \underline{Y}_L = 3,30e^{-j46^\circ} \text{ А};$$

$$\begin{aligned} \underline{U}_{Cm} &= \underline{E}_m - \underline{U}_{abm} = 60 + j103,9 + 11,85 + j11,46 = \\ &= 71,85 + j115,4 = 135,9e^{j58^\circ} \text{ В}; \end{aligned}$$

$$i_L(0) = i_2(0) = 3,30 \sin(500 \cdot 0 + 46^\circ) = 2,37 \text{ А};$$

$$u_C(0) = 135,9 \sin(500 \cdot 0 + 58^\circ) = 115,4 \text{ В}.$$

2. Рассчитаем цепь после коммутации в установившемся режиме и определим принужденную составляющую тока i_3 .

$$\underline{U}'_{abm} = \frac{\underline{E}_m \underline{Y}_C}{\underline{Y}_R + \underline{Y}_L + \underline{Y}_C} = \frac{120e^{j60^\circ} 0,025e^{j90^\circ}}{0,1 - j0,2 + j0,025} = 14,88e^{-j150^\circ} \text{ В}.$$

$$\underline{I}'_{3m} = \underline{U}'_{abm} \underline{Y}_R = 1,488e^{-j150^\circ}; \quad i'_3(t) = 1,488 \sin(500t - 150^\circ) \text{ А}.$$

$$\underline{I}'_{2m} = \underline{U}'_{abm} \underline{Y}_L = 2,976e^{j120^\circ}; \quad i'_2(t) = i'_L(t) = 2,976 \sin(500t + 120^\circ) \text{ А}.$$

$$\begin{aligned} \underline{U}'_{Cm} &= \underline{E}_m - \underline{U}'_{abm} = 60 + j103,9 + 12,886 + j7,44 = \\ &= 47,11 + j96,46 = 107,35e^{j64^\circ} \text{ В}; \end{aligned}$$

$$u'_C(t) = 107,35 \sin(500t + 64^\circ) \text{ В}.$$

3. Запишем систему дифференциальных уравнений по I и II законам Кирхгофа:

$$\begin{aligned} i_1 - i_2 - i_3 &= 0; \\ \frac{1}{C} \int i_1 dt + L \frac{di_2}{dt} &= e; \end{aligned}$$

$$L \frac{di_2}{dt} - Ri_3 = 0.$$

4. Составим характеристическое уравнение методом операторного сопротивления. Для этого разорвем одну из ветвей (например, ветвь с источником ЭДС) и запишем операторное сопротивление между точками разрыва, где $j\omega = p$. Полученное выражение приравняем к нулю.

$$\underline{Z}(p) = \frac{1}{pC} + \frac{pLR}{pL + R} = 0;$$

$$RLCp^2 + Lp + R = 0.$$

5. Решим характеристическое уравнение и запишем свободную составляющую тока i''_3 . Следует отметить, что в общем случае корни характеристического уравнения одинаковы для любого из токов и напряжений цепи.

Подставляя значения параметров цепи, получаем уравнение

$$10 \cdot 10 \cdot 10^{-3} \cdot 50 \cdot 10^{-6} + 10 \cdot 10^{-3} p + 10 = 0;$$

$$10^{-6} p^2 + 2 \cdot 10^{-3} p + 2 = 0.$$

Уравнение имеет комплексные корни, так как выполняется условие

$$D < 0 \text{ или } R < 2\sqrt{L/C}.$$

$$p_{1,2} = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{c}{a} - \left(\frac{b}{2a}\right)^2} = -\delta \pm j\omega' = -1000 \pm j1000 \text{ с}^{-1}.$$

Этим корням соответствует свободная составляющая тока

$$i''_3 = e^{-\delta t} (A_1 \sin \omega' t + A_2 \cos \omega' t) = e^{-1000t} (A_1 \sin 1000t + A_2 \cos 1000t),$$

где A_1 и A_2 – постоянные интегрирования.

6. Используя независимые начальные условия, рассчитанные в п.1:

$$i_L(0) = i_2(0) = 2,37 \text{ А, } u_C(0) = 115,4 \text{ В,}$$

определим зависимые начальные условия: $i_3(0), \frac{di_3(0)}{dt}$.

Для этого рассмотрим уравнения цепи, записанные по законам Кирхгофа, в нулевой момент времени.

Из уравнения по II закону Кирхгофа для внешнего контура

$$u_C(0) + Ri_3(0) = e(0)$$

получаем

$$i_3(0) = \frac{e(0) - u_C(0)}{R}.$$

Дифференцируем приведенное уравнение, с учетом, что

$$u_C(t) = \frac{1}{C} \int i_1 dt,$$

получим

$$\frac{di_3(0)}{dt} = \frac{de(0)/dt - i_1(0)/C}{R}.$$

По I закону Кирхгофа $i_1 = i_2 + i_3$, тогда

$$\frac{di_3(0)}{dt} = \frac{de(0)/dt - (i_2(0) + i_3(0))/C}{R}.$$

Подставим начальные значения $i_L(0) = i_2(0) = 2,37$ А, $u_C(0) = 115,4$ В, $e(0) = 103,92$ В, $de(0)/dt = 30000$ В/с и рассчитаем

$$i_3(0) = -1,146 \text{ А}, \quad di_3(0)/dt = 554,8 \text{ А/с}.$$

7. Для расчета постоянных интегрирования составим систему из двух уравнений

$$\begin{aligned} i_3(t) &= i_3' + i_3'' \\ \frac{di_3}{dt} &= \frac{di_3'}{dt} + \frac{di_3''}{dt} \end{aligned}$$

или

$$i_3 = 1,488\sin(500t - 150^\circ) + e^{-1000t}(A_1\sin 1000t + A_2\cos 1000t)$$

$$\frac{di_3}{dt} = 1,488 \cdot 500\cos(500t - 150^\circ) +$$

$$+ 1000e^{-1000t}((A_2 - A_1)\sin 1000t + (A_1 - A_2)\cos 1000t).$$

Рассмотрим эту систему при $t = 0$.

$$i_3(0) = -1,488\sin 150^\circ + A_2 = -1,146;$$

$$\frac{di_3(0)}{dt} = 744\cos 150^\circ + 1000(A_1 - A_2) = 554,8.$$

Решая эту систему линейных алгебраических уравнений, находим значения постоянных интегрирования:

$$A_1 = 0,801 \text{ А}, \quad A_2 = -0,395 \text{ А}.$$

Теперь можно записать выражение для тока i_3 :

$$\begin{aligned} i_3(t) &= 1,488\sin(500t - 150^\circ) + e^{-1000t}(0,801\sin 1000t - 0,395\cos 1000t) = \\ &= 1,488\sin(500t - 150^\circ) + 0,893e^{-1000t}\sin(1000t - 26^\circ) \text{ А}. \end{aligned}$$

Чтобы начертить график тока $i_3(t)$ и его составляющих, нужно определить интервал времени, на котором можно просмотреть полный период синусоиды принужденной составляющей и затухание свободной составляющей. Для этого найдем период принужденной составляющей и 5 постоянных времени экспоненты, входящей в свободную составляющую:

$$T = 2\pi/500 = 0,01257 \text{ с};$$

$$5\tau = 5/1000 = 0,005.$$

Примем интервал времени в 15 мс.

Расчет переходного процесса операторным методом

1. Расчет цепи до коммутации проводится аналогично расчету классическим методом. Результат вычислений – независимые начальные условия

$$i_L(0) = i_2(0) = 2,37 \text{ А}, u_C(0) = 115,4 \text{ В}.$$

2. Составим систему дифференциальных уравнений аналогично п. 3 классического метода:

$$\begin{aligned} i_1 - i_2 - i_3 &= 0; \\ \frac{1}{C} \int i_1 dt + L \frac{di_2}{dt} &= e; \\ L \frac{di_2}{dt} - Ri_3 &= 0. \end{aligned}$$

Произведя замену

$$\begin{aligned} i(t) &\rightarrow I(p); e(t) \rightarrow E(p); \\ di/dt &\rightarrow pI(p) - i(0); \\ \int idt &\rightarrow I(p)/p, \end{aligned}$$

Получим систему уравнений в операторной форме:

$$\begin{aligned} I_1(p) - I_2(p) - I_3(p) &= 0; \\ I_1(p)/Cp + u_C(0)/p + LpI_2(p) - Li_L(0) &= E(p); \\ LpI_2(p) - Li_L(0) - RI_3(p) &= 0. \end{aligned}$$

Поскольку принужденный режим не является переходным процессом, расчет принужденной составляющей проводится аналогично расчету классическим методом. Решаем полученную систему алгебраических уравнений относительно изображения свободной составляющей $I_3''(p)$, получаем выражение

$$I_3''(p) = \frac{-Li_L''(0) - LCpu_C''(0)}{RLCp^2 + Lp + R} = \frac{F_1(p)}{F_2(p)}.$$

Определим свободные составляющие тока $i_L''(0)$ и напряжения $u_C''(0)$

$$\begin{aligned} i_L''(0) &= i_L(0) - i_L'(0), \\ u_C''(0) &= u_C(0) - u_C'(0). \end{aligned}$$

Принужденные составляющие $i_L'(t)$ и $u_C'(t)$ рассчитаны в п. 2. Рассмотрим момент времени $t = 0$ и получим

$$i_L'(0) = 2,578 \text{ А}, u_C'(0) = 96,486 \text{ В}.$$

Тогда

$$i_L''(0) = 2,37 - 2,578 = -0,21 \text{ А}, u_C''(0) = 115,4 - 96,486 = 18,91 \text{ В}.$$

Теперь продифференцируем знаменатель полученного выражения, помножим на экспоненту e^{pt} , подставим вместо p один из корней характеристического уравнения. Удвоенная вещественная часть полученной функции дает свободную составляющую тока $i_3(t)$:

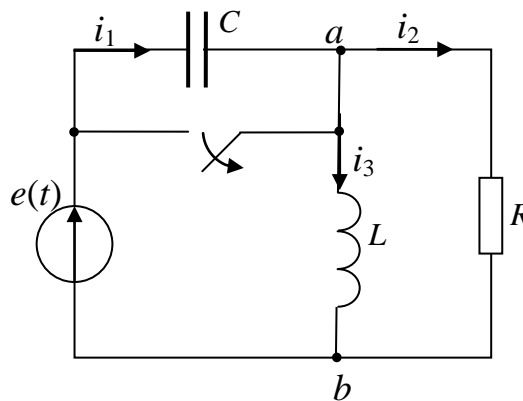
$$\begin{aligned}
 i_3''(t) &= 2 \operatorname{Re} \left\{ \frac{F_1(-1000 + j1000)}{F_2'(-1000 + j1000)} e^{(-1000 + j1000)t} \right\} = \\
 &= 2 \operatorname{Re} \left\{ (-0,197 - j0,4) e^{-1000t} (\cos 1000t + j \sin 1000t) \right\} = \\
 &= e^{-1000t} (0,801 \sin 1000t - 0,395 \cos 1000t)
 \end{aligned}$$

Далее найдем ток $i_3(t)$ как сумму принужденной и свободной составляющих

$$i_3(t) = 1,488 \sin(500t - 150^\circ) + e^{-1000t} (0,801 \sin 1000t - 0,395 \cos 1000t) \text{ А.}$$

Задача 2

Дано: $R = 5 \text{ Ом}$, $L = 10 \text{ мГн}$, $C = 100 \text{ мкФ}$, $e(t) = 100 \sin(500t + 30^\circ) \text{ В}$.



Найти: ток i_2 .

1. Рассчитать переходный процесс классическим методом.
2. Рассчитать переходный процесс операторным методом и сравнить результаты.

Решение:

Расчет переходного процесса классическим методом.

1. Рассчитать цепь до коммутации в установившемся режиме. Найдем комплексные сопротивления и проводимости:

$$\underline{Z}_L = j\omega L = j500 \cdot 10 \cdot 10^{-3} = j5 \text{ Ом}; \quad \underline{Y}_L = -j0,2 \text{ См};$$

$$\underline{Z}_C = -j \frac{1}{\omega C} = -j \frac{1}{500 \cdot 100 \cdot 10^{-6}} = -j20 \text{ Ом};$$

$$\underline{Y}_C = j0,05 \text{ См}; \quad \underline{Y}_R = 0,2 \text{ См}.$$

Комплексная амплитуда ЭДС

$$\underline{E}_m = 100 e^{j30^\circ} \text{ В.}$$

Считаем, что емкость была разряжена, тогда по закону коммутации

$$u_C(0) = 0.$$

Теперь найдем ток \underline{I}_{Lm} , а также начальные значения $i_L(0)$.

$$\underline{I}_{Lm} = \underline{E}_m \underline{Y}_L = 20e^{-j60^\circ} \text{ A};$$

$$i_L(0) = i_3(0) = 20\sin(500 \cdot 0 - 60^\circ) = -17,3 \text{ A};$$

2. Рассчитаем цепь после коммутации в установившемся режиме и определим принужденную составляющую тока i_3 .

$$\underline{U}'_{abm} = \frac{\underline{E}_m \underline{Y}_C}{\underline{Y}_R + \underline{Y}_L + \underline{Y}_C} = \frac{100e^{j30^\circ} 0,05e^{j90^\circ}}{0,2 - j0,2 + j0,05} = 20e^{j157^\circ} \text{ В.}$$

$$\underline{I}'_{2m} = \underline{U}'_{abm} \underline{Y}_R = 4e^{j157^\circ}; i'_3(t) = 4\sin(500t + 157^\circ) \text{ А.}$$

$$\underline{I}'_{3m} = \underline{U}'_{abm} \underline{Y}_L = 4e^{j67^\circ}; i'_3(t) = i'_L(t) = 4\sin(500t + 67^\circ) \text{ А.}$$

$$\begin{aligned} \underline{U}'_{Cm} &= \underline{E}_m - \underline{U}'_{abm} = 86,6 + j50 + 18,4 - j7,8 = \\ &= 104,77 + j42,33 = 113e^{j22^\circ} \text{ В;} \end{aligned}$$

$$u'_C(t) = 113\sin(500t + 22^\circ).$$

3. Запишем систему дифференциальных уравнений по I и II законам Кирхгофа:

$$\begin{aligned} i_1 - i_2 - i_3 &= 0; \\ \frac{1}{C} \int i_1 dt + L \frac{di_3}{dt} &= e; \\ L \frac{di_3}{dt} - Ri_2 &= 0. \end{aligned}$$

4. Составим характеристическое уравнение методом операторного сопротивления. Для этого разорвем одну из ветвей (например, ветвь с источником ЭДС) и запишем операторное сопротивление между точками разрыва, где $j\omega = p$. Полученное выражение приравняем к нулю.

$$\underline{Z}(p) = \frac{1}{pC} + \frac{pLR}{pL + R} = 0;$$

$$RLCp^2 + Lp + R = 0.$$

5. Решим характеристическое уравнение и запишем свободную составляющую тока i''_3 . Следует отметить, что в общем случае корни характеристического уравнения одинаковы для любого из токов и напряжений цепи.

Подставляя значения параметров цепи, получаем уравнение

$$5 \cdot 10^{-3} \cdot 100 \cdot 10^{-6} + 10 \cdot 10^{-3} p + 5 = 0;$$

$$5 \cdot 10^{-6} p + 10^{-2} p + 5 = 0.$$

Уравнение имеет два равных корня, так как выполняется условие

$$D = 0 \text{ или } R = 2\sqrt{L/C}.$$

$$p_{1,2} = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{c}{a} - \left(\frac{b}{2a}\right)^2} = -1000 \text{ с}^{-1}.$$

Этим корням соответствует свободная составляющая тока

$$i''_2 = e^{-pt}(tA_1 + A_2) = e^{-1000t}(tA_1 + A_2),$$

где A_1 и A_2 – постоянные интегрирования.

6. Используя независимые начальные условия, рассчитанные в п. 1:

$$i_L(0) = i_3(0) = -17,3 \text{ А}, u_C(0) = 0 \text{ В},$$

определим зависимые начальные условия: $i_2(0), \frac{di_2(0)}{dt}$.

Для этого рассмотрим уравнения цепи, записанные по законам Кирхгофа, в нулевой момент времени.

Из уравнения по II закону Кирхгофа для внешнего контура

$$u_C(0) + Ri_2(0) = e(0)$$

получаем

$$i_2(0) = \frac{e(0) - u_C(0)}{R}.$$

Дифференцируем приведенное уравнение, с учетом, что

$$u_C(t) = \frac{1}{C} \int i_1 dt,$$

получим

$$\frac{di_2(0)}{dt} = \frac{de(0)/dt - i_1(0)/C}{R}.$$

По I закону Кирхгофа $i_1 = i_2 + i_3$, тогда

$$\frac{di_2(0)}{dt} = \frac{de(0)/dt - (i_2(0) + i_3(0))/C}{R}.$$

Подставим начальные значения $i_L(0) = i_3(0) = -17,3 \text{ А}, u_C(0) = 0 \text{ В}, e(0) = 50 \text{ В}, de(0)/dt = 43301 \text{ В/с}$ и рассчитаем

$$i_2(0) = 10 \text{ А}, di_2(0)/dt = 23301 \text{ А/с}.$$

7. Для расчета постоянных интегрирования составим систему из двух уравнений:

$$\begin{aligned} i_2(t) &= i'_2 + i''_2 \\ \frac{di_2}{dt} &= \frac{di'_2}{dt} + \frac{di''_2}{dt} \end{aligned}$$

или

$$i_2 = 4\sin(500t + 157^\circ) + e^{-1000t}(A_1t + A_2)$$

$$\frac{di_2}{dt} = 4 \cdot 500\cos(500t + 157^\circ) + A_1e^{-1000t} - 1000e^{-1000t}(A_1t + A_2)$$

Рассмотрим эту систему при $t = 0$

$$i_2(0) = 4 \cdot 500\sin 157^\circ + A_2;$$

$$\frac{di_2(0)}{dt} = 4 \cdot 500\cos 157^\circ + A_1 - 1000A_2.$$

Решая эту систему линейных алгебраических уравнений, находим значения постоянных интегрирования:

$$A_1 = 33582 \text{ A}, A_2 = 8,44 \text{ A}.$$

Теперь можно записать выражение для тока i_2 :

$$i_2(t) = 4\sin(500t + 157^\circ) + e^{-1000t}(33582t + 8,44) \text{ A}.$$

Расчет переходного процесса операторным методом.

1. Расчет цепи до коммутации проводится аналогично расчету классическим методом. Результат вычислений – независимые начальные условия

$$i_L(0) = i_3(0) = -17,3 \text{ A}, u_C(0) = 0 \text{ В}.$$

2. Составим систему дифференциальных уравнений аналогично п. 3 классического метода:

$$\begin{aligned} i_1 - i_2 - i_3 &= 0; \\ \frac{1}{C} \int i_1 dt + L \frac{di_3}{dt} &= e; \\ L \frac{di_3}{dt} - Ri_2 &= 0. \end{aligned}$$

Произведя замену

$$\begin{aligned} i(t) &\rightarrow I(p); e(t) \rightarrow E(p); \\ di/dt &\rightarrow pI(p) - i(0); \\ \int i dt &\rightarrow I(p)/p, \end{aligned}$$

получим систему уравнений в операторной форме:

$$\begin{aligned} I_1(p) - I_2(p) - I_3(p) &= 0 \\ I_1(p)/Cp + u_C(0)/p + LpI_3(p) - Li_L(0) &= E(p) \\ LpI_3(p) - Li_L(0) - RI_2(p) &= 0. \end{aligned}$$

Поскольку принужденный режим не является переходным процессом, расчет принужденной составляющей проводится аналогично расчету классическим методом. Решаем полученную систему алгебраических уравнений относительно изображения свободной составляющей $I_2''(p)$, получаем выражение

$$I_2''(p) = \frac{-Li_L''(0) - LCpu_C''(0)}{RLCp^2 + Lp + R} = \frac{F_1(p)}{F_2(p)}.$$

Определим свободные составляющие тока $i_L''(0)$ и напряжения $u_C''(0)$

$$\begin{aligned} i_L''(0) &= i_L(0) - i_L'(0), \\ u_C''(0) &= u_C(0) - u_C'(0). \end{aligned}$$

Принужденные составляющие $i_L'(t)$ и $u_C'(t)$ рассчитаны п. 2. Рассмотрим момент времени $t = 0$ и получим

$$i_L'(0) = 3,68 \text{ A}, u_C'(0) = 42,43 \text{ В}.$$

Тогда

$$i_L''(0) = -17,3 - 3,68 = -20,98 \text{ А}, u_C''(0) = 0 - 42,43 = -42,43 \text{ В}.$$

Подставим полученные значения $i_L''(0)$ и $u_C''(0)$ в уравнение для изображения тока $I_2''(p)$. При помощи предварительных преобразований подведем выражение к табличному.

$$\begin{aligned} I_2''(p) &= \frac{41960 + 8,47p}{p^2 + 1000p + 1000^2} = \frac{41960 + (8,47p + 8,47 \cdot 1000) - 8,47 \cdot 1000}{(p + 1000)^2} = \\ &= \frac{33490 + 8,47(p + 1000)}{(p + 1000)^2} = \frac{33490}{(p + 1000)^2} + \frac{8,47}{(p + 1000)}. \end{aligned}$$

Пользуясь таблицей, для перехода от изображения к оригиналу, запишем $i_2''(t)$

$$i_2''(t) = e^{-1000t}(33490t + 8,47) \text{ А}.$$

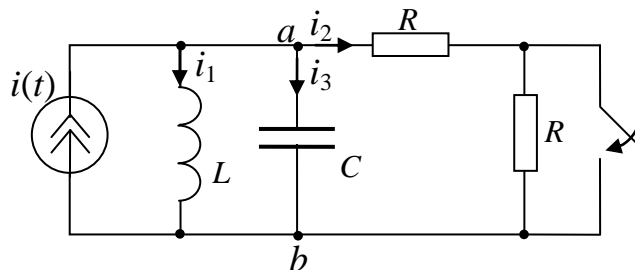
Далее найдем ток $i_2(t)$ как сумму принужденной и свободной составляющих

$$I_2(t) = 4\sin(500t + 157^\circ) + e^{-1000t}(33490t + 8,47) \text{ А}.$$

Задача 3

Дано: $R = 20 \text{ Ом}$, $L = 50 \text{ мГн}$, $C = 30 \text{ мкФ}$, $i(t) = 5\sin(500t + 60^\circ) \text{ В}$.

Найти: ток i_3 .



1. Рассчитать переходный процесс классическим методом.
2. Рассчитать переходный процесс операторным методом и сравнить результаты.

Решение:

Расчет переходного процесса классическим методом.

1. Рассчитать цепь до коммутации в установившемся режиме. Найдем комплексные сопротивления и проводимости:

$$\underline{Z}_L = j\omega L = j500 \cdot 50 \cdot 10^{-3} = j25 \text{ Ом}; \underline{Y}_L = -j0,04 \text{ См};$$

$$\underline{Z}_C = -j \frac{1}{\omega C} = -j \frac{1}{500 \cdot 30 \cdot 10^{-6}} = -j66,67 \text{ Ом};$$

$$\underline{Y}_C = j0,015 \text{ См}; \underline{Y}_{2R} = 0,025 \text{ См}.$$

Комплексная амплитуда тока источника

$$I_m = 5e^{j60^\circ} \text{ В.}$$

Методом двух узлов найдем напряжение между узлами a и b :

$$\underline{U}_{abm} = \frac{\underline{I}_m}{\underline{Y}_{2R} + \underline{Y}_L + \underline{Y}_C} = \frac{5e^{j60^\circ}}{0,025 - j0,04 + j0,015} = 142,86e^{j105^\circ} \text{ В.}$$

Теперь найдем ток \underline{I}_{Lm} и напряжение \underline{U}_{Cm} , а также начальные значения $i_L(0)$ и $u_C(0)$:

$$\underline{I}_{Lm} = \underline{U}_{abm}\underline{Y}_L = 5,71e^{j15^\circ} \text{ А;}$$

$$\underline{U}_{Cm} = \underline{U}_{abm} = 142,86e^{j105^\circ} \text{ В;}$$

$$i_L(0) = i_1(0) = 5,71\sin(500 \cdot 0 + 15^\circ) = 1,478 \text{ А;}$$

$$u_C(0) = 142,86\sin(500 \cdot 0 + 105^\circ) = 138 \text{ В.}$$

2. Рассчитаем цепь после коммутации в установившемся режиме и определим принужденную составляющую тока i_3 .

$$\underline{U}'_{abm} = \frac{\underline{I}_m}{\underline{Y}_R + \underline{Y}_L + \underline{Y}_C} = \frac{5e^{j60^\circ}}{0,05 - j0,04 + j0,015} = 89,28e^{j87^\circ} \text{ В.}$$

$$\underline{I}'_{2m} = \underline{U}'_{abm}\underline{Y}_R = 4,464e^{j87^\circ}; i'_2(t) = 4,464\sin(500t + 87^\circ) \text{ А.}$$

$$\underline{I}'_{1m} = \underline{U}'_{abm}\underline{Y}_L = 3,576e^{-j3^\circ}; i'_1(t) = i'_L(t) = 3,5766\sin(500t - 3^\circ) \text{ А.}$$

$$\underline{U}'_{Cm} = \underline{U}'_{abm} = 89,28e^{j87^\circ} \text{ В;}$$

$$u'_C(t) = 89,28\sin(500t + 87^\circ) \text{ В.}$$

3. Запишем систему дифференциальных уравнений по I и II законам Кирхгофа:

$$i - i_1 - i_2 - i_3 = 0$$

$$\frac{1}{C} \int i_3 dt - L \frac{di_1}{dt} = 0$$

$$L \frac{di_1}{dt} - Ri_2 = 0$$

4. Составим характеристическое уравнение методом операторного сопротивления. Для этого разорвем одну из ветвей (например, ветвь с источником ЭДС) и запишем операторное сопротивление между точками разрыва, где $j\omega = p$. Полученное выражение приравняем к нулю.

$$\underline{Z}(p) = \frac{1}{pC} + \frac{pLR}{pL + R} = 0;$$

$$RLCp^2 + Lp + R = 0.$$

5. Решим характеристическое уравнение и запишем свободную составляющую тока i''_2 . Следует отметить, что в общем случае корни характеристического уравнения одинаковы для любого из токов и напряжений цепи.

Подставляя значения параметров цепи, получаем уравнение

$$20 \cdot 50 \cdot 10^{-3} \cdot 30 \cdot 10^{-6} + 50 \cdot 10^{-3} p + 20 = 0$$

$$30^{-6} p + 50 \cdot 10^{-3} p + 20 = 0$$

Уравнение имеет два вещественных корня, так как выполняется условие

$$D > 0 \text{ или } R > 2\sqrt{L/C}.$$

$$p_{1,2} = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{c}{a} - \left(\frac{b}{2a}\right)^2} \text{ с}^{-1};$$

$$p_1 = -666,67 \text{ с}^{-1};$$

$$p_2 = -1000 \text{ с}^{-1}.$$

Этим корням соответствует свободная составляющая тока

$$i''_3 = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t} = e^{-1000t} \text{ А},$$

где A_1 и A_2 – постоянные интегрирования.

6. Используя независимые начальные условия, рассчитанные в п. 1:

$$i_L(0) = i_1(0) = 1,478 \text{ А}, u_C(0) = 138 \text{ В},$$

определим зависимые начальные условия: $i_2(0)$, $\frac{di_2(0)}{dt}$.

Для этого рассмотрим уравнения цепи, записанные по законам Кирхгофа, в нулевой момент времени.

Из уравнения по II закону Кирхгофа для внешнего контура

$$u_C(0) - Ri_2(0) = 0$$

получаем

$$i_2(0) = \frac{u_C(0)}{R}.$$

Дифференцируем приведенное уравнение, с учетом, что

$$u_C(t) = \frac{1}{C} \int i_3 dt,$$

получим

$$\frac{di_2(0)}{dt} = \frac{i_1(0)}{CR}.$$

По I закону Кирхгофа $i_3 = i - i_1 - i_2$, тогда

$$\frac{di_2(0)}{dt} = \frac{i(0) - i_1(0) - i_2(0)}{CR}.$$

Подставим начальные значения $i_L(0) = i_1(0) = 1,478 \text{ А}$, $u_C(0) = 138 \text{ В}$, $i(0) = 4,33 \text{ В}$ и рассчитаем

$$i_2(0) = 6,9 \text{ А}, di_2(0)/dt = -6750 \text{ А/с}.$$

7. Для расчета постоянных интегрирования составим систему из двух уравнений

$$i_2(t) = i'_2 + i''_2;$$

$$\frac{di_2}{dt} = \frac{di_2'}{dt} + \frac{di_2''}{dt}.$$

или

$$i_2 = 4,464\sin(500t + 87^\circ) + A_1e^{-666,67t} + A_2e^{-1000t};$$

$$\frac{di_2}{dt} = 4,464 \cdot 500\cos(500t + 87^\circ) - 666,67A_1e^{-666,67t} - 1000A_2e^{-1000t}.$$

Рассмотрим эту систему при $t = 0$

$$i_2(0) = 4,464\sin 87^\circ + A_1 + A_2 = 6,9;$$

$$\frac{di_2(0)}{dt} = 2232\cos 167^\circ - 666,67A_1 - 1000A_2 = -6750.$$

Решая эту систему линейных алгебраических уравнений, находим значения постоянных интегрирования:

$$A_1 = -13,32 \text{ А}, A_2 = 15,76 \text{ А}.$$

Теперь можно записать выражение для тока i_3 :

$$i_2(t) = 4,464\sin(500t + 87^\circ) - 13,32e^{-666,67t} + 15,56e^{-1000t} \text{ А}.$$

Расчет переходного процесса операторным методом.

1. Расчет цепи до коммутации проводится аналогично расчету классическим методом. Результат вычислений – независимые начальные условия

$$i_L(0) = i_1(0) = 1,478 \text{ А}, u_C(0) = 138 \text{ В}.$$

2. Составим систему дифференциальных уравнений аналогично п. 3 классического метода:

$$\begin{aligned} i - i_1 - i_2 - i_3 &= 0; \\ \frac{1}{C} \int i_3 dt - L \frac{di_1}{dt} &= 0; \\ L \frac{di_1}{dt} - Ri_2 &= 0. \end{aligned}$$

Произведя замену

$$\begin{aligned} i(t) &\rightarrow I(p); e(t) \rightarrow E(p); \\ di/dt &\rightarrow pI(p) - i(0); \\ \int idt &\rightarrow I(p)/p, \end{aligned}$$

получим систему уравнений в операторной форме:

$$\begin{aligned} -I_1(p) - I_2(p) - I_3(p) &= 0; \\ -I_3(p)/Cp + u_C(0)/p + LpI_1(p) + Li_L(0) &= 0; \\ LpI_1(p) + Li_L(0) - RI_2(p) &= 0. \end{aligned}$$

Поскольку принужденный режим не является переходным процессом, расчет принужденной составляющей проводится аналогично расчету классическим методом. Решаем полученную систему алгебраических уравнений от-

носителем изображения свободной составляющей $I_2''(p)$, получаем выражение

$$I_2''(p) = \frac{-Li_L''(0) + LCpu_C''(0)}{RLCp^2 + Lp + R} = \frac{F_1(p)}{F_2(p)}.$$

Определим свободные составляющие тока $i_L''(0)$ и напряжения $u_C''(0)$

$$i_L''(0) = i_L(0) - i_L'(0),$$

$$u_C''(0) = u_C(0) - u_C'(0).$$

Принужденные составляющие $i_L'(t)$ и $u_C'(t)$ рассчитаны в п. 2. Рассмотрим момент времени $t = 0$ и получим

$$i_L'(0) = -0,21 \text{ А}, u_C'(0) = 89,1 \text{ В}.$$

Тогда

$$i_L''(0) = 1,478 + 0,21 = 1,681 \text{ А}, u_C''(0) = 138 - 89,1 = 48,9 \text{ В}.$$

Теперь воспользуемся теоремой разложения

$$I(p) = \frac{F_1(p)}{F_2(p)} \rightarrow i(t) = \frac{F_1(p_1)}{F_2'(p_1)} e^{p_1 t} + \frac{F_1(p_2)}{F_2'(p_2)} e^{p_2 t}.$$

Подставим корни характеристического уравнения и получим свободную составляющую тока $i_2(t)$:

$$i_2''(t) = -13,295e^{-666,67t} + 15,74e^{-1000t}.$$

Далее найдем ток $i_3(t)$ как сумму принужденной и свободной составляющих

$$i_2(t) = 4,464\sin(500t + 87^\circ) - 13,295e^{-666,67t} + 15,74e^{-1000t} \text{ А}.$$

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие	3
Рекомендуемая литература	3
Методические указания к изучению дисциплины	3
Методические указания к оформлению дисциплины	8
Методические указания к выполнению дисциплины	9
Контрольная работа № 2	9
Теоретические основы	14

Учебное издание

**Тарасова Наталья Александровна
Ерашова Юлия Николаевна
Тагиров Шамиль Фаритович**

**ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ
ОСНОВЫ ЭЛЕКТРОТЕХНИКИ**

Методические указания
и контрольное задание
для студентов заочной формы обучения
электроэнергетических специальностей
Часть II

Кафедра
«Теоретические основы электротехники»

Редактор издательского отдела *О.В. Ханжина*
Компьютерная верстка *О.В. Ханжина*

Подписано в печать .

Формат 60×84/16. Бумага «Business». Гарнитура «Times». Вид печати ROM.
Усл. печ. л. 2,6. Уч.-изд. л. 2,8. Тираж экз. Заказ № .

Издательство КГЭУ, 420066, Казань, Красносельская, 51
Типография КГЭУ, 420066, Казань, Красносельская, 51