МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение

высшего профессионального образования

К Г Э У

«КАЗАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

(ФГБОУ ВО «КГЭУ»)

Кафедра № ЭСиС

Экз. № ____

УЧЕБНО - МЕТОДИЧЕСКАЯ РАЗРАБОТКА

по учебной дисциплине

Б.1.В.ДВ.13. ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЭЛЕКТРОЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ СИСТЕМ

ЛЕКЦИЯ:
МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ОБЪЕКТА.

УТВЕРЖДАЮ

Заведующий кафедрой ЭСиС

Максимов В.В.

« »____________ 201_ г.

УЧЕБНО - МЕТОДИЧЕСКАЯ РАЗРАБОТКА

по учебной дисциплине «Физико-математическое моделирование электроэнергетических систем»

Лекция: Математическая модель объекта.

Учебные и воспитательные цели:

1. Дать систематизированные знания о физико-математическом моделировании электроэнергетических систем.
2. Воспитывать добросовестное отношение к учебе, стремление к самосовершенствованию, к овладению избранной профессией.

Вид занятия: лекция

Продолжительность занятия: 2 часа.

Структура занятия и расчет времени.

№п/п	Структура занятия	Время, мин
1	**Вводная часть**	**10-15**
2	**Основная часть** **1. Математическое моделирование** **2. Переменные в математических моделях.** **3. Требования к математическим моделям .** **4. Классификация математических моделей.** **5.Адекватность и эффективность математических моделей.** **6. Математические модели на микро-, макро- и мегауровне**	**70-75**
3	**Заключительная часть**	**3-5**

Вводная часть занятия: проверить наличие и готовность обучающихся к занятию; провести опрос по пройденному материалу в соответствии с перечнем вопросов и подвести его итоги; объявить тему и учебные цели занятия; обратить внимание обучающихся на важность изучения учебных вопросов занятия, так как знание их может быть востребовано при выполнении курсовой работы и выпускной квалификационной работы.

Основная часть занятия: учебные вопросы занятия изучаются в составе группы с применением диафильма, диапроектора, стендов, плакатов, классной доски, цветных мелков. Изучать материал занятия следует в строгом соответствии с учебной программой и тематическим планом изучения учебной дисциплины.

Наименование учебных вопросов преподаватель объявляет последовательно по мере изложения учебного материала и записывает их на классной доске.

На классной доске следует также записывать номер и название темы и занятия, учебные вопросы, цифровые характеристики, формулы, непонятные и сложные для обучаемых термины, чертить поясняющие схемы. Записи на классной доске вести последовательно и аккуратно.

В ходе изложения учебного материала необходимо контролировать степень усвоения учебного материала путем постановки контрольных и проблемных вопросов.

При изучении учебного материала обучающихся должны вести конспект. Контроль за качеством ведения конспектов преподаватель осуществляет в ходе проведения занятия.

Основная часть занятия:

1. Математическое моделирование

В настоящее время наиболее востребованным и распространенным видом моделирования является математическое. Современная математика позволяет исследователю использовать исключительно мощные и универсальные средства изучения окружающего мира.

По сравнению с прямым экспериментом математическое моделирование имеет следующие преимущества:

– экономичность как по затратам времени, так и по стоимости;

– возможность моделирования сложных, опасных и даже нереализованных в природе объектов и процессов;

– возможность изменения масштабов времени;

– позволяет в процессе моделирования устранить пробелы в знаниях и выявить новые качественные проблемы, которые изначально не могли быть предусмотрены;

– позволяет с помощью одной модели осуществить решение целого класса задач, имеющих одинаковое математическое описание;

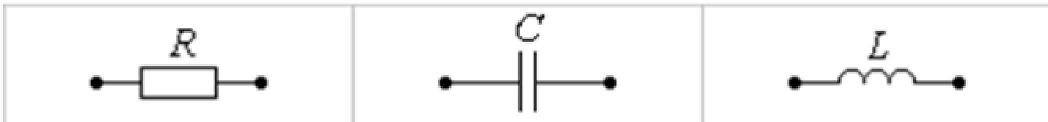
– дает возможность моделировать по частям (по «элементарным» процессам), что особенно существенно при исследованиях сложных технических объектов;

– доступность и удобство универсального технического и программного обеспечения.

Моделирование основывается на изоморфизме математических уравнений, т.е. их способности описывать различные по своей природе физические явления. Это позволяет создавать универсальные математические пакеты, пригодные для решения прикладных задач в различных областях техники, например, *VisSim, Simulink* (MATLAB), *SystemBuild* (MATRIXx) и др.

Идея мультидоменного физического моделирования состоит в том, что модель любого технического устройства строится как преобразующая энергию цепь. В распоряжении пользователя предоставляется библиотека элементов физических устройств разных энергетических доменов. При этом вне зависимости от природы преобразуемой энергии, все библиотечные элементы подобны и строятся в соответствии с законом Ома и постулатами о сохранении материи и энергетического потенциала (первый и второй законы Кирхгофа). В пакетах расширения универсальных математических программ для каждого элементарного потребителя энергии существуют собственные условные графические обозначения, однако математическая суть соответствующих библиотечных элементов остается неизменной.

В качестве примера на рис.1.1 приведены условные графические обозначения и математическая запись закона Ома для двух типов простейших энергетических элементов, используемых программой *Jigrein* для моделирования поведения сложных технических систем.



$i(t)=\frac{u(t)}{R}$	$i(t)=C\frac{du(t)}{dt}$	$i(t)=\frac{1}{L}\int u(t)dt$
$u(t)=R\,i(t)$	$u(t)=\frac{1}{C}\int i(t)dt$	$u(t)=L\frac{di(t)}{dt}$

Рисунок 1.1. Пример условного графического обозначения и математического описания элементарных потребителей энергии в универсальных математических программах.

Построение математической модели заключается в определении связей между теми или иными процессами и явлениями, и создании математического аппарата, позволяющего выразить качественную и количественную связь между теми или иными процессами и явлениями, между интересующими специалиста физическими величинами, и факторами, влияющими на конечный результат.

Сам процесс построения и изучения математической модели может быть проведен по общей блок-схеме моделирования, приведенной на рис.1.2.

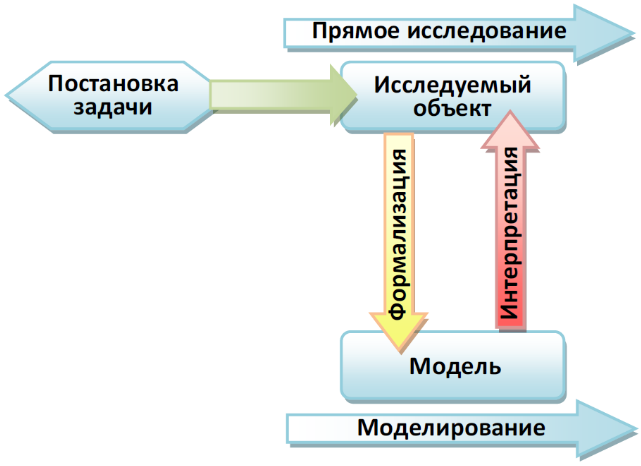


Рисунок 1.2. Основные этапы моделирования.

2. Переменные в математических моделях.

В общем случае математическую модель реального объекта, процесса или системы можно представить в виде системы функциональных зависимостей, связывающих входные и выходные переменные модели через множество ее параметров (рис.1.3.):

$$\vec{Y} = F(\vec{X}, \vec{S}, t) \tag{1.2.}$$

где

$\vec{X} = (x_1, x_2, \ldots x_n)^t$ – *вектор входных переменных,*

$\vec{Y} = (y_1, y_2, \ldots y_n)^t$ – *вектор выходных переменных.*

$S = (s_1, s_2 \ldots s_n)^t$ - *вектор внутренних параметров модели;*

t – *координата времени.*

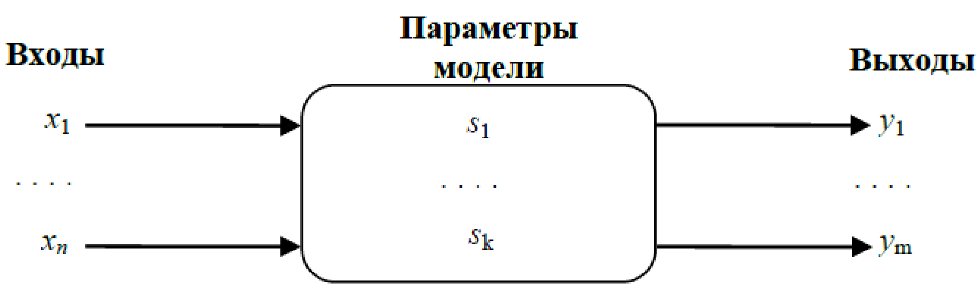


Рисунок 1.3. Общее представление математической модели.

Множество параметров модели $\vec{S}$ и их значений отражают внутреннее содержание исследуемого объекта – структуру и принципы функционирования. Количественной мерой свойств модели является множество характеристик $\vec{Y}$, которые она проявляет под влиянием внешних воздействий $\vec{X}$.

В качестве примера рассмотрим применение метода математического моделирования для решения простой математической задачи из книги Я.И.Перельмана.

Задача. Книга в переплете стоит 2 руб. 50 коп. Книга на 2 руб. дороже переплета. Сколько стоит переплет?

Решение.

Введем обозначение переменных:

x_1 – стоимость книги без переплета;

x_2 – стоимость книги с переплетом;

y – стоимость переплета;

Δx – разница в стоимости книги и переплета.

Проведем формализацию решаемой задачи и установим количественную связь между переменными (определим параметры модели).

По условию задачи:

$x_1+y=x_2$

$y+\Delta x=x_1$

После несложных преобразований получим характеристическое уравнение математической модели, связывающее входные и выходную переменные:

$$y=\frac{(x_2-\Delta x)}{2}$$

Блок-схема математической модели решаемой задачи представлена на рис.1.5. В качестве входной переменной в модели не используется x_1, так как в процессе формализации выяснилось, что она является избыточной.

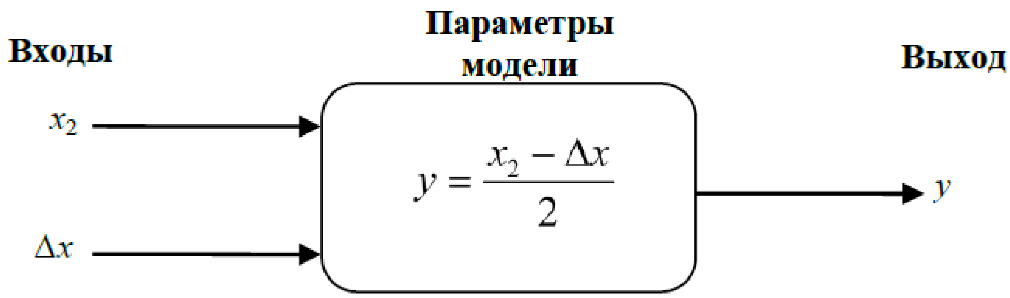


Рис.1.5. Математическая модель задачи о стоимости переплета

Разработанная нами математическая модель позволяет легко найти решение: для принятых по условию задачи исходных данных стоимость переплета книги составит y=25 коп.

Переменные величины, входящие в математическую модель, различают по нескольким признакам.

2.1. По роли, которую переменные играют по отношению к объекту моделирования.

На рис. 1.4

$X=(x_1,x_2,...x_n)$ – ***вектор входных переменных,***

$Y=(y_1,y_2,...y_n),$ – ***вектор выходных переменных.***

В связи с разделением переменных на входные и выходные рассматриваются прямые и обратные задачи исследования объекта по его математической модели. В прямых задачах по данным о выходах объекта исследуется его поведение в различных условиях (режимах работы), т.е. входные переменные, структура и параметры модели относятся к исходным данным, а выходные переменные представляют результат исследования: $\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{X})$ *или* $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}) = 0$, где известны характеристики $\boldsymbol{X}$ *и* $\boldsymbol{f}$ *или* $\boldsymbol{F}$.

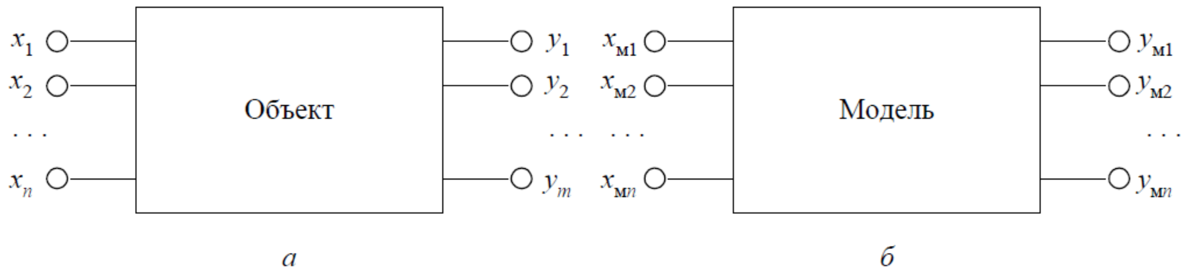


Рисунок 1.4. Переменные в объекте и его модели.

В обратных задачах считаются известными $\boldsymbol{X}$ *и* $\boldsymbol{Y}$ (доступны для измерения и исследования), а определению подлежат неизвестные структура и параметры модели ($\boldsymbol{f}$ *или* $\boldsymbol{F}$). Такие задачи называют задачами идентификации.

Входные переменные разделяют на управляемые (управляющие воздействия) и неуправляемые (возмущения) Первые позволяют выполнять регулирование режима работы объекта, а вторые меняются самопроизвольно, например погодные условия.

2.2. По подверженности воздействию случайным факторам. Детерминированная (определенная) переменная означает, что для нее исключено влияние случайных факторов – она задается вполне определенным значением или меняется во времени по определенному закону.

Некоторые переменные по своей природе или по влиянию на них случайных факторов являются случайными величинами. Процесс изменения такой величины во времени называется случайным или стохастическим процессом. К этим переменным можно отнести мощность нагрузки тяговой подстанции, которая зависит от загрузки контактной транспортной сети, или величину активного сопротивления провода ЛЭП, в большой степени подверженного влиянию температуры окружающей среды.

В основе описания случайных переменных лежат методы теории вероятностей, случайных процессов и математической статистики.

2.3. По свойствам непрерывности и дискретности.

Изменения непрерывных переменных во времени описываются непрерывными функциями, которые могут принимать континуальное множество значений в некоторых практически всегда имеющихся пределах (рис. 1.5, *а*). Непрерывность, порожденная инерционностью материальных систем, является их неотъемлемым свойством. Однако на практике возможности разрешения близких значений функций и ее аргументов всегда ограничены; для каждого конкретного случая можно указать определенную область, в пределах которой эти значения становятся неразличимыми для наблюдателей или инструментальных средств. Очевидно, что такую область достаточно характеризовать единственным значением, что приводит к понятию дискретных переменных (рис.1.5, *б,в,г*).

Дискретные переменные подразделяются на три типа:

1) дискретные относительно значений переменной (рис. 1.5, *б*);

2) дискретные относительно времени (рис. 1.5, *в*);

3) дискретные относительно значений переменной и относительно времени (рис. 1.5, *г*).

Множество дискретных значений, которые принимает переменная, как правило, является конечным: положение выключателя (включено, выключено), количество включенных генераторов на электростанции (0,1,2, …), значения целых чисел, представленных в цифровой вычислительной машине (например, от –32768 до 32767). С помощью дискретных относительно значений переменных удобно представлять некоторые процессы (графики нагрузок или напряжений по часам суток или месяцам года), распределение вероятностей (гистограмма) и т.п.

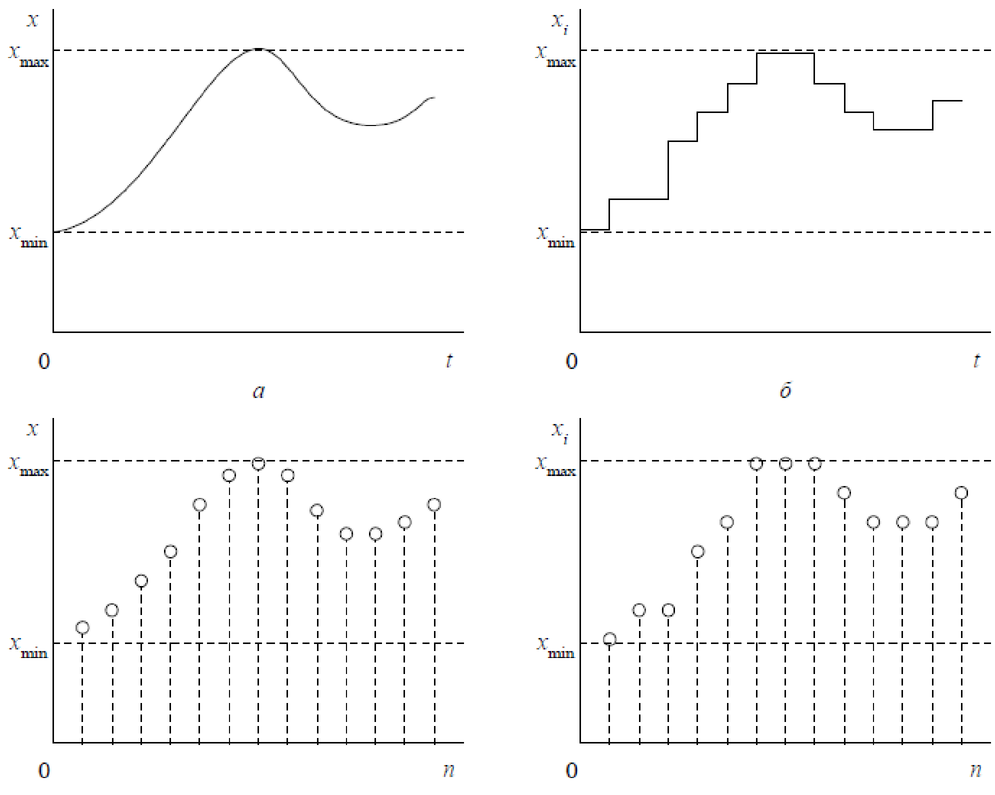


Рисунок 1.5. Виды переменных по свойствам непрерывности и дискретности.

Дискретность во времени связана с отсчетом или замером или замером переменных в отдельные дискретные моменты времени. Так в автоматизированных системах управления измерения переменных выполняются с заданной периодичностью, например через каждые 5 минут.

Дискретность по времени и по значению дополнительно к измерениям в отдельные моменты времени предполагает использование дискретных значений переменных.

2.4. По способу получения переменные делятся на наблюдаемые и ненаблюдаемые.

Главное свойство наблюдаемых переменных – доступность для наблюдения. Однако наблюдаемость сама по себе еще не обеспечивает возможности полного исследования и описания переменной. Необходимо, чтобы последняя обладала еще свойством измеримости, т.е. возможностью построения для исследуемой величины метрики. *Этому требованию удовлетворяют непосредственно измеряемые переменные*. Они представляют собой количественные характеристики свойств и параметров всевозможных материальных объектов и процессов (напряжение, ток, скорость, линейные размеры и пр.), которые определяются на основе прямого измерения, т.е. сравнения с мерой, обеспечены средствами измерения и охвачены существующей системой метрологического обеспечения.

Тесно связан с непосредственно измеряемыми и следующий класс переменных – косвенно измеряемые.

Косвенно измеряемая переменная x сама по себе не является объектом измерения, а часто и в принципе не может быть непосредственно измерена. Вместо нее непосредственному измерению подвергаются другие, вспомогательные переменные (α, β, γ,…), которые связаны с исследуемой переменной функциональной зависимостью $x = f(\alpha, \beta, \gamma,\ldots)$. Это позволяет вычислить значение искомой переменной по результатам прямых наблюдений вспомогательных величин, например, вычислить объем тела по результатам измерения его линейных размеров. При испытаниях силовых трансформаторах в электрических сетях температуру его обмоток определяют методом измерения их сопротивлений постоянному току, т.е. температура – косвенно измеряемая переменная.

К косвенно измеряемым переменным относят такие искусственно сконструированные идеальные образования, которые вообще не наблюдаемы:

-математическое ожидание,

- дисперсия,

- энтропия и др.

Существует класс переменных, которые при их количественном оценивании не имеют материальной эталонной базы и находятся вне сферы метрологии. К ним относятся все виды непосредственно или косвенно измеряемых переменных, приведенных к безразмерной форме и выраженных в относительных единицах. Например, некоторые величины материальной природы (интенсивность сейсмических явлений, интенсивность облачности в метеорологии, твердость материалов по Бринеллю и некоторые другие), а также искусственные идеальные конструкции, характеризующие в количественном отношении сложные и массовые объекты и явления (рентабельность, прибыль, эффективность и др.). Такие переменные называют условно измеряемыми, так как меры или единицы измерения, используемые при их количественном оценивании, носят конвенционный характер.

Существует еще один класс наблюдаемых переменных – условно количественно оцениваемые. Они представляют сложные многофакторные явления, интенсивность которой может быть различной, но для количественного оценивания этой интенсивности не удается ввести ни объективной единицы измерения, ни способа измерения. Однако в целом ряде случаев между интенсивностями рассматриваемого явления удается установить отношение порядка (равны – не равны, больше – меньше и т.д.), а затем отобразить эти отношения, вообще говоря, произвольным образом на некоторое множество (систему) чисел. Результатом такой процедуры являются, например, численные оценки качества усвоения учащимися и студентами учебного материала, степень удовлетворения работой членов некоторого производственного коллектива, степень качества исполнения музыкального произведения или выполнения спортивного упражнения. Условное количественное оценивание основано на опыте и интуиции и по сути своей субъективно.

Ненаблюдаемые переменные подразделяют:

- на принципиально ненаблюдаемые

- и технически ненаблюдаемые.

Принципиально ненаблюдаемые переменные не существуют как компоненты реального мира и поэтому поддаются определению только косвенными методами, в частности на основе косвенных измерений (статистические характеристики).

Технически ненаблюдаемые переменные характеризуют такие материальные явления, которые либо не обеспечены техническими средствами, необходимыми для измерения и оценивания, либо протекают в условиях, когда инструментальный доступ к ним невозможен. Характерным примером переменной, не наблюдаемой из-за практической недоступности, является количество угля для помола в шаровой мельнице на электростанции.

2.5. Ограничения на переменные

Каждая переменная, связанная с материальным объектом, может изменять свои значения лишь в некоторых конечных пределах, которые обусловлены физическими свойствами объекта и характером решаемой задачи. Данные об этих пределах – ограничения на переменные – существенны при построении и использовании всех видов моделей, а в оптимизационных задачах, где необходимо найти оптимальное значение так называемой целевой функции, ограничения являются главной частью самой модели.

С математической точки зрения различают ограничения типа простых неравенств: $\boldsymbol{X_{min} \le X \le X_{max}}$, $\boldsymbol{Y_{min} \le Y \le Y_{max}}$ – параллелепипедные ограничения и функциональные ограничения, фиксирующие предельные значения некоторой величины в функции от других переменных: $\boldsymbol{f_{min}(X) \le Z \le f_{max}(X)}$ *и т.п.*

В практике моделирования выделяют так называемые жесткие ограничения, которые являются абсолютными (например, угол поворота лопатки турбины – «до упора»), и ограничения мягкие, допускающие кратковременные нарушения установленной границы значений переменной (например, верхнего предела рабочего напряжения на электродвигателе).

В общем случае данные об ограничениях на переменные входят в состав модели как обязательная составная часть.

3. Требования к математическим моделям.

Наиболее важными требованиями к математическим моделям являются:

- ***точность,***
- ***универсальность***
- ***экономичность***.

Точность модели – это количественная оценка степени совпадения модельных результатов с действительными.

Количественная оценка точности созданной модели является довольно сложной задачей, так как точность модели может быть различной в разных условиях функционирования реального объекта, а сам моделируемый объект, как правило, характеризуется не одним, а несколькими выходными параметрами. Кроме того, действительные параметры объекта обычно отождествляются с экспериментальными измерениями, однако погрешности натурного эксперимента могут оказаться соизмеримыми с погрешностью модели, а иногда и превышать её.

Если обозначить выходные параметры исследуемого объекта через y_i, а соответствующие им значения параметров модели через y_{Mi}, относительную погрешность каждого выходного параметра можно определить по выражению:

$$\varepsilon_i = \frac{y_i - y_{Mi}}{y_i} \qquad (1.1.)$$

Общая погрешность модели по совокупности выходных параметров определяется вектором относительных погрешностей:

$$\bar{\varepsilon} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, ...\varepsilon_k), \quad i = 1, \bar{k} \qquad (1.3.)$$

Для количественной оценки точности модели вектор погрешности представляется в скалярной форме, переход к которой осуществляется на основе какой-либо выбранной нормы векторов: *m*-норма, *l*-норма и др. В технических расчетах наибольшее распространение получил метод оценки точности результата по среднеквадратичной погрешности:

$$\varepsilon_i = \frac{1}{k}\sqrt{\sum_{i=1}^{k} \varepsilon_i^2} \qquad (1.4.)$$

Если предельно допустимая погрешность моделирования определяется величиной $\varepsilon_{пред}$, математическая модель будет адекватна объекту- оригиналу при выполнении условия:

$$\varepsilon_{ср} \prec \varepsilon_{пред}$$

Как правило, адекватность модели имеет место лишь в ограниченной области изменения входных параметров – области адекватности.

Не всегда повышает, а часто и ухудшает точность исследований учет большого количества факторов в математическом описании изучаемого объекта, независимо от их реальной роли в рассматриваемом явлении. Строгая постановка задачи означает, прежде всего, отбор только тех факторов, которые оказывают существенное влияние на свойства моделируемого объекта, и отсев факторов малозначащих и второстепенных.

Таким образом, точность математической модели определяется степенью совпадения расчетного и действительного процесса и зависит главным образом от точности исходных данных и принятых упрощающих допущений.

Универсальность моделей предопределяет область их возможного применения и определяется числом и составом учитываемых в модели входных и выходных параметров. Чем точнее модель, тем выше степень ее адекватности оригиналу, но тем уже класс объектов, который может быть описан данной моделью. И наоборот, чем универсальнее модель и шире класс объектов, который она описывает, тем с большей степенью приближения она соответствует свойствам каждого реального объекта.

Экономичность модели характеризуется затратами ресурсов для ее реализации.

В общем случае основные требования, предъявляемые к математическим моделям, являются противоречивыми, поэтому наиболее рациональной будет та модель, в которой обеспечен наилучший компромисс всех требований.

4. Классификация математических моделей.

Математическое описание исследуемого объекта во многом зависит от физической природы реального процесса или явления, а также необходимой степени достоверности полученных результатов. При создании математической модели сознательно отвлекаются от конкретной физической природы объектов, процессов или систем и, в основном, сосредотачиваются на изучении количественных математических зависимостей между величинами, описывающими эти процессы. При этом вид математических выражений, используемых для отображения моделируемого объекта, определяется характером исследуемых процессов, видом исходной информации, параметрами входных и выходных переменных. Эти факторы оказывают непосредственное влияние на форму и принципы представления математической модели и определяют выбор математических методов и математического аппарата, необходимого для решения поставленной задачи.

При разработке математической модели необходимо правильно определить ее вид и использовать то математическое описание и математический аппарат, которые обеспечат решение поставленной задачи с необходимой точностью при минимально возможных потребностях в вычислительных ресурсах.

С этой точки зрения, исследователь должен ясно себе представлять возможные варианты построения математических моделей, и производить их осознанный выбор, исходя из текущих условий и стоящей перед ним проблемы.

Возможные виды математических моделей приведены в табл.1.1.

Таблица 1.1. Классификация математических моделей.

Признаки классификации	**Виды математических моделей**
Характер отображаемых свойств объекта	структурные функциональные
Способ представления свойств объекта	аналитические алгоритмические
Особенности поведения объекта	детерминированные вероятностные
По отношению к времени	динамические статические
По типу уравнений	линейные нелинейные
По множеству значений переменных	непрерывные дискретные

4.1. Структурные и функциональные модели.

Деление математических моделей на функциональные и структурные определяется характером отображаемых свойств моделируемого технического объекта.

Структурные модели отображают только структуру объектов и используются в случаях, когда задачи структурного синтеза удается ставить и решать, не учитывая особенности физических процессов в объекте. С точки зрения математического представления структурные модели имеют форму таблиц, матриц, графов, списков векторов и т.п. С помощью данного класса моделей можно отобразить возможное расположение элементов в пространстве, воспроизвести непосредственные связи между элементами в виде каналов, проводов, трубопроводов и т.п.

Функциональные модели отображают структурные и функциональные свойства объекта и чаще всего имеют форму систем уравнений, описывающих электрические, тепловые и другие физические процессы. При моделировании сложных технических систем, содержащих большое количество элементов, довольно часто используют функциональные модели, построенные по принципу «черного ящика». В этом случае из общей системы выделяют отдельный функциональный блок, имеющий входы и выходы, и моделируют его поведение, детально не рассматривая физические процессы, происходящие внутри этого блока.

3.2. Теоретические и экспериментальные

По способам получения математические модели делятся на теоретические и экспериментальные.

Теоретические модели строятся на основе известных физических закономерностей, структура уравнений и параметры моделей имеют определенное физическое толкование (законы Ома, Кирхгофа и т.п.). В большинстве случаев теоретический подход позволяет получать универсальные математические модели, справедливые для широких диапазонов изменения внешних параметров.

Экспериментальные модели создаются на основе экспериментов над моделируемым объектом и обработки их результатов методами математической статистики. Эксперименты при этом могут быть физические (на техническом объекте или его физической модели) или вычислительные (на теоретической математической модели). Экспериментальные модели дают адекватное описание исследуемых процессов лишь в ограниченной области пространства параметров, вблизи которой они проводились, и поэтому, имеют частный характер.

3.3. Математические модели могут быть аналитическими или алгоритмическими.

Аналитические модели представляют собой явно выраженные зависимости выходных параметров моделируемого объекта от параметров внутренних и внешних. Процессы функционирования элементов системы в таких моделях представляются в виде алгебраических, интегральных, дифференциальных и других соотношений, что позволяет достаточно просто проводить разнообразные исследования изучаемого объекта и решать вопросы оптимизации.

Как правило, аналитические модели удается получить только для относительно простых технических объектов и систем, при принятии целого ряда упрощающих допущений. В большинстве практических случаев моделируемые реальные объекты оказываются настолько слоны, что построение для них аналитической модели превращается в трудноразрешимую проблему.

Алгоритмическая модель – это математическая модель, представленная в форме алгоритма, перерабатывающего заданный набор входных данных в заданный набор выходных. Алгоритмические модели применяют в тех случаях, когда использование аналитических (расчетных) моделей затруднено либо нецелесообразно.

Частным видом алгоритмических моделей являются имитационные, предназначенные для имитации физических и информационных процессов, протекающих в объекте при его функционировании под воздействием различных факторов внешней среды.

При имитационном моделировании воспроизводится процесс функционирования системы во времени и в пространстве, причем имитируются составляющие процесс элементарные явления с сохранением его логической и временной структуры. Каждому существенному с точки зрения решаемой задачи элементу объекта ставится в соответствие элемент модели, и описываются законы функционирования каждого элемента объекта и связи между ними.

Имитационное моделирование напоминает физический эксперимент. При этом процессы, протекающие в модели в ходе эксперимента, подобны процессам в реальном объекте, что обеспечивает хорошую наглядность результатов моделирования.

Имитационное моделирование – метод, позволяющий строить модели, описывающие процессы так, как они проходили бы в действительности.

К достоинствам имитационного моделирования применительно к промышленным объектам можно отнести:

− моделирование не требует прерывания текущей деятельности реального объекта;

− динамический характер отображения процессов в моделируемом объекте;

− моделирование можно использовать в качестве средства обучения персонала работе с реальной системой;

− возможность учета большого числа случайных факторов;

− возможность проведения статистических экспериментов;

− сравнительная простота введения модификаций в модель;

− возможность управлять масштабом времени (годы практической эксплуатации реальной системы можно промоделировать в течение нескольких секунд или минут).

3.4. Математические модели могут быть детерминированными и стохастическими.

Детерминированная математическая модель характеризуется взаимно однозначным соответствием между переменными, описывающими моделируемый объект или явление. При построении детерминированных моделей чаще всего используются алгебраические и интегральные уравнения, матричная алгебра и т.п.

Стохастическая модель учитывает случайный характер процессов в исследуемых объектах и системах, который описывается методами теории вероятности и математической статистики. Стохастические модели достаточно сложны в реализации и их практическое использование требует больших затрат машинного времени.

3.5. По поведению моделей во времени их разделяют на статические и динамические

Статические модели включают описание связей между основными переменными моделируемого объекта в установившемся режиме без учета изменения параметров во времени, динамические модели отражают поведение объекта, процесса или системы при переходе от одного режима к другому.

Математическое представление динамической модели в общем случае может быть выражено системой дифференциальных уравнений, для описания статической модели достаточно системы алгебраических уравнений.

3.6. Линейные и нелинейные.

В зависимости от характера воздействий и изменения внутренних параметров модели могут быть детерминированными и стохастическими, а в зависимости от связей между переменными – линейными и нелинейными.

Линейные модели содержат только линейные функции величин, характеризующих состояние объекта при его функционировании, и их производных. Характеристики многих элементов реальных объектов являются нелинейными, что требует для их математического описания использования более сложных нелинейных функций. В некоторых практических случаях линейные математические модели могут быть использованы для описания нелинейных систем, если эта нелинейная система условно линеаризована.

В непрерывных моделях фигурирующие в них переменные непрерывны, т.е. могут принимать любое значение из некоторого промежутка.

В дискретных моделях переменные, в том числе и время, дискретны, то есть для них определено некоторое множество разрешенных значений (уровней), в частном случае их всего два (двоичные переменные). Дискретность модели может быть как естественным условием (объект скачкообразно меняет свое состояние и выходные свойства), так и искусственно внесенной особенностью (например, замена непрерывной математической функции на набор значений в фиксированных точках).

Основным математическим аппаратом для описания и исследования непрерывных систем служат дифференциальные уравнения, для исследования дискретных моделей следует использовать математический аппарат дискретного анализа.

Приведенная выше классификация математических моделей не является однозначной и единственной. Однако, она может быть полезна при выборе вида математического представления модели и математических методов, используемых для решения конкретной задачи. Перечисленные выше виды математических моделей не являются взаимоисключающими и могут использоваться при исследовании сложных объектов либо одновременно, либо в некоторой комбинации. В зависимости от используемого типа математического представления модели (алгебраические, дифференциальные уравнения, графы и т. д.) на разных этапах её исследования может применяться и различный математический аппарат.

4.Адекватность и эффективность математических моделей.

4.1. Адекватность математических моделей.

Математическое описание объекта может иметь различную степень соответствия (адекватность) объекту-оригиналу. Как правило, исследователь стремится к более полному и точному отражению в модели свойств объекта. Это естественное стремление объясняется неопределенностью, которая неизбежно присутствует при построении моделей. Нельзя заранее точно знать, какие свойства объекта важны для решаемой задачи, а какие – несущественны. Такая неопределенность тем больше, чем меньше исследователь знает исследуемый объект и меньше его опыт в решении подобных задач.

Таким образом, требование полноты соответствия модели объекту - оригиналу является мерой совершенства модели и одним из ее качеств. Мало того, излишняя полнота модели в большинстве случаев даже вредна, так как приводит к такому усложнению модели, что ее использование становится невозможным. **Поэтому другое качество модели – это ее простота.**

Нетрудно понять, что качества адекватности и простоты противоречат друг другу, т.е. с улучшением одного из них происходит ухудшение другого. Отыскание оптимального сочетания (как говорят, «золотой середины») этих двух качеств при построении модели есть отдельная задача, решение которой лежит на исследователе. Здесь необходим опыт, интуиция и соответствующий уровень подготовки исследователя. Идеальная квалификационная подготовка последнего не только весьма обширна, но и в значительной мере противоречива.

С одной стороны, исследователь должен досконально представлять себе задачу и глубоко изучить объект моделирования. Но, с другой стороны, исследователю, строящему модель, необходимо хорошо владеть аппаратом современной математики, представлять себе весь арсенал модельных конструкций, иметь опыт формализации знаний и использования современных вычислительных средств. Кроме того, во многих случаях от исследователя требуются знания в области планировании и проведения эксперимента на объекте-оригинале или на более сложной модели (вычислительный эксперимент).

Модель с оптимальным сочетанием качеств адекватности и простоты можно назвать эффективной (практически полезной) моделью. Математически такое сочетание соответствует максимуму так называемой «функции полезности», и, если такая функция может быть записана, отыскание ее максимума возможно известными оптимизационными методами.

4.2. Эффективность математических моделей.

Употребляя термин «точность математического моделирования», можно иметь в виду адекватность модели, например, говорят: точная или приближенная формула, линеаризованная (т.е. приближенно замененная линейной) зависимость и т.д. Но реализация математической модели, т.е. проведение «вычислителем» одного или нескольких расчетов, результатом которых будут численные значения переменной, вектора, таблицы содержит погрешности вычислений вследствие ошибок округления, прерывания итерационного процесса вычислений и ошибок в данных, которые переходят (распространяются) на результаты. Последующая обработка реализаций математической модели предполагает и подсчет погрешности исследований. В связи с этим, рассматривая вопрос **об эффективности математических моделей,** следует иметь в виду погрешности реализаций, которые иногда являются причиной дополнительных упрощений модели, так как учет некоторых факторов может, например, сказаться на результатах в меньшей степени, чем погрешности в исходных данных.

Рассмотрим математическую модель линии электропередачи (ЛЭП) высокого напряжения. В нее входят такие параметры, как:

- активное сопротивление,
- индуктивность самоиндукции и взаимоиндукции проводов,

- емкости между проводами и проводами и землей.

Высота подвеса проводов и заземленных грозозащитных тросов на линии влияет на величину емкостей между проводами и землей. Следует ли в расчетах режимов ЛЭП учитывать близость земли? В некоторых случаях при достаточно длинных ЛЭП определение емкостных параметров требует уточнения в части влияния земли, а при небольших длинах линий это необязательно.

При анализе адекватности, эффективности и точности отдельных математических моделей используются некоторые численные оценки. Получение этих оценок почти всегда связано с большими трудностями, так как требует проведения натурных (на объекте-оригинале) или вычислительных (по реализациям по более точной модели) экспериментов. Иногда такие эксперименты требуют больших материальных и временных затрат, но проводить их необходимо, так как это единственный способ оценить качество математических моделей.

Истинные значения параметров обычно отождествляются с экспериментально полученными. Однако погрешности натурного эксперимента во многих случаях оказываются соизмеримыми с погрешностями математических моделей, а иногда заметно их превышают.

Пусть на выходе объекта измеряются m переменных $\boldsymbol{Y}$ (рис. 1.4, *а*).

При исследовании на математической модели получились m модельных переменных $\boldsymbol{Y}_м$. Вектор погрешностей есть разница полученных векторов $\Delta = Y - Y_M$. В целом погрешность математической модели можно оценить по норме вектора погрешностей Δ:

$$\left\|\Delta\right\|_1 = \max_{i\in[1\ldots m]}\left|\Delta\right|. \qquad (1.2)$$

Часто используют евклидову норму и среднеквадратическую погрешность:

$$\left\|\Delta\right\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{m}\Delta_i^2} \ и \ \varepsilon = \sqrt{\frac{\sum_{ш=1}^{ь}\Delta_ш^2}{m}}. \qquad (1.3)$$

В качестве других характеристик математических моделей иногда называют экономичность (по затратам) и универсальность (применимость к группе объектов).

6. Математические модели на микро-, макро- и мегауровне

6.1. Математические модели на микроуровне.

Рассмотрим модели технических систем на микроуровне. В большинстве случаев это распределенные модели и они представляют собой системы дифференциальных уравнений в частных производных. При создании математических моделей целесообразно исходить из основных физических законов в их наиболее «чистом», фундаментальном виде. Такой подход обеспечивает наиболее адекватное описание объектов, протекания процессов и явлений окружающего нас мира.

Фундаментальными физическими законами в первую очередь являются законы сохранения массы, количества движения, энергии. Эти законы можно сформулировать в одном общем виде: изменение во времени некоторой субстанции в элементарном объеме равно сумме притока-стока этой субстанции через поверхность элементарного объема. Субстанцией служат масса, количество движения, энергия. Эта формулировка остается справедливой и для некоторых других субстанций, например количества теплоты, количества зарядов, количества элементарных частиц и др. Если внутри элементарного объема происходит генерация или уничтожение рассматриваемой субстанции, то к сумме притока-стока нужно добавить соответствующий член, отражающий данное явление. В этом случае общий вид уравнений, составляющих основу большинства распределенных моделей, будет следующим:

$$\frac{d\varphi}{dt} = div\vec{J} + G, \tag{1.6.}$$

где φ – некоторая фазовая переменная, выражающая субстанцию (плотность, энергию и т.п.);

J– поток фазовой переменной;

G – скорость генерации субстанции;

t – время.

Поток фазовой переменной φ есть вектор $\vec{J} = (J_x, J_y, J_z)$. Дивергенция (расходимость) этого вектора определяется общим соотношением

$$div\vec{J} = \frac{\partial J_x}{\partial x} + \frac{\partial J_y}{\partial y} + \frac{\partial J_z}{\partial z} \tag{1.7.}$$

Дивергенция (расходимость) является скалярной величиной и характеризует сумму притока-стока через поверхность элементарного объема.

Рассмотрим основные уравнения некоторых физических процессов.

1) Уравнение непрерывности гидродинамики

В течении жидкости или газа имеем в любой точке ***M*** определенное значение скорости движущейся частицы, т.е. векторное поле скорости. Обозначим через ρ плотность жидкости в данной точке. Понятие дивергенции позволяет описать поведение этой плотности в отдельной точке:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} = -\rho div\,\vec{v} \tag{1.8.}$$

Это уравнение описывает закон сохранения массы и называется уравнением непрерывности.

При одномерном исполнении

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} = -\rho\,\frac{\partial v}{\partial x} \tag{1.9.}$$

2) Уравнение теплопроводности

Связь изменения температуры во времени и пространстве со свойствами среды описывается с помощью уравнения теплопроводности. Это уравнение вытекает из закона сохранения энергии: изменение во времени количества теплоты в элементарном объеме равно сумме притока-стока теплоты и изменения теплоты за счет ее превращения в другие виды энергии в том же объеме:

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = -div\vec{J}_Q + G_Q \qquad (1.10.)$$

где Q – количество теплоты;
J_Q – вектор плотности теплового потока;
G_Q – количество теплоты, выделяемой в единицу времени в рассматриваемом элементарном объеме.

3) Уравнение непрерывности электрического тока

Движение электрических зарядов через поверхность элементарного объема записывается в виде

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -div\vec{\delta} \qquad (1.11)$$

где ρ – объемная плотность электрических зарядов;
δ – вектор плотности тока проводимости и смещения.

Приведенные примеры показывают однотипность математических моделей на микроуровне, но в то же время использование математических моделей объектов в виде системы дифференциальных уравнений в частных производных возможно для простых технических систем, так как решение их наталкивается на значительные трудности. Методы дискретизации пространства (конечных разностей и конечных элементов), которые используются для приближенного решения этих уравнений, приводят к решению систем с числом уравнений 10^6 и более.

6.2. Моделирование на макроуровне

Модели макроуровня получаются, когда происходит переход от распределенных параметров к сосредоточенным – выделяются крупные элементы объектов и их параметры сосредоточиваются в одной точке: масса балки оказывается сосредоточенной в центре тяжести, поле потенциалов характеризуется величиной одного напряжения, поток электронов моделируется электрическим током и т.п. Происходит дискретизация пространства, однако время – по прежнему непрерывная величина. Математическими моделями на макроуровне являются обыкновенные дифференциальные или интегро-дифференциальные уравнения.

Поведение (состояние) моделируемых объектов, состоящих из физически однородных элементов, в которых описываются процессы определенной физической природы (механические, электрические, гидравлические, тепловые), можно характеризовать с помощью фазовых переменных двух типов – типа потенциала и типа потока.

В табл. 1.2 приведены типы фазовых переменных для объектов разной физической природы

Таблица 1.2. – Фазовые переменные для разных физических систем

Система	Фазовые переменные	
	типа потенциала	типа потока
Электрическая	Электрическое напряжение	Электрический ток
Механическая	Скорость	Сила
Механическая вращательная	Угловая скорость	Вращательный момент
Тепловая	Температура	Тепловой поток
Гидравлическая и пневматическая	Давление	Расход

В большинстве технических объектов можно выделить три типа пассивных простейших элементов:

• **типа *R*** – элемент рассеивания (диссипации) энергии (как правило, преобразования энергии в тепловую и ее рассеивания);

• **типа *C* и типа *L*** – элементы накопления потенциальной и кинетической энергии.

Кроме пассивных элементов существуют два активных элемента – источник напряжения и источник тока.

Уравнения, описывающие свойства элементов объекта, называют компонентными. В них входят переменные типа потенциала и типа потока.

Способ связи элементов отражается с помощью других уравнений, которые называют топологическими. В них входят переменные одного типа: либо потенциала, либо потока. Топологические уравнения могут выражать:

- законы сохранения,
- условия непрерывности,
- равновесия,
- баланса и т.п.

Математические модели объектов есть совокупность компонентных и топологических уравнений.

Рассмотрим примеры компонентных и топологических уравнений для некоторых разных по своей физической природе объектов.

1) Электрические системы.

Основными фазовыми переменными электрических систем являются напряжения и токи в различных элементах систем. Компонентные уравнения элементов имеют вид

$$U = RL, \quad I = C\frac{dI}{dt}, \quad U = L\frac{dI}{dt} \qquad (1.12.)$$

где U – напряжение; I – ток; R – сопротивление; C – емкость; L – индуктивность.

При соединении элементов (резисторов, емкостей, индуктивностей) между собой образуется схема, соединение элементов в которой отражается топологическими уравнениями: ими являются законы Кирхгофа:

$$\sum_j I_j = 0, \quad \sum_i U_i = 0 \tag{1.13.}$$

где уравнения токов записываются для узлов, а уравнения напряжений для контуров. В ЭЭС имеются достаточно сложные элементы, и при их моделировании применяют схемы замещения, состоящие из сопротивлений, емкостей и индуктивностей.

2) Механическая система. Элементами механических поступательных систем являются:

• элементы механического сопротивления, отражающие потери механической энергии на разные виды трения;

• элементы масс, отражающие свойства инерционности

• элементы гибкости, отражающие свойства упругости.

Роль фазовых переменных в механических системах выполняют либо силы и скорости, либо силы и перемещения.

Компонентные уравнения имеют вид:

$$V = R_m F, \quad F = m\frac{dV}{dt}, \quad V = L_m \frac{dF}{dt} \tag{1.14.}$$

где V – скорость; F – сила; R – коэффициент, учитывающий зависимость силы трения от скорости; m – масса – аналог электрической емкости; Lm – гибкость – параметр, являющийся аналогом электрической индуктивности.

Первое выражение в (1.14) указывает на связь скорости и силы через коэффициент вязкого трения $k_T = \dfrac{1}{R_m}$. Второе выражение является вторым законом Ньютона. Третье выражение в (1.14) получено из уравнения перемещения пружины x под действием силы $F = kx$, где k – коэффициент жесткости пружины. После дифференцирования последнего выражения получаем

$$\frac{dF}{dt} = k\frac{dx}{dt} = kV \tag{1.15.}$$

Если обозначить $L_m = \dfrac{1}{k}$ (механическая гибкость), то получим третье выражение в (1.14).

Топологические уравнения механической системы выражают уравнение равновесия сил, являющееся аналогом первого закона Кирхгофа, и уравнение сложения скоростей, в соответствие с которым сумма абсолютной, относительной и переносной скоростей равна нулю (аналог второго закона Кирхгофа).

$$\sum_j F_j = 0, \quad \sum_i V_i = 0 \tag{1.16.}$$

6.3. Моделирование на метауровне

Математические модели на микроуровне учитывали распределенностью параметров объекта в пространстве. Переход на макроуровень характеризуется дискретизацией пространства – параметры объекта считаются сосредоточенными в отдельных точках пространства. Метауровень имеет математические модели, где вводятся еще большие допущения и упрощения, что позволяет получать доступные для исследования математические модели больших объектов и систем.

Существует несколько допущений при построении математических моделей на метауровне, к ним относятся:

1) дискретизация времени, т.е. наряду с введением сосредоточенных параметров переменные и параметры модели считаются независящими непрерывно от времени;

2) потери энергии в объекте не учитываются;

3) переход к факторным моделям;

4) переход к функциональным моделям, в которых используется
только один вид фазовой переменной – сигнал;

5) эквивалентирование – замена больших систем их упрощенными моделями – эквивалентами, созданными на основе специальных критериев и др.

Так, например, решать задачи регулирования частоты и обменной мощности в Единой энергосистеме (ЕЭС) России можно с помощью модели, которая может обозримо представить все составные части этого большого и сложного объекта с учетом пропускной способности межу объединениями энергосистем (ОЭС). На рис. 1.6 показаны связи между отдельными ОЭС, входящими в ЕЭС России. Параметрами такой модели могут служить значения пропускной способности связей, мощности отдельных ОЭС и «коэффициенты жесткости» (отношения предела статической устойчивости связи к меньшей мощности из соединяемых частей ОЭС). В такой модели параметры и переменные могут считаться неизменными на длительных интервалах времени и потери электрической энергии не учитываются.

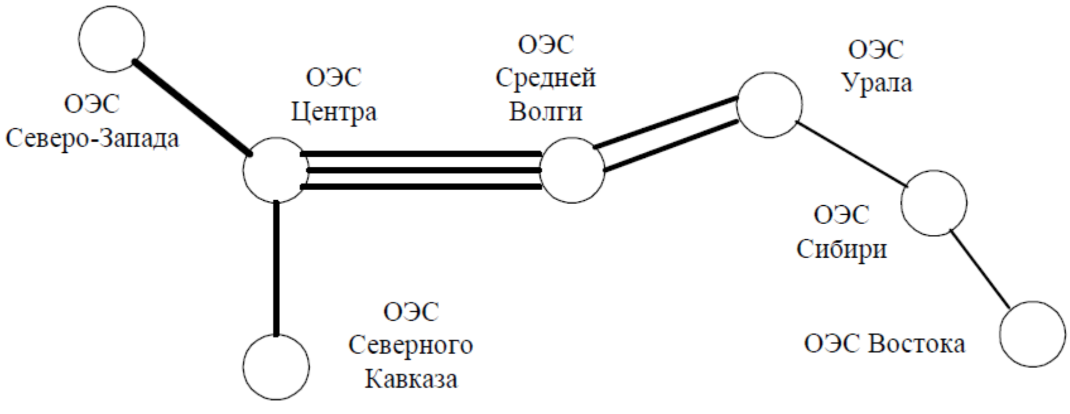


Рисунок 1.6. Схема связей между ОЭС ЕЭС России.

Функциональное моделирование является предметом изучения отдельной дисциплины – теории автоматического регулирования.

Эквивалентирование – это преобразование электрической схемы на основе специальных критериев с целью ее упрощения. Обычно в сложной ЭЭС выделяется часть схемы сети, для которой выполняется анализ режимов работы, все остальные преобразуются в эквивалентные схемы. Так, рассматривая режимы работы отдельной ЭЭС, все соседние энергосистемы представляются их эквивалентами или в большом энергообъединении сохраняются только мощные высоковольтные линии и подстанции, а сети более низкого напряжения представляются эквивалентами.

Вопросы для самопроверки

1. По каким признакам различают переменные в математических моделях?
2. Чем различаются прямые и обратные задачи исследования объекта при его моделировании?
3. Как подразделяются дискретные переменные в математических моделях?
4. Поясните свойство адекватности математической модели.
5. Что представляют собой математические модели на микроуровне?
6. Что представляют собой математические модели на макроуровне?
7. Что представляют собой математические модели на метауровне?

Заключительная часть занятия: Ответить на вопросы, обратить их внимание на необходимость знания изученного материала.

Проверить качество усвоения учебного материала занятия.

Подвести итог занятия, оценить знания и действия.

Выдать задание на самостоятельную работу.

Объявить тему и место проведения очередного занятия, дать команду о наведении порядка в классе и об окончании занятия.

Доцент кафедры к.т.н. доцент: Максимов В.В

«___» __________201 г.

Обсуждено на заседании кафедры «___» __________ 201 г.,

протокол № ___