МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение

высшего профессионального образования

К Г Э У

«КАЗАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

(ФГБОУ ВО «КГЭУ»)

Кафедра № ЭСиС

Экз. № ____

УЧЕБНО - МЕТОДИЧЕСКАЯ РАЗРАБОТКА

по учебной дисциплине

Б.1.В.ДВ.13. ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЭЛЕКТРОЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ СИСТЕМ

ЛЕКЦИЯ:
ПОСТРОЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ

УТВЕРЖДАЮ

Заведующий кафедрой ЭСиС

Максимов В.В.

« »____________ 201_ г.

УЧЕБНО - МЕТОДИЧЕСКАЯ РАЗРАБОТКА

по учебной дисциплине «Физико-математическое моделирование электроэнергетических систем»

Лекция: Построение математических моделей

Учебные и воспитательные цели:

1. Дать систематизированные знания о физико-математическом моделировании электроэнергетических систем.
2. Воспитывать добросовестное отношение к учебе, стремление к самосовершенствованию, к овладению избранной профессией.

Вид занятия: лекция

Продолжительность занятия: 2 часа.

Структура занятия и расчет времени.

№ п/п	Структура занятия	Время, мин
1	**Вводная часть**	**10-15**
2	**Основная часть** **1. Процесс описания объектов моделирования** **2. Аналитический метод построения математических моделей** **3. Методы идентификации технических объектов** **4. Выбор структуры математической модели и вычисление ее параметров**	**70-75**
3	**Заключительная часть**	**3-5**

Вводная часть занятия: проверить наличие и готовность обучающихся к занятию; провести опрос по пройденному материалу в соответствии с перечнем вопросов и подвести его итоги; объявить тему и учебные цели занятия; обратить внимание обучающихся на важность изучения учебных вопросов занятия, так как знание их может быть востребовано при выполнении курсовой работы и выпускной квалификационной работы.

Основная часть занятия: учебные вопросы занятия изучаются в составе группы с применением диафильма, диапроектора, стендов, плакатов, классной доски, цветных мелков. Изучать материал занятия следует в строгом соответствии с учебной программой и тематическим планом изучения учебной дисциплины.

Наименование учебных вопросов преподаватель объявляет последовательно по мере изложения учебного материала и записывает их на классной доске.

На классной доске следует также записывать номер и название темы и занятия, учебные вопросы, цифровые характеристики, формулы, непонятные и сложные для обучаемых термины, чертить поясняющие схемы. Записи на классной доске вести последовательно и аккуратно.

В ходе изложения учебного материала необходимо контролировать степень усвоения учебного материала путем постановки контрольных и проблемных вопросов.

При изучении учебного материала обучающихся должны вести конспект. Контроль за качеством ведения конспектов преподаватель осуществляет в ходе проведения занятия.

Основная часть занятия:

1. **Процесс описания объектов моделирования**

Моделирование как основной научный метод в начальной стадии своего развития был главным образом предметом искусства исследователя. Процесс построения моделей определялся теоретическим багажом исследователя, его неформальными представлениями о цели работы, опытом, экспериментаторским мастерством и интуицией.

Вместе с тем опыт модельных исследований все более сложных объектов убедительно показывал, что качество модели и особенно трудоемкость ее создания решающим образом зависят от того, сколь целесообразно организован процесс изучения объекта, построения проверки и практического использования его модельного описания. Возникла задача оптимизации процесса моделирования.

Наибольшее развитие методика и практика планирования и осуществления модельных исследований получили в рамках таких направлений, как исследование операций и прикладной системный анализ.

В сложных случаях, когда невозможно составить модели с помощью известных теоретических представлений, получили развитие экспериментальные исследования, названные ***идентификацией объектов***.

Применительно к этим исследованиям зародилась и стала стремительно развиваться теория оптимального планирования эксперимента, обеспечивающая получение необходимой экспериментальной информации об объекте при минимальной затрате сил и средств.

В модельном исследовании можно выделить следующие основные этапы:

- постановку задачи,
- построение модели,
- отыскание решения,
- проверку модели и оценку решения,
- внедрение модели и контроль ее правильности.

Рассмотрим процесс модельного исследования с помощью его графического представления в форме блок-схемы (рис. 4.1).

1) Постановка задачи следует за выявлением некоторых противоречий и возникновением проблемы: потребности изменить в лучшую сторону существующее положение вещей в той или иной области.

Осмысление и конкретизация проблемы приводит к формулировке целей или системы целей как желательного результата будущей деятельности по решению проблемы. Однако поставленная цель, естественно, должна быть соотнесена с реальными возможностями ее достижения, или, иными словами, ресурсами (материальными и другими), которые могут быть использованы для решения данной проблемы. Сопоставление первоначально намеченных целей с ресурсными ограничениями (обычно приводящими к корректировке первых в сторону их сужения) приводит к формулировке задачи исследования, которая помимо непротиворечивой системы целей, учитывающих ресурсные возможности, включает в себя объект моделирования.

Данные о целях исследования, уточненные в формулировке задачи, а также исходная информация об объекте моделирования служат для определения критерия качества создаваемой модели – количественной меры степени ее совершенства. При традиционной постановке задачи исследования критерий обычно не носит формального характера и представляет собой некоторую систему количественных требований, которым должна отвечать будущая модель. В случае вполне формализованной оптимизационной постановки критерий приобретает вид некоторого функционала от переменных и параметров модели, значение которого достигает экстремума при оптимальных ее характеристиках (например, среднеквадратическая погрешность модельных переменных).

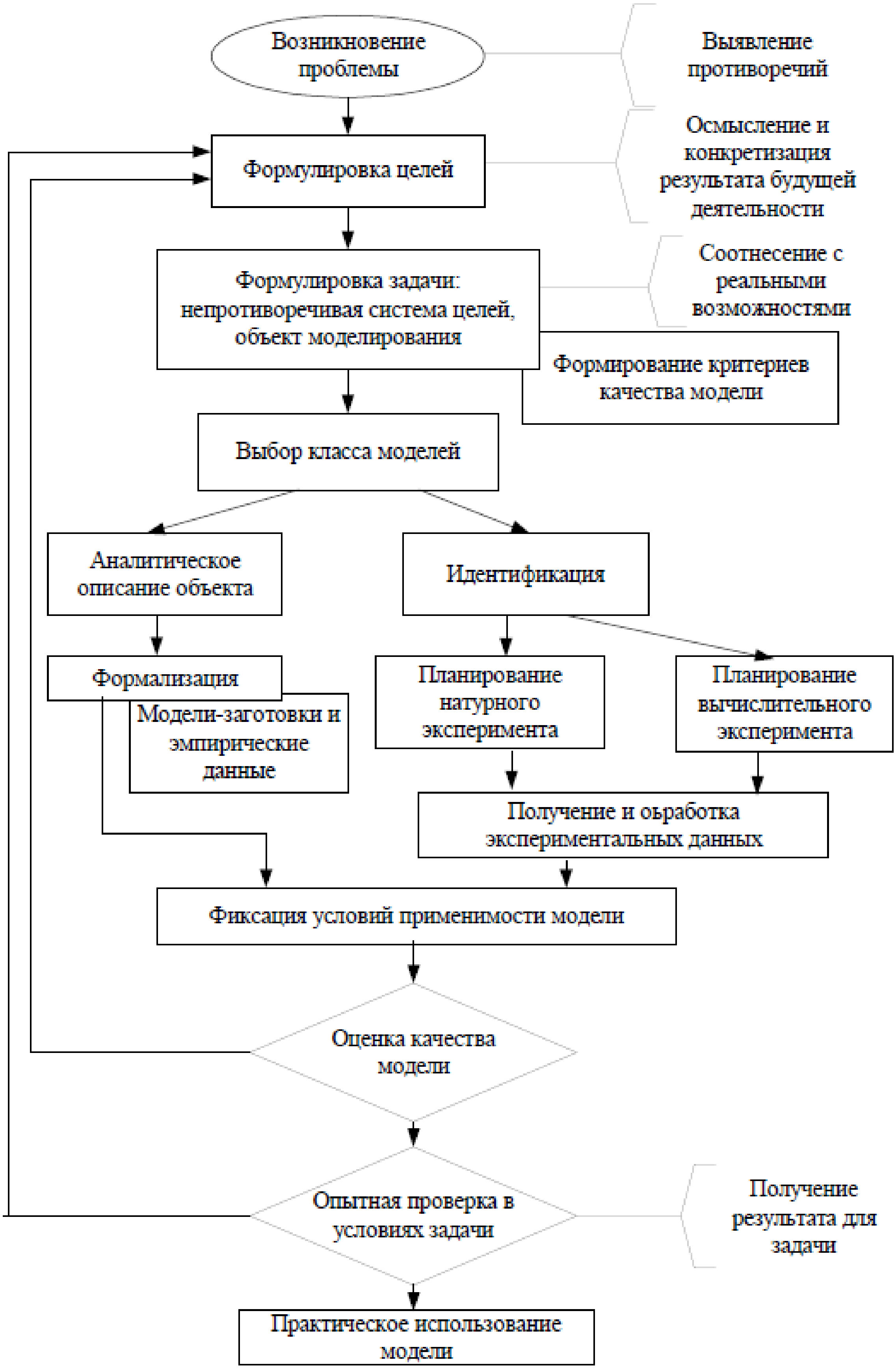

Рис. 4.1. Схема формирования модели

2) Следующим шагом в построении модели является основанный на априорных данных содержательный анализ системы и выбор класса,

или точнее, способа формирования модели. Если объект не слишком сложен, достаточно изучен и комплекс подлежащих модельному исследованию свойств и характеристик объекта может быть выявлен на основе теоретических представлений и данных (дополняемых необходимым объемом эмпирической информации), то целесообразно избрать аналитический путь построения модели. Однако на практике часто оказывается, что из-за сложности, слабой изученности объекта или отсутствия соответствующих теоретических разработок (например, применительно к комплексным системам, содержащим технические, информационные, биологические компоненты) этот путь не может быть реализован. Альтернативным является путь идентификации объекта, т.е. экспериментального определения существенных для решаемой задачи свойств и характеристик объекта специально ради построения его модели. Эксперимент, как правило, достаточно сложный и трудоемкий, осуществляется в соответствии со специально разрабатываемым оптимальным планом, данные эксперимента обрабатываются и становятся основой для формализованного описания объекта в виде математической модели вход – выход.

Формализованная модель, построенная теоретическим путем или идентифицированная, оценивается в соответствии с выбранным ранее критерием либо признается удовлетворительной (принимается), либо отвергается как недостаточно совершенная. В последнем случае возникает необходимость в ее корректировке и итеративном обращении к ранее выполненным этапам.

Решение о принятии модели (в общем случае после i-го итерационного цикла) влечет за собой переход к следующему этапу – опытной проверке непосредственно в условиях той задачи, для решения которой она построена. При этом нередко возникают дополнительные требования (например, связанные с удобством использования модели) и необходимость ее дополнительной корректировки.

3) Наконец, следует заключительный этап процесса: использование модели по ее прямому назначению – для решения задачи, причем и на этом этапе возможны дальнейшие уточнения и корректировки.

Остановимся на наиболее важных особенностях процесса моделирования в целом:

1) Построение модели представляет собой не однократный акт, а процесс последовательных приближений, в основе которого лежит самообучение исследователя.
2) Процесс моделирования соединяет в себе требования к ясно понимаемому существу решаемой задачи, с одной стороны, и

активному владению теорией, математическим аппаратом и методами – с другой стороны. Кроме того, необходимы хорошие знания возможностей вычислительной техники и ее использования.

3) Процесс построения модели является познавательной деятельностью и представляет собой важнейшую составную часть решения задачи в целом.

2. Аналитический метод построения математических моделей.

В распоряжении исследователя, решающего на основе моделирования конкретную задачу, сегодня находится огромное множество моделей-«заготовок», которые могут и должны быть использованы. Все эти заготовки получены на основе универсальных законов, таких, как закон сохранения вещества и энергии, начала термодинамики, закон всемирного тяготения. Однако вопрос о том, каким может быть удельный вес теоретической составляющей при построении каждой конкретной модели, целиком определяется требованиями задачи и характером объекта моделирования.

Возможность и рациональность теоретического подхода к моделированию некоторого объекта определяется целым рядом практически неподдающихся формальному анализу факторов, к числу которых относятся:

- степень изученности данного класса объектов и наличие теоретической базы, достаточной для модельного описания объекта в соответствии с требованиями решаемой задачи;

- приемлемость ограничений и допущений, содержащихся в исходных теоретических построениях, применительно к условиям и требованиям решаемой задачи;

- специфические свойства объекта-оригинала (степень сложности и размерность модели, возможность линеаризации, возможность и удобство применения стандартных, например частотных, методов для исследования модели объекта и т. п.);

- возможность и удобство введения в теоретическую модель необходимой дополнительной информации, получаемой опытным путем;

- возможность экспериментального исследования объекта-оригинала; В основе аналитических моделей, как правило, лежат балансовые соотношения, связывающие входные и выходные переменные. Эти соотношения представляют собой частные проявления законов сохранения вещества и энергии.

Пример. При протекании тока по проводу воздушной ЛЭП в соответствии с законом Джоуля-Ленца происходит нагревание проводника:

$$Q = I^2 R t, \tag{4.2}$$

где Q – количество теплоты, выделяемое в проводнике с сопротивлением R при протекании по нему тока I в течение времени t.

Если бы не было отвода тепла от проводника, температура проводника возрастала бы неограниченно. Охлаждение проводника происходит лучеиспусканием, конвекцией и теплопередачей из-за наличия теплопроводности окружающей среды.

По условиям сохранения физико-механических характеристик проводов воздушных линий электропередачи температура, до которой могут нагреваться провода, ограничена некоторым значением (как правило 70 ºС), Это связано с ограничением тока, протекающего по проводу $I_{доп}$. Вычислить значение $I_{доп}$ позволяет математическое соотношение, выведенное из баланса количества теплоты, создаваемого в отрезке проводника, и отведенного количества теплоты в единицу времени.

Лучеиспускание при θ < 100 ºС незначительно, а теплопроводность окружающего проводник воздуха мала, следовательно, в основном охлаждение идет за счет конвекции воздуха

$$\Delta Q = kS\left(\theta_{max} - \theta_0\right)\Delta t, \tag{4.3}$$

где S – поверхность проводника; θ_{max} и θ_0 –максимальная и начальная температура провода;

k – коэффициент пропорциональности.

Приравняем количество создаваемой и количество отводимой теплоты, получим

$$I_{max}^2 R\Delta t = kS\left(\theta_{max} - \theta_0\right)\Delta t \tag{4.4}$$

откуда

$$I_{max} = \sqrt{\frac{kS\left(\theta_{max} - \theta_0\right)}{R}}. \tag{4.5}$$

3. Методы идентификации технических объектов.

В основе всех весьма многочисленных методов идентификации лежит идея эксперимента с «черным ящиком», которая была введена в оборот Нобертом Винером и обстоятельно развита Россом Эшби.

Идентификация является инструментом моделирования тех объектов, которые из-за сложности или недостаточной изученности, а также из-за обилия случайных факторов не могут быть исследованы на основе существующих теоретических представлений. С помощью определенных вычислительных средств и программного обеспечения (алгоритма идентификации) строится модель объекта.

На рис. 4.3 показана принципиальная схема идентификации, на которой приведены результаты наблюдений за входами $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и выходами $y_1, y_2, \ldots, y_m$ объекта и по которой с помощью алгоритма идентификации строится модель объекта.

В предельном (теоретическом) случае «черный ящик» представляет собой некоторую систему, о структуре и внутренних свойствах которой неизвестно решительно ничего. Зато входы, т.е. внешние воздействия (факторы), выходы, представляющие собой реакции на внешние воздействия, доступны для наблюдения (измерений) в течение неограниченного времени. Задача идентификации заключается в том, чтобы по наблюдениям за входами и выходами выявить внутренние свойства объекта или, иными словами, построить его модель.

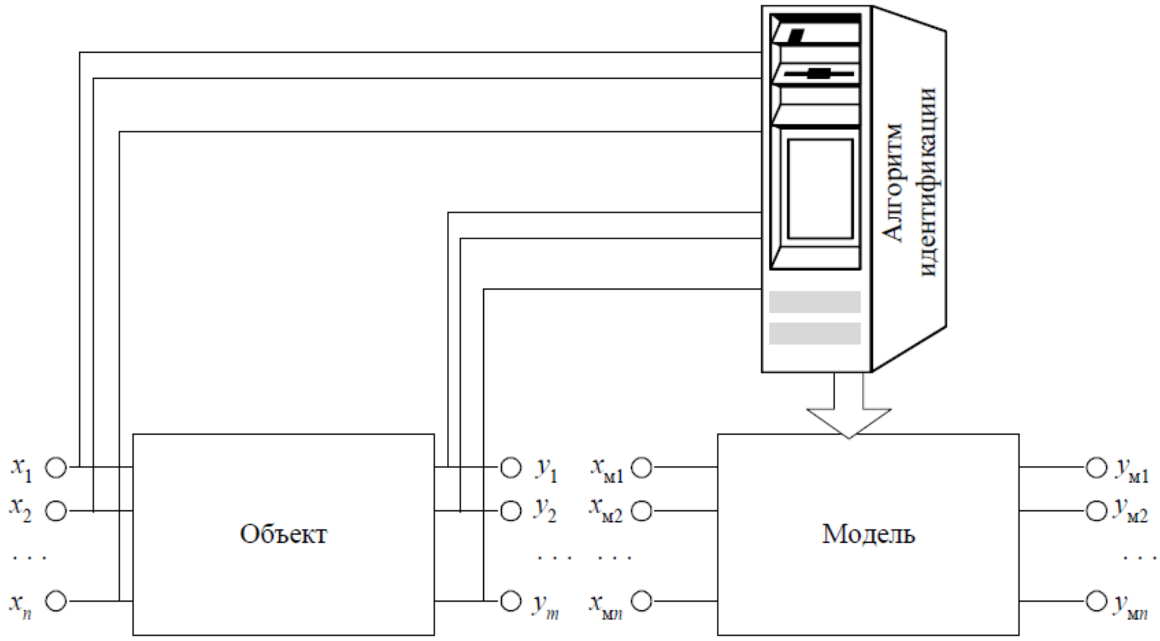

Рис. 4.3. Принципиальная схема идентификации объекта

Решение задачи допускает применение двух различных стратегий:

- активный эксперимент;
- пассивный эксперимент .

В первом случае осуществляется так называемый ***активный эксперимент,*** когда на вход объекта подаются специально сформированные тестовые воздействия, характер и последовательность которых определяется заранее разработанным планом. Подобный подход обладает тем преимуществом, что за счет оптимально спланированного эксперимента он позволяет получить необходимую информацию о свойствах и характеристиках объекта при минимальном объеме экспериментальных данных и соответственно при минимальной трудоемкости опытных работ. Однако цена, которую приходится платить за это преимущество, достаточно высока – объект выводится из его обычного состояния, что на практике далеко не всегда возможно по принципиальным и экономическим соображениям.

Альтернативный подход заключается в том, что осуществляется ***пассивный эксперимент***. Объект исследования не подвергается искусственным возмущениям и функционирует в своем естественном режиме, но при этом организуются систематические измерения и регистрации значений его входных и выходных переменных. Обработка полученных подобным путем данных в принципе позволяет получить ту же самую информацию о свойствах объекта, что и при активном эксперименте, однако необходимый объем данных существенно, на два-три порядка больше, чем в первом случае. Естественно, что и алгоритмы обработки данных оказываются более сложными и громоздкими.

Отметим, что на практике при построении идентифицируемых моделей часто целесообразна ***смешанная стратегия эксперимента***. По тем входным переменным объекта, которые это допускают (по условиям безопасности, техническим, экономическим соображениям и пр.), проводится активный эксперимент. Его результаты дополняются данными пассивного эксперимента, охватывающего все прочие значимые переменные. Опыт показывает, что такой подход заметно снижает трудоемкость *исследований* по сравнению с методикой пассивного эксперимента в чистом виде.

Ситуация «черного ящика» представляет собой теоретический граничный случай, когда о структуре объекта неизвестно абсолютно ничего. На деле исследователь всегда располагает той или иной априорной информацией об объекте идентификации, часть которой вполне достоверна (например, действие закона сохранения и других универсальных закономерностей), часть (например, сведения о структуре объекта) может носить гипотетический характер. Объем информации зависит от характера конкретной задачи и свойств объекта моделирования. Он может варьироваться в очень широких пределах, но сам факт наличия исходной информации обязателен – иначе будет невозможной осознанная постановка задачи исследования. Поэтому на практике приходится иметь дело не с «черным ящиком», а с «серым», отчасти «прозрачным» ящиком, причем можно указать три более или менее типовых уровня «прозрачности» и, следовательно, три основных класса постановки задачи идентификации объекта.

В первом классе задач, типичном для весьма сложных и слабо изученных объектов системного характера (экологические системы, экономические процессы больших масштабов и пр.), достоверные исходные данные о внутренних свойствах и структурных особенностях объекта исчезающе малы, почти отсутствуют. Поэтому задача идентификации, казалось бы, должна включать в себя, с одной стороны, определение зависимостей, связывающей входы и выходы, с другой стороны – определение внутренней структуры объекта. Однако в такой постановке эта задача неразрешима даже теоретически.

Дело в том, что непосредственным результатом идентификации объекта является только определение зависимостей входы-выходы, причем в непараметрической форме – в виде таблиц или отображающих содержание этих таблиц кривых. Для того чтобы говорить о структуре модели, необходимо перейти к параметрической форме их представления. Однако, как известно, однозначной связи между функциональной зависимостью и порождающей эту зависимость математической структурой не существует. Каждую непараметрическую зависимость вход-выход можно аппроксимировать различными способами и соответственно построить ряд практически равноценных моделей объекта, характеризующихся собственной структурой, собственным набором параметров и их значений.

Основанием для предпочтения той или иной параметрической модели и, следовательно, фиксации модельной структуры идентифицируемого объекта могут быть только данные, внешние по отношению к процессу идентификации, полученные, например, из теоретических соображений. Если таких данных нет, то в рассматриваемой ситуации мы получаем чисто функциональную модель, которая воспроизводит с тем или иным приближением характеристики объекта, но не содержит никакой информации о его реальной структуре.

Следует отметить, что это обстоятельство, существенно ограничивающее возможности идентифицируемых моделей применительно к задачам исследования сложного объекта, далеко не всегда следует рассматривать как недостаток. Например, в задачах автоматического управления, для которых существенны именно функциональные характеристики объекта, возможность отвлечься от его реальной структуры позволяет воспроизводить необходимые характеристики объекта управления с помощью простейших одношаговых итеративных алгоритмов, которые заведомо не соответствуют протекающим в объекте реальным явлениям, но позволяют наиболее рациональным образом организовать вычислительный процесс на ЭВМ. Любопытно, что идентифицируемые модели этого класса нередко используют и в тех случаях, когда объект в принципе поддается аналитическому описанию, но последнее получается чрезмерно сложным, громоздким и неудобным для анализа. Опыт показывает, что сознательное абстрагирование от реальной структуры подобных объектов и переход к идентификации их функциональных характеристик позволяет получить вполне обозримые компактные модели, которые с достаточной точностью описывают свойства сложного объекта-оригинала.

Второй класс задач идентификации характеризуется тем, что априорные данные о структуре моделируемого объекта, полученные теоретическим путем или определенные из конструктивных соображений, в принципе имеются. Однако какой вклад в характеристики объекта или его модели вносит тот или иной структурный компонент, наперед неизвестно, и это надлежит определить на основе эксперимента наряду со значениями соответствующих параметров. Задачи этого класса, связанные с уточнениями структуры и оцениванием параметров, часто встречаются на практике и характерны для объектов и процессов средней сложности, в частности технологических, когда определенные теоретические сведения о процессе имеются, но они неполны носят в какой-то мере гипотетический характер, так что полное аналитическое описание объекта только на основании этих данных невозможно.

Третий класс задач связан с относительно простыми и хорошо изученными объектами, структура которых известна точно, и речь идет только о том, чтобы по экспериментальным данным оценить значения всех или некоторых входящих в исследуемую структуру параметров (параметрическая идентификация). Примером такой идентификации является определение параметров четырехполюсника *A, B, C, D* в уравнениях:

$$U_1 = AU_2 + BI_2,$$
$$I_1 = CU_2 + DI_2, \qquad (4.6)$$

которые представляют собой модели таких объектов ЭЭС, как ЛЭП, трансформатор и пр.

Задача экспериментального оценивания или уточнения значений параметров модели возникает при исследовании подавляющего большинства реальных объектов, даже несложных и хорошо изученных.

Общую структурную схему идентификации можно представить как показано на рис. 4.4.

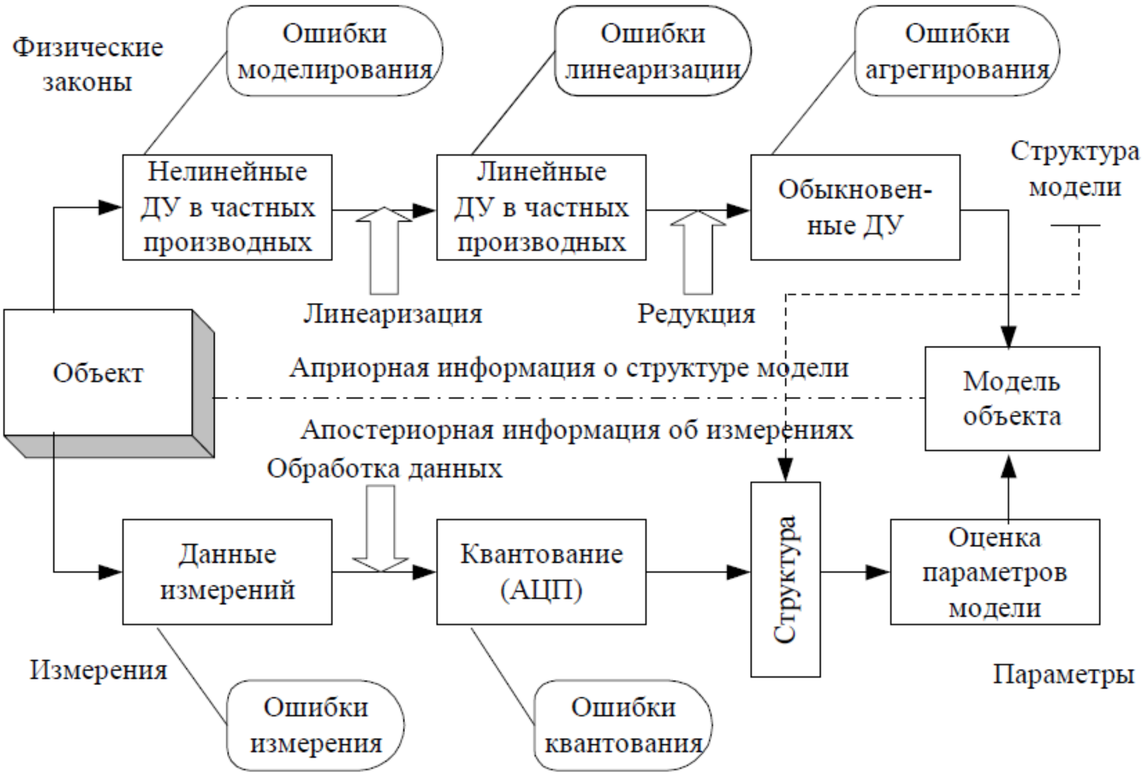

Рис. 4.4. Структурная схема идентификации объекта

Независимо от характера решаемой на основе идентификации объекта-оригинала задачи построение модели этого класса базируется на результатах измерений соответствующих величин переменных, с чем связано два существенных обстоятельства.

Во-первых, эксперимент должен быть обеспечен необходимыми средствами измерения надлежащей точности (датчиками, преобразователями, приборами). Опыт показывает, что при идентификации даже несложных, но типовых объектов, создание измерительного комплекса, прежде всего в части первичных преобразователей (датчиков) и их привязки к объекту, часто перерастает в серьезную техническую проблему. Необходимые разработки специализированных средств измерения и их компонентов, следовательно, и проведение соответствующих опытно-конструкторских работ являются в подобных случаях скорее правилом, чем исключением, а это, естественно, усложняет работы и увеличивает их стоимость.

Во-вторых, используемый в процессе эксперимента измерительный комплекс со всеми его компонентами требует материального обеспечения, т.е. градуировки, аттестации и периодической проверки в соответствии с нормативно узаконенным требованием. Реальная ситуация с метрическим обеспечением экспериментальной аппаратуры зависит от характера величин, подлежащих измерению в каждом конкретном случае.

Таким образом, даже при условии вполне современного технического и технологического оборудования путь от принципиальной возможности построения модели на основе идентификации до практической реализации этой возможности в большинстве случаев оказывается длинным, сложным и трудоемким. Кроме того, проведение одного эксперимента само по себе не может требовать значительных затрат, и в этом случае возникает необходимость сокращения числа возможных опытов в эксперименте без ущерба для точности математической модели. Во многих случаях этому помогает оптимальное планирование эксперимента.

4. Выбор структуры математической модели и вычисление ее параметров

Непосредственными результатами наблюдений (опытов) в процессе проведения эксперимента являются зависимости между входами **x** и выходами **y**, представленные, как правило, в табличной форме. Построение математической модели в параметрической форме требует обработки табличных данных. При этом следует учесть, что экспериментальные данные могут содержать систематические, случайные и грубые погрешности. Обычно погрешности измерений принято представлять в виде среднеквадратической погрешности $\boldsymbol{\sigma}$ и двумя границами интервала, в пределах которого истинное значение измеряемого параметра находится с заданной вероятностью (Δ_i, $_h$).

На первом этапе построения математической модели требуется выбрать вид (структуру) математической модели.

Второй этап требует специальных вычислительных средств для определения параметров выбранной математической модели.

Рассмотрим общий подход к подбору вида математической модели без использования каких либо теоретических представлений о внутренней структуре моделируемого объекта. ***В математике такая задача носит название задачи о приближении функций.*** Для простоты примем объект с одним входом $\boldsymbol{x}$ и одним выходом $\boldsymbol{y}$**.**

Пусть на некотором множестве задана система функций $\varphi_0(x)$, $\varphi_1(x)$, …, $\varphi_m(x)$, которые в дальнейшем будем считать достаточно гладкими (например, непрерывно дифференцируемыми) функциями. Назовем эту систему основной.

Функции вида

$$Q_m(x) = c_0\varphi_0(x) + c_1\varphi_1(x) + \ldots + c_m\varphi_m(x), \tag{4.7}$$

где c_0, c_1,…, c_m – постоянные коэффициенты, называются обобщенными многочленами порядка m.

В частности, если основная система состоит из целых неотрицательных степеней переменной x, т.е. $\varphi_0(x) = 1$, $\varphi_1(x) = x$, …, $\varphi_m(x) = x^m$, то

$$Q_m(x) = c_0 + c_1x + \ldots + c_mx^m \tag{4.8}$$

есть обычный полином степени m.

Если

$$\begin{aligned}
&\varphi_0(x) = 1,\\
&\varphi_1(x) = \cos x,\\
&\varphi_2(x) = \sin x,\\
&\ldots\\
&\varphi_{2m-1}(x) = \cos mx,\\
&\varphi_{2m}(x) = \sin mx,
\end{aligned} \tag{4.9}$$

то

$$Q_m(x) = a_0 + a_1\cos x + b_1\sin x \ldots + a_m\cos mx + b_m\sin mx \tag{4.10}$$

называется тригонометрическим полиномом (или тригонометрическим многочленом) порядка m.

Задача о приближении функций ставится следующим образом: данную функцию $f(x)$ требуется заменить обобщенным многочленом $Q_m(x)$, заданного порядка m так, чтобы отклонение (в смысле σ или (Δ_i, $_h$)) функции $f(x)$ от обобщенного многочлена $Q_m(x)$ на указанном множестве $\{x\}$ было наименьшим. При этом многочлен $Q_m(x)$ в общем случае называется аппроксимирующим.

Если множество $\{x\}$ состоит из отдельных точек x_0, x_1, …, x_n, то приближение называется дискретным. Если же $\{x\}$ есть отрезок $a \le x \le b$, то приближение называется интегральным.

На практике часто пользуются приближениями функций обычным и тригонометрическим полиномами.

В теории дискретного приближения функций имеет место задача интерполяции функций. В случае обычного полинома задача интерполяции формулируется следующим образом.

Для данной функции $f(x)$ найти полином $Q_m(x)$ возможно низшей степени m, принимающей в заданных точках x_i ($i = 0, 1, 2, \ldots, n$; $x_i \neq x_j$ при $i \neq j$) те же значения, что и $f(x)$, т.е. такой, что $Q_m(x_i) = f(x_i)$ ($i = 0, 1, 2, \ldots, n$). Такой полином называют интерполяционным, а точки x_i ($i = 0, 1, 2, \ldots, n$) называют узлами интерполяции.

Как известно, существует единственный полином степени не выше n, принимающий в точках x_i ($i = 0, 1, 2, \ldots, n$) заданные значения. Поэтому можно положить $n = m$. Коэффициенты $a_0, a_1, \ldots, a_n$ полинома $Q_n(x)$ можно определить из системы уравнений:

$$\mathbf{XA} = \mathbf{Y}, \tag{4.11}$$

где $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \ldots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \ldots & x_1^n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \ldots & x_n^n \end{pmatrix}$; $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \ldots \\ a_n \end{pmatrix}$; $\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \ldots \\ y_n \end{pmatrix}$;

$y_i = f(x_i)$ ($i = 0, 1, 2, \ldots, n$).

Определитель этой системы линейных алгебраических уравнений есть так называемый определитель Вандермонда $\neq 0$, и, следовательно, система (4.11) имеет единственное решение.

Интерполяция дает возможность вычислить значения функции $y = f(x)$ между заданными точками x_{i-1} и x_i ($i = 1, 2, \ldots, n$).

Интерполяция является частным случаем аппроксимации, когда степень интерполяционного полинома равна числу измерений без единицы и $n = m$ (число измерений равно $n + 1$, а число неизвестных коэффициентов модели равно $m + 1$). Когда $n > m$, в общем случае имеем задачу аппроксимации.

Для данной функции $f(x)$ найти полином $Q_m(x)$ степени m, который в заданных точках x_i ($i = 0, 1, 2, \ldots, n$; $x_i \neq x_j$ при $i \neq j$) доставляет минимум некоторой функции коэффициентов a_i ($i = 0, 1, 2, \ldots, m$): $S_m(a_0, a_1, \ldots, a_m)$. Такой полином называют аппроксимирующим. В общем случае $Q_m(x)$ есть обобщенный многочлен вида (4.7).

Функцию $S_m(a_0, a_1, \ldots, a_m)$ можно выбрать в соответствии с методом наименьших квадратов как сумму квадратов отклонений полинома $Q_m(x)$ от функции $f(x_i)$ на заданном множестве точек

$$S_m = \sum_{i=0}^{n} \left[Q_m(x_i) - f(x_i) \right]^2. \tag{4.12}$$

Такой способ носит название квадратичной аппроксимации.

Вычисление коэффициентов аппроксимирующего полинома выполняется путем решения системы линейных уравнений:

$$\mathbf{X}^T\mathbf{X}\mathbf{A} = \mathbf{X}^T\mathbf{Y}, \qquad (4.13)$$

где $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^m \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^m \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^m \end{pmatrix}$; $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \dots \\ a_m \end{pmatrix}$; $\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}$;

$y_i = f(x_i)$ ($i = 0, 1, 2, \dots, n$) и верхний индекс T означает операцию транспонирования матрицы.

Система уравнений (4.13) получена путем дифференцирования критерия квадратичной аппроксимации (4.12) по искомым коэффициентам и приравниванию нулю полученных выражений. В случае обобщенного полинома (4.7) с произвольными функциями $\varphi_0(x)$, $\varphi_1(x)$, …, $\varphi_m(x)$ в системе уравнений
(4.13) вместо значений степеней x требуется подстановка значений соответствующих функций $\varphi_0(x)$, $\varphi_1(x)$, …, $\varphi_m(x)$, вычисленных в заданных точках x.

Существуют модели, которые не являются многочленами вида (4.7) и нелинейно зависят от параметров, как, например, функция

$$y = \frac{1}{\sqrt{a + x}} e^{bx}. \qquad (4.14)$$

Здесь y нелинейно зависит от параметров a и b. К некоторым функциям такого вида применимо приведение нелинейной задачи к линейной по следующему способу.

Пусть задана система точек $M_i(x_i, y_i)$. Вводятся новые переменные X и Y так, чтобы преобразованные точки $N_i(X_i, Y_i)$ лежали на одной прямой. Например, степенная зависимость $y = cx^a$ путем логарифмирования приводится к линейной:

$$\lg y = a \lg x + \lg c \qquad (4.15)$$

и линейная модель в новых координатах:

$$Y = aX + b. \qquad (4.16)$$

Здесь $N_i(X_i, Y_i) = N_i(\lg x_i, \lg y_i)$. Некоторые функции, которые приводятся к линейной относительно коэффициентов задаче аппроксимации, приведены в табл. 4.1.

Таблица 4.1

Некоторые функции, допускающие преобразование к линейной относительно коэффициентов в задаче аппроксимации

№ п/п	Исходная функция	Линейная функция	Соотношения для преобразования
1	$y = ax^b$	$Y = \alpha + bX$	$Y = \lg y$; $X = \lg x$; $\alpha = \lg a$
2	$y = ab^x$	$Y = \alpha + \beta x$	$Y = \ln y$; $\alpha = \ln a$; $\beta = \ln b$
3	$y = a + \frac{b}{x}$	$Y = ax + b$	$Y = yx$
4	$y = \frac{1}{ax + b}$	$Y = ax + b$	$Y = \frac{1}{y}$
5	$y = \frac{x}{ax + b}$	$Y = ax + b$	$Y = \frac{x}{y}$
6	$y = a\lg x + b$	$Y = aX + b$	$X = \lg x$

В тех случаях, когда невозможно перейти к линейной относительно коэффициентов задаче аппроксимации, выводятся подобные (4.13) нелинейные уравнения аналогичным способом и их решение дает искомые коэффициенты.

Заключительная часть занятия: Ответить на вопросы, обратить их внимание на необходимость знания изученного материала.

Проверить качество усвоения учебного материала занятия.

Подвести итог занятия, оценить знания и действия.

Выдать задание на самостоятельную работу.

Объявить тему и место проведения очередного занятия, дать команду о наведении порядка в классе и об окончании занятия.

Доцент кафедры к.т.н. доцент: Максимов В.В

«___» __________201 г.

Обсуждено на заседании кафедры «___» __________ 201 г.,

протокол № ___