МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение

высшего профессионального образования

К Г Э У

«КАЗАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

(ФГБОУ ВО «КГЭУ»)

Кафедра № ЭСиС

Экз. № ____

УЧЕБНО - МЕТОДИЧЕСКАЯ РАЗРАБОТКА

по учебной дисциплине

Б.1.В.ДВ.13. ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЭЛЕКТРОЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ СИСТЕМ

ЛЕКЦИЯ:
УРАВНЕНИЯ УСТАНОВИВШЕГОСЯ РЕЖИМА

УТВЕРЖДАЮ

Заведующий кафедрой ЭСиС

Максимов В.В.

« »____________ 201_ г.

УЧЕБНО - МЕТОДИЧЕСКАЯ РАЗРАБОТКА

по учебной дисциплине «Физико-математическое моделирование электроэнергетических систем»

Лекция: Уравнения установившегося режима
Учебные и воспитательные цели:

1. Дать систематизированные знания о физико-математическом моделировании электроэнергетических систем.
2. Воспитывать добросовестное отношение к учебе, стремление к самосовершенствованию, к овладению избранной профессией.

Вид занятия: лекция

Продолжительность занятия: 2 часа.

Структура занятия и расчет времени.

№ п/п	Структура занятия	Время, мин
1	**Вводная часть**	**10-15**
2	**Основная часть** **1. Узловые уравнения установившегося режима** **2. Формы линейных уравнений установившегося режима и их решение** **3. Нелинейные уравнения установившегося режима**	**70-75**
3	**Заключительная часть**	**3-5**

Вводная часть занятия: проверить наличие и готовность обучающихся к занятию; провести опрос по пройденному материалу в соответствии с перечнем вопросов и подвести его итоги; объявить тему и учебные цели занятия; обратить внимание обучающихся на важность изучения учебных вопросов занятия, так как знание их может быть востребовано при выполнении курсовой работы и выпускной квалификационной работы.

Основная часть занятия: учебные вопросы занятия изучаются в составе группы с применением диафильма, диапроектора, стендов, плакатов, классной доски, цветных мелков. Изучать материал занятия следует в строгом соответствии с учебной программой и тематическим планом изучения учебной дисциплины.

Наименование учебных вопросов преподаватель объявляет последовательно по мере изложения учебного материала и записывает их на классной доске.

На классной доске следует также записывать номер и название темы и занятия, учебные вопросы, цифровые характеристики, формулы, непонятные и сложные для обучаемых термины, чертить поясняющие схемы. Записи на классной доске вести последовательно и аккуратно.

В ходе изложения учебного материала необходимо контролировать степень усвоения учебного материала путем постановки контрольных и проблемных вопросов.

При изучении учебного материала обучающихся должны вести конспект. Контроль за качеством ведения конспектов преподаватель осуществляет в ходе проведения занятия.

Основная часть занятия:

1. Узловые уравнения установившегося режима.

Рассмотрим пример направленного графа электрической сети, изображенного на рис. 3.10.

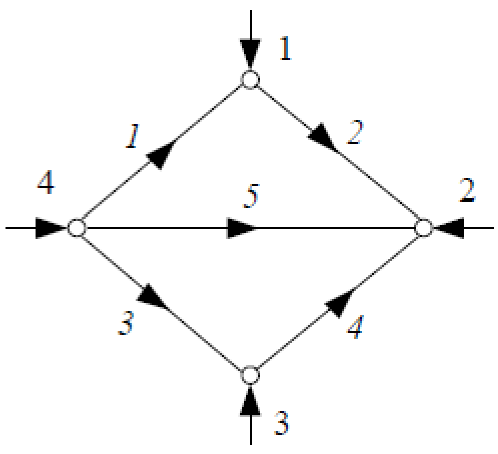

Рис. 3.10. Пример графа электрической сети

Для удобства записи в матричной форме параметров ветвей присвоим каждой ветви ее порядковый номер (на рис. 3.10 курсив). Составим матрицу соединений **M** для этого графа

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \qquad (3.10)$$

Умножим эту матрицу на матрицу токов ветвей, будем иметь:

$$\mathbf{M} \cdot \underline{\mathbf{I}} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{I}_2 \\ \underline{I}_3 \\ \underline{I}_4 \\ \underline{I}_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\underline{I}_1 + \underline{I}_2 \\ -\underline{I}_2 - \underline{I}_4 - \underline{I}_5 \\ -\underline{I}_3 + \underline{I}_4 \\ \underline{I}_1 + \underline{I}_3 + \underline{I}_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{J}_1 \\ \underline{J}_2 \\ \underline{J}_3 \\ \underline{J}_4 \end{pmatrix}. \qquad (3.11)$$

Полученное соотношение является первым законом Кирхгофа в матричной форме записи

$$M \times I = J \qquad (3.12.)$$

Так как к узлам графа электрической сети еще присоединены другие поперечные ветви с ЭДС и проводимостью шунта, то задающий ток в (3.12) включает в себя также токи данных ветвей

$$J = \underline{J}_{\Gamma} - \underline{J}_{H} - \underline{J}_{Y} \qquad (3.13)$$

Здесь: $\underline{\boldsymbol{J}}_{г}$ – матрица токов генерации (ветви с ЭДС), которые определяются через мощности генерации;

$\underline{\boldsymbol{J}}_{н}$ – матрица токов нагрузки, которые определяются через мощности нагрузки (имеет обратное направление – от узла);

$\underline{\boldsymbol{J}}_{Y}$ – матрица токов в проводимостях шунтов, которые зависят от проводимости шунта из матрицы $\underline{\boldsymbol{Y}}_{N}$ и напряжения в узле из матрицы $\underline{\boldsymbol{U}}$ (также имеет обратное направление – от узла, так как моделирует потребление мощности).

Умножим транспонированную матрицу соединений $\boldsymbol{M}^{T}$ на матрицу узловых напряжений, получим:

$$\mathbf{M}^{T} \cdot \underline{\mathbf{U}} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{U}_2 \\ \underline{U}_3 \\ \underline{U}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\underline{U}_1 + \underline{U}_4 \\ \underline{U}_1 - \underline{U}_2 \\ -\underline{U}_3 + \underline{U}_4 \\ -\underline{U}_2 + \underline{U}_3 \\ -\underline{U}_2 + \underline{U}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta\underline{U}_1 \\ \Delta\underline{U}_2 \\ \Delta\underline{U}_3 \\ \Delta\underline{U}_4 \\ \Delta\underline{U}_5 \end{pmatrix} \qquad (3.14)$$

Или

$$\underline{U} = M^T \times \underline{U} \qquad (3.15.)$$

По закону Ома в матричной форме записи имеем:

$$\underline{U} = \underline{Z}_B \times I \qquad (3.16.)$$

Или

$$\underline{I} = \underline{Z}_B^{-1} \times \Delta\underline{U} \qquad (3.17.)$$

Подставим в (3.12) выражение для матрицы токов ветвей (3.17) и затем (3.15) и получим

$$M \times \underline{Z}_B^{-1} \times M^T \times \underline{U} = \underline{J} \qquad (3.18)$$

Введем обозначение

$$\underline{Y} = M \times \underline{Z}_B^{-1} \times M^T \qquad (3.19)$$

Тогда (3.18) приобретет вид

$$\underline{Y} \times \underline{U} = \underline{J} \qquad (3.20)$$

Полученное соотношение является уравнением узловых напряжений (потенциалов) в матричной форме записи. Матрицу $\underline{\boldsymbol{Y}}$ называют матрицей узловых проводимостей электрической сети. Рассмотрим структуру этой матрицы, для чего выполним матричные перемножения в (3.19). Заметим, что обратная матрица сопротивлений ветвей легко получается в силу своего диагонального вида – ее элементы суть обратные величины к сопротивлениям ветвей и являются проводимостями продольных ветвей.

Вначале перемножим первые две матрицы матричного произведения (3.19):

$$\mathbf{M}\cdot\underline{\mathbf{Z}}_{\text{в}}^{-1}=\begin{pmatrix}-1&1&0&0&0\\0&-1&0&-1&-1\\0&0&-1&1&0\\1&0&1&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\frac{1}{\underline{Z}_1}&&&&\\&\frac{1}{\underline{Z}_2}&&&\\&&\frac{1}{\underline{Z}_3}&&\\&&&\frac{1}{\underline{Z}_4}&\\&&&&\frac{1}{\underline{Z}_5}\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\underline{Z}_1}&\frac{1}{\underline{Z}_2}&0&0&0\\0&-\frac{1}{\underline{Z}_2}&0&-\frac{1}{\underline{Z}_4}&-\frac{1}{\underline{Z}_5}\\0&0&-\frac{1}{\underline{Z}_3}&\frac{1}{\underline{Z}_4}&0\\\frac{1}{\underline{Z}_1}&0&\frac{1}{\underline{Z}_3}&0&\frac{1}{\underline{Z}_5}\end{pmatrix}\qquad(3.21)$$

Полученную матрицу умножим справа на матрицу $\boldsymbol{M}^T$. В результате получим:

$$\underline{\mathbf{Y}}=\begin{pmatrix}\left(\frac{1}{\underline{Z}_1}+\frac{1}{\underline{Z}_2}\right)&-\frac{1}{\underline{Z}_2}&0&-\frac{1}{\underline{Z}_1}\\-\frac{1}{\underline{Z}_2}&\left(\frac{1}{\underline{Z}_2}+\frac{1}{\underline{Z}_4}+\frac{1}{\underline{Z}_5}\right)&-\frac{1}{\underline{Z}_4}&-\frac{1}{\underline{Z}_5}\\0&-\frac{1}{\underline{Z}_4}&\left(\frac{1}{\underline{Z}_3}+\frac{1}{\underline{Z}_4}\right)&-\frac{1}{\underline{Z}_3}\\-\frac{1}{\underline{Z}_1}&-\frac{1}{\underline{Z}_5}&-\frac{1}{\underline{Z}_3}&\left(\frac{1}{\underline{Z}_1}+\frac{1}{\underline{Z}_3}+\frac{1}{\underline{Z}_5}\right)\end{pmatrix}.(3.22)$$

Из полученной матрицы можно сделать следующие выводы о вычислении ее элементов (свойства матрицы):

1) Элементы, расположенные на главной диагонали матрицы, вычисляются как сумма проводимостей ветвей, подходящих к соответствующему узлу:

$$\underline{Y}_{ii} = \sum_{j \in \omega_i} \frac{1}{\underline{Z}_j}, \tag{3.23}$$

где $\underline{Y}_{ij}$ – диагональный элемент матрицы $\underline{\mathbf{Y}}$;

$\underline{Z}_j$ – сопротивление j-й ветви;

ω_i – множество номеров узлов, связанных с i-м узлом.

2) ***Недиагональные элементы равны проводимостям ветвей, имя каждой из которых состоит из номеров узлов, соответствующих номеру строки и номеру столбца, на пересечении которых находится данный элемент, и взятых с противоположным знаком.*** Матрица $\underline{\mathbf{Y}}$ является симметричной матрицей.

$$\underline{Y}_{ij} = -\frac{1}{\underline{Z}_{ij}}. \tag{3.24}$$

Запишем уравнение узловых напряжений для узла с номером i:

$$\begin{aligned} &\underline{Y}_{i1}\underline{U}_1 + \underline{Y}_{i2}\underline{U}_2 + \ldots + \underline{Y}_{ii}\underline{U}_i + \ldots + \underline{Y}_{in}\underline{U}_n = \underline{J}_i = \\ &= \underline{J}_{\Gamma i} - \underline{J}_{\text{Н}i} - \underline{J}_{\text{Y}i} = \underline{J}_{\Gamma i} - \underline{J}_{\text{Н}i} - \underline{Y}_{Ni}\underline{U}_i. \end{aligned} \tag{3.25}$$

Объединив подобные члены, получим, что в диагональные элементы матрицы $\underline{\boldsymbol{Y}}$ войдут дополнительные слагаемые $\underline{Y}_{Ni}$:

$$\underline{Y}_{ii} = \sum_{j \in \omega_i} \frac{1}{\underline{Z}_j} + \underline{Y}_{Ni}, \tag{3.26}$$

т. е. диагональный элемент будет равен сумме проводимостей всех подходящих к i-му узлу ветвей, включая поперечную ветвь – шунт $\underline{Y}_{Ni}$.

Задающие токи узлов в (3.20) будут состоять только из токов генерации и токов нагрузки.

В случае отсутствия связей с нейтральной плоскостью N система уравнений (3.20) не имеет единственного решения, так как в этом случае определитель матрицы $\underline{\boldsymbol{Y}}$ равен нулю. Сумма всех задающих токов в такой сети равна нулю:

$$\sum_{i=1}^{n} J_i = 0. \tag{3.27}$$

Следовательно, среди всех n узлов можно выделить узел, например, с номером n, ток в котором равен

$$J_n = -\sum_{i=1}^{n-1} J_i. \qquad (3.28)$$

Для уравнений узловых напряжений это означает, что одно уравнение лишнее, т. е. зависит от остальных уравнений и может быть получено через сумму всех остальных уравнений. Так как ток в этом узле может быть получен из баланса токов в сети (3.28), то его называют *балансирующим*. Обычно это шины мощной электростанции или системы.

Таким образом, из системы (2.20) исключается одно уравнение и тогда получается система независимых линейных уравнений порядка n – 1. Однако, поскольку число неизвестных напряжений по-прежнему равно n, в одном из узлов следует задать напряжение по величине и фазе так, чтобы все напряжения вычислялись относительно этого известного напряжения. Такой узел в сети называется *базисным*. Обычно фазу напряжения базисного узла принимают равной нулю, т. е. вектор напряжения базисного узла совмещают с действительной осью. Остальные узлы называют независимыми узлами.

Во многих случаях балансирующий узел и базисный узел совмещают, и в дальнейшем будем считать, что это один и тот же узел.

Таким образом, с исключением уравнения для базисного балансирующего узла с номером n будем иметь систему уравнений (3.20) с числом уравнений n – 1, однако в эти уравнения будет входить слагаемое с заданным напряжением базисного узла.

Изменим номер базисного балансирующего узла. Пусть его номер есть 0 (ноль). Тогда уравнение (3.20) приобретет следующий вид:

$$\underline{Y} \times \underline{U} + \underline{Y}_0 U_0 = \underline{J} \qquad (3.29)$$

где $\underline{\mathbf{Y}}_0$ – матрица проводимостей ветвей, связывающих независимые узлы с базисным балансирующим узлом;
U_0 – напряжение базисного узла (скаляр).

Матрица узловых проводимостей в (3.29) имеет порядок n – 1 и определятся через матрицу инциденций **M**, в которой нет одной строки, соответствующей балансирующему узлу.

Необходимо заметить, что во всех уравнениях, где одновременно присутствуют токи и напряжения: (3.16), (3.17), (3.18), (3.20), (3.25) и (3.29), напряжения даны в фазных значениях, хотя индекс (буква «ф») для простоты не записывался. Эти же уравнения можно считать записанными и для линейных напряжений, однако токи будут увеличенными в $\sqrt{3}$ раз и для вычисления истинных токов их следует уменьшать в $\sqrt{3}$.

2. Формы линейных уравнений установившегося режима и их решение

Известными независимыми переменными в уравнениях установившегося режима могут быть задающие токи узлов и напряжение базисного узла. В этом случае решение уравнения (3.29) может быть записано в виде

$$\underline{\mathbf{U}} = \underline{\mathbf{Y}}^{-1} \cdot \left(\mathbf{J} - \underline{\mathbf{Y}}_0 U_0 \right) = \underline{\mathbf{Z}} \cdot \left(\mathbf{J} - \underline{\mathbf{Y}}_0 U_0 \right). \qquad (3.30)$$

Здесь $\underline{\mathbf{Z}}$ – матрица узловых сопротивлений.

Численное решение системы уравнений (3.29) выполняется методом Гаусса или другим методом решения системы линейных алгебраических уравнений.

В случае, когда известны мощности в узлах сети – задающие мощности $\underline{S}_i$, токи можно вычислить приближенно через номинальные напряжения

$$\underline{J}_i = \frac{\underline{S}_i^*}{\sqrt{3} U_{НОМ}} \qquad (i=1,\ldots n-1)$$

Задающие мощности, так же как и токи, складываются из мощности генерации и мощности нагрузки:

$$\underline{S} = \underline{S}_{г} - \underline{S}_{н} \qquad (3.31)$$

Другой приближенный подход связан с представлением задающих токов через напряжения и проводимости $\underline{J}_i = U_i \underline{Y}_{Si}$, где $\underline{Y}_{Si}$ – проводимость генерации и/или нагрузки (схема замещения). Для i-го узла имеем:

$$\underline{Y}_{i1}\underline{U}_1 + \underline{Y}_{i2}\underline{U}_2 + \ldots + \underline{Y}_{ii}\underline{U}_i + \ldots + \underline{Y}_{in-1}\underline{U}_{n-1} + \underline{Y}_{i0}U_0 = \underline{J}_i = \underline{Y}_{Si}\underline{U}_i. \qquad (3.32)$$

Объединив подобные члены, получим

$$\underline{Y}_{i1}\underline{U}_1 + \underline{Y}_{i2}\underline{U}_2 + \ldots + \underline{Y}_{ii}\underline{U}_i + \ldots + \underline{Y}_{in-1}\underline{U}_{n-1} + \underline{Y}_{i0}U_0 = 0, \qquad (3.33)$$

где в элемент $\underline{Y}_{ii}$ входит проводимость $\underline{Y}_{Si}$. Знак перед этой проводимостью зависит от того, какая мощность преобладает в узле: плюс, если нагрузка, и минус, если генерация. В матричной форме записи:

$$\underline{\mathbf{Y}} \cdot \underline{\mathbf{U}} + \underline{\mathbf{Y}}_0 U_0 = 0. \qquad (3.34)$$

Решение матричного уравнения (3.34) запишется в виде

$$\underline{\mathbf{U}} = -\underline{\mathbf{Y}}^{-1} \cdot \underline{\mathbf{Y}}_0 U_0 = -\underline{\mathbf{Z}} \cdot \underline{\mathbf{Y}}_0 U_0. \qquad (3.35)$$

Комплексную матрицу узловых проводимостей $\underline{\mathbf{Y}}$ иногда представляют в блочной форме через ее вещественную **G** и мнимую **B** составляющие и тогда система уравнений (3.34) становится системой с вещественными величинами:

$$\left(\mathbf{G}+j\mathbf{B}\right)\cdot\left(\mathbf{U}'+j\mathbf{U}''\right)+\left(\mathbf{G}_0+j\mathbf{B}_0\right)U_0=0. \qquad (3.36)$$

После перемножения двучленов в (3.35), будем иметь:

$$\left(\mathbf{G}\cdot\mathbf{U}'-\mathbf{B}\cdot\mathbf{U}''\right)+j\left(\mathbf{B}\cdot\mathbf{U}'+\mathbf{G}\cdot\mathbf{U}''\right)+\mathbf{G}_0U_0+j\mathbf{B}_0U_0=0. \qquad (3.37)$$

Приравняем отдельно вещественные и мнимые части полученного уравнения и получим два матричных уравнения с вещественными величинами:

$$\begin{gathered}\mathbf{G}\cdot\mathbf{U}'-\mathbf{B}\cdot\mathbf{U}''+\mathbf{G}_0U_0=0,\\ \mathbf{B}\cdot\mathbf{U}'+\mathbf{G}\cdot\mathbf{U}''+\mathbf{B}_0U_0=0\end{gathered} \qquad (3.38)$$

или в компактной форме записи:

$$\begin{pmatrix}\mathbf{G} & -\mathbf{B}\\ \mathbf{B} & \mathbf{G}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\mathbf{U}'\\ \mathbf{U}''\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\mathbf{G}_0\\ \mathbf{B}_0\end{pmatrix}U_0=0. \qquad (3.39)$$

Решение (3.39) запишется в виде

$$\begin{pmatrix}\mathbf{U}'\\ \mathbf{U}''\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}\mathbf{G} & -\mathbf{B}\\ \mathbf{B} & \mathbf{G}\end{pmatrix}^{-1}\cdot\begin{pmatrix}\mathbf{G}_0\\ \mathbf{B}_0\end{pmatrix}U_0. \qquad (3.40)$$

3. Нелинейные уравнения установившегося режима.

Так как во многих случаях расчеты ведутся при заданных мощностях нагрузок и генерации, то их следует ввести в уравнения установившегося режима.

Мощность в трехфазной сети в симметричных режимах выражается суммарной мощностью всех трех фаз:

$$\underline{S}_i=\sqrt{3}\,\underline{U}_i\underline{J}_i^*. \qquad (3.41)$$

В матричной форме это выражение можно записать, используя операцию диагонализации матрицы $\underline{\mathbf{U}}$. Матрица **diag{$\underline{\mathbf{U}}$} есть квадратная матрица**, в которой элементы матрицы $\underline{\mathbf{U}}$ расположены по главной диагонали, а все остальные элементы равны нулю. Тогда

$$\underline{\mathbf{S}} = \sqrt{3} \cdot \mathrm{diag}\{\underline{\mathbf{U}}\} \cdot \underline{\mathbf{J}}^*. \tag{3.42}$$

Уравнение установившегося режима

$$\underline{\mathbf{Y}} \cdot \underline{\mathbf{U}} + \underline{\mathbf{Y}}_0 U_0 = 0.$$

записано для фазных токов и напряжений. Умножим обе части этого уравнения на $\sqrt{3}$ и применим к величинам этого уравнения операцию сопряжения, получим

$$\underline{\mathbf{Y}}^* \cdot \underline{\mathbf{U}}^* + \underline{\mathbf{Y}}_0^* U_0 = \sqrt{3} \cdot \underline{\mathbf{J}}^*. \tag{3.43}$$

В левой части этого уравнения после умножения на $\sqrt{3}$ напряжения стали линейными.

Умножим левую и правую части уравнения (3.43) на матрицу diag{**U**}, получим

$$\mathrm{diag}\{\underline{\mathbf{U}}\} \cdot \left(\underline{\mathbf{Y}}^* \cdot \underline{\mathbf{U}}^* + \underline{\mathbf{Y}}_0^* U_0\right) = \sqrt{3} \cdot \mathrm{diag}\{\underline{\mathbf{U}}\} \cdot \underline{\mathbf{J}}^* = \underline{\mathbf{S}}. \tag{3.44}$$

Система уравнений (3.44) является системой нелинейных уравнений установившегося режима.

В зависимости от формы представления комплексных величин применяют две основные формы этой системы уравнений.

3.1. Алгебраическая форма записи

В начале, рассмотрим алгебраическую форму записи. Для *i*-го узла имеем:

$$\left(U_i' + jU_i''\right) \cdot \sum_{j=0}^{n-1} \left(G_{ij} - jB_{ij}\right) \cdot \left(U_j' - jU_j''\right) = P_i + jQ_i. \tag{3.45}$$

После перемножения двучленов и разделения уравнения на два уравнения с вещественными величинами получим систему $2(n - 1)$ алгебраических уравнений.

$$\begin{aligned} &U_i' \cdot \sum_{j=0}^{n-1} \left(G_{ij} U_j' - B_{ij} U_j''\right) + U_i'' \cdot \sum_{j=0}^{n-1} \left(B_{ij} U_j' + G_{ij} U_j''\right) = P_i, \\ &-U_i' \cdot \sum_{j=0}^{n-1} \left(B_{ij} U_j' + G_{ij} U_j''\right) + U_i'' \cdot \sum_{j=0}^{n-1} \left(G_{ij} U_j' - B_{ij} U_j''\right) = Q_i. \end{aligned} \tag{3.46}$$

Здесь $i = 1, \ldots, n - 1$.

3.2. Тригонометрическая форма записи.

Тригонометрическая форма нелинейных уравнений установившегося режима может быть получена, если комплексные величины в уравнении (3.44) записать в виде:

$$\underline{U}_i = U_1 e^{j\delta_i}, \; \underline{Y}_{ij}^* = Y_{ij} e^{-j\psi_{ij}}, \; \underline{U}_j^* = U_j e^{-j\delta_j}, \qquad (3.47)$$

Тогда

$$U_i \sum_{j=0}^{n-1} Y_{ij} U_j e^{j(\delta_i - \psi_{ij} - \delta_j)} = P_i + jQ_i. \qquad (3.48)$$

Уравнение (3.48) в тригонометрической форме запишется как

$$U_i \sum_{j=0}^{n-1} Y_{ij} U_j \left(\cos(\delta_i - \delta_j - \psi_{ij}) + j \sin(\delta_i - \delta_j - \psi_{ij}) \right) = P_i + jQ_i \qquad (3.49)$$

$$U_i \sum_{j=0}^{n-1} Y_{ij} U_j \left(\cos(\delta_i - \delta_j - \psi_{ij}) + j \sin(\delta_i - \delta_j - \psi_{ij}) \right) = P_i + jQ_i \qquad (3.50)$$

и после разделения на два вещественных уравнения

$$\begin{aligned} U_i \sum_{j=0}^{n-1} Y_{ij} U_j \cos(\delta_i - \delta_j - \psi_{ij}) &= P_i, \\ U_i \sum_{j=0}^{n-1} Y_{ij} U_j \sin(\delta_i - \delta_j - \psi_{ij}) &= Q_i. \end{aligned} \qquad (3.51)$$

Обычно вместо угла ψ_{ij} используют дополняющий до 90° угол α_{ij}.
$\alpha_{ij} = 90 - \psi_{ij}$, $\psi_{ij} = 90 - \alpha_{ij}$.

Тогда $\cos(\delta_i - \delta_j - \psi_{ij}) = \cos(\delta_i - \delta_j - 90° + \alpha_{ij})$, а с учетом четности функции косинус $\cos(\delta_i - \delta_j - 90° + \alpha_{ij}) = \cos(90° - \delta_i + \delta_j - \alpha_{ij})$. Имея в виду, что $\cos(90° - \beta) = \sin(\ )$, получим: $\cos(90° - \delta_i + \delta_j - \alpha_{ij}) = \sin(\delta_i - \delta_j + \alpha_{ij})$.

Аналогично $\sin(\delta_i - \delta_j - \psi_{ij}) = \sin(\delta_i - \delta_j - 90 + \alpha_{ij}) = -\sin(90° - \delta_i + \delta_j - \alpha_{ij})$, в силу нечетности функции синус. Так как $\sin(90° - \beta) = \cos(\beta)$, получим: $-\sin(90° - \delta_i + \delta_j - \alpha_{ij}) = -\cos(\delta_i - \delta_j + \alpha_{ij})$. Подставляя полученные соотношения в (3.51), будем иметь:

$$U_i \sum_{j=0}^{n-1} Y_{ij} U_j \sin(\delta_i - \delta_j + \psi_{ij}) = P_i,$$
$$-U_i \sum_{j=0}^{n-1} Y_{ij} U_j \cos(\delta_i - \delta_j + \psi_{ij}) = Q_i. \qquad (3.52)$$

В полученной системе нелинейных уравнений установившегося режима искомыми переменными являются модули и фазовые углы напряжений, в то время как в уравнениях (3.46) неизвестными являются вещественная и мнимая составляющие напряжений.

Заключительная часть занятия: Ответить на вопросы, обратить их внимание на необходимость знания изученного материала.

Проверить качество усвоения учебного материала занятия.

Подвести итог занятия, оценить знания и действия.

Выдать задание на самостоятельную работу.

Объявить тему и место проведения очередного занятия, дать команду о наведении порядка в классе и об окончании занятия.

Доцент кафедры к.т.н. доцент: Максимов В.В

«___» __________201 г.

Обсуждено на заседании кафедры «___» __________ 201 г.,

протокол № ___