МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение

высшего профессионального образования

К Г Э У

«КАЗАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

(ФГБОУ ВО «КГЭУ»)

Кафедра № ЭСиС

Экз. № ____

УЧЕБНО - МЕТОДИЧЕСКАЯ РАЗРАБОТКА

по учебной дисциплине

Б.1.В.ДВ.13. ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЭЛЕКТРОЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ СИСТЕМ

ЛЕКЦИЯ:

МОДЕЛИ ПРОГНОЗИРОВАНИЯ ФИЗИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ

УТВЕРЖДАЮ

Заведующий кафедрой ЭСиС

Максимов В.В.

« »____________ 201_ г.

УЧЕБНО - МЕТОДИЧЕСКАЯ РАЗРАБОТКА

по учебной дисциплине «Физико-математическое моделирование электроэнергетических систем»

Лекция: Модели прогнозирования физических процессов

Учебные и воспитательные цели:

1. Дать систематизированные знания о физико-математическом моделировании электроэнергетических систем.

2. Воспитывать добросовестное отношение к учебе, стремление к самосовершенствованию, к овладению избранной профессией.

Вид занятия: лекция

Продолжительность занятия: 2 часа.

Структура занятия и расчет времени.

№ п/п	Структура занятия	Время, мин
1	**Вводная часть**	**10-15**
2	**Основная часть** **1. Физические процессы и их характеристики** **2. Методологические основы прогнозирования.** **3. Экспоненциальная модель прогнозирования** **4. Логистическая модель прогнозирования** **5. Прогнозирование случайных процессов**	**70-75**
3	**Заключительная часть**	**3-5**

Вводная часть занятия: проверить наличие и готовность обучающихся к занятию; провести опрос по пройденному материалу в соответствии с перечнем вопросов и подвести его итоги; объявить тему и учебные цели занятия; обратить внимание обучающихся на важность изучения учебных вопросов занятия, так как знание их может быть востребовано при выполнении курсовой работы и выпускной квалификационной работы.

Основная часть занятия: учебные вопросы занятия изучаются в составе группы с применением диафильма, диапроектора, стендов, плакатов, классной доски, цветных мелков. Изучать материал занятия следует в строгом соответствии с учебной программой и тематическим планом изучения учебной дисциплины.

Наименование учебных вопросов преподаватель объявляет последовательно по мере изложения учебного материала и записывает их на классной доске.

На классной доске следует также записывать номер и название темы и занятия, учебные вопросы, цифровые характеристики, формулы, непонятные и сложные для обучаемых термины, чертить поясняющие схемы. Записи на классной доске вести последовательно и аккуратно.

В ходе изложения учебного материала необходимо контролировать степень усвоения учебного материала путем постановки контрольных и проблемных вопросов.

При изучении учебного материала обучающихся должны вести конспект. Контроль за качеством ведения конспектов преподаватель осуществляет в ходе проведения занятия.

Основная часть занятия:

1. Физические процессы и их характеристики.

1.1. Классификация физических процессов.

Все наблюдаемые процессы, характеризующие физические явления и изменения состояний объектов, можно классифицировать в самом общем виде как детерминированные и недетерминированные. К детерминированным относятся процессы, которые могут быть описаны точными математическими соотношениями. Рассмотрим, например, твердое тело, подвешенное на упругой пружине (рис. 5.1,*а*).

Пусть m – масса тела, а k – коэффициент жесткости пружины. Предположим, что тело получает начальное смещение X_m из положения равновесия (рис. 5.1,*б*), и освобождается в момент времени $t = 0$. На основе фундаментальных законов механики или путем повторных наблюдений можно установить справедливость следующего соотношения:

$$x(t) = X_m \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right), \quad t \geq 0 \tag{5.1}$$

Формула (5.1) достаточно точно описывает положение тела в любой момент времени в недалеком будущем. Для более точного предсказания положения тела в течение длительного времени требуется учесть затухание колебаний. Следовательно, физический процесс, характеризующий движение данного тела, относится к детерминированным.

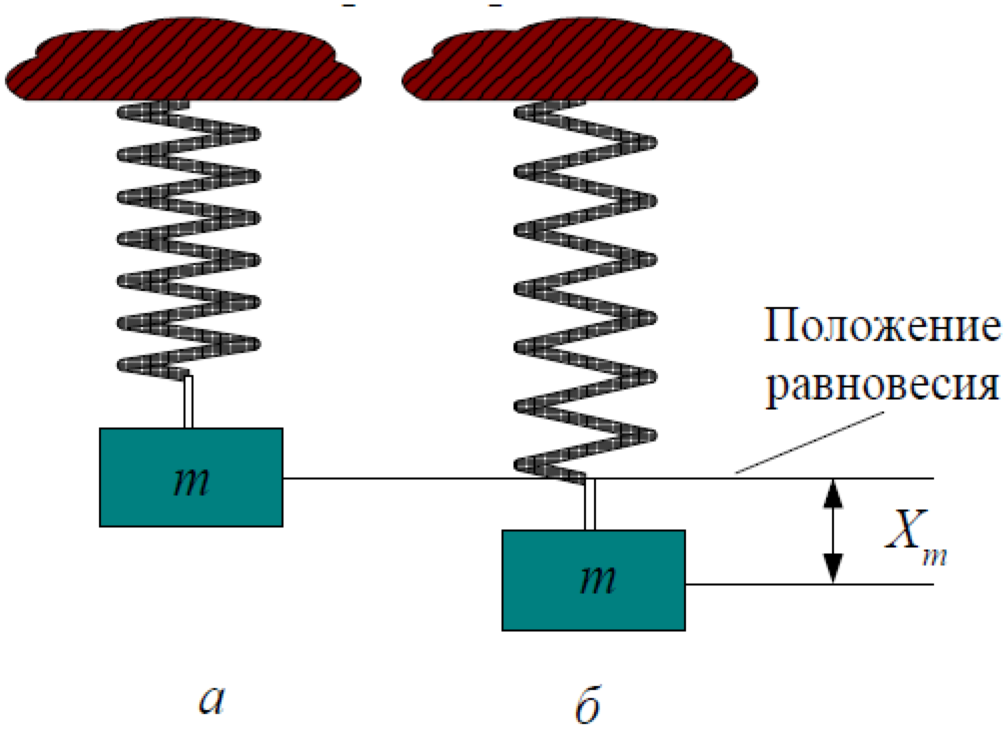


*Рис. 5.1.*Тело, подвешенное на пружине

На практике встречается много физических процессов, которые с высокой точностью могут быть описаны математическими соотношениями. Например, движение спутника по околоземной орбите, изменение напряжения на конденсаторе, который разряжается через сопротивление, вибрация несбалансированного ротора генератора или изменение температуры воды при охлаждении. Детерминированные процессы можно классифицировать, как показано на рис. 5.2.

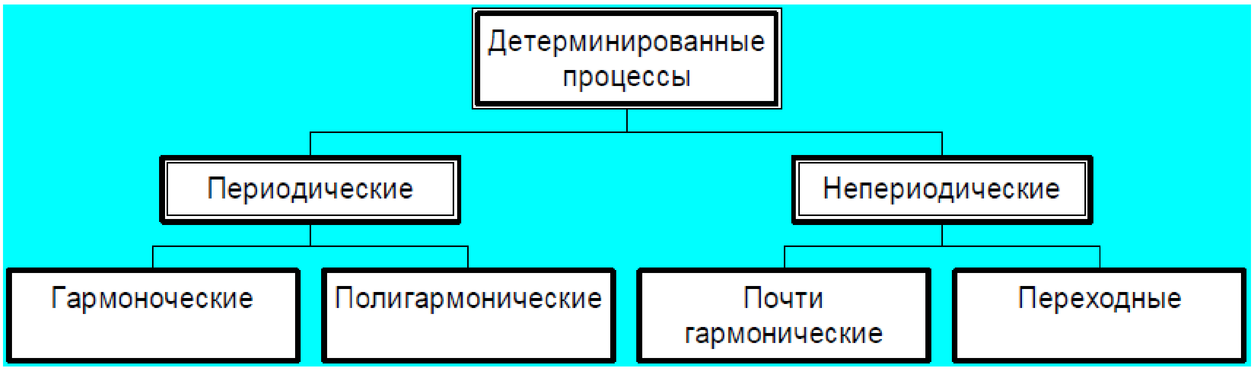


Рис. 5.2. Классификация детерминированных процессов

Существует много процессов, имеющих недетерминированный, т е. случайный характер. Например, изменение уровня сигнала в канале связи, температура воздуха, мощность, потребляемая из сети в заводском цехе. Точное значение такого процесса в некоторый момент времени в будущем предсказать невозможно. Эти процессы случайны по своей природе и должны описываться не точными уравнениями, а при помощи осредненных статистических характеристик. Будем обозначать случайный процесс $x(t)$ – случайной функцией от независимой переменной t. Случайные процессы можно классифицировать, как показано на рис. 5.3.

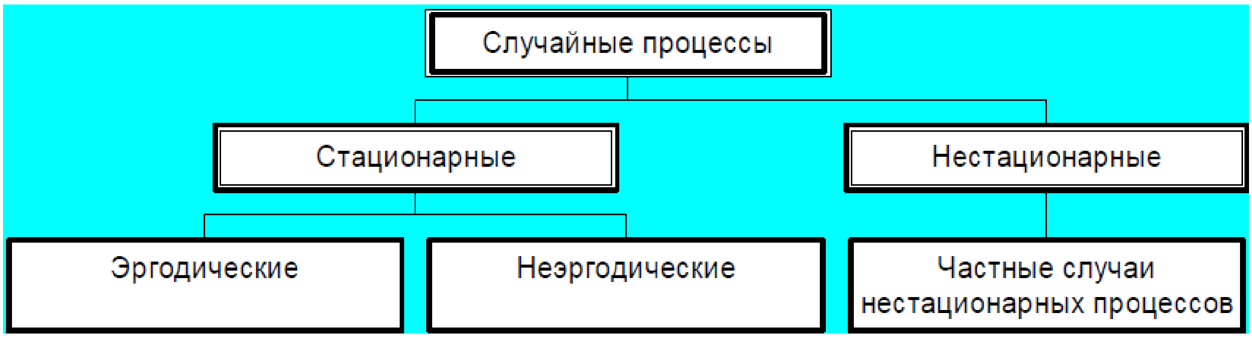


Рис. 5.3. Классификация случайных процессов

Во многих случаях трудно решить, относится рассматриваемый физический процесс к детерминированным или случайным. Можно, например, считать, что в действительности ни один физический процесс не является строго детерминированным, поскольку всегда существует возможность того, что в будущем какое-либо непредвиденное событие изменит течение процесса таким образом, что полученные данные будут носить характер иной, чем предполагалось ранее. С другой стороны, можно утверждать, что в действительности ни один физический процесс не имеет строго случайной природы так как при условии достаточно полного знания механизма изучаемого процесса его можно описать точными математическими соотношениями.

Практически решение о детерминированном или случайном характере процесса принимается обычно исходя из возможности либо невозможности воспроизведения его при заданных условиях. Если многократное повторение опыта дает одинаковые результаты (с точностью до ошибки измерения), то можно, вообще говоря, считать процесс детерминированным. Если же повторение опыта в идентичных условиях приводит к разным исходам, то природа процесса полагается случайной.

1.2. Детерминированные процессы

Детерминированные периодические процессы делятся на гармонические и полигармонические. Гармоническими называют процессы, которые могут быть описаны функцией

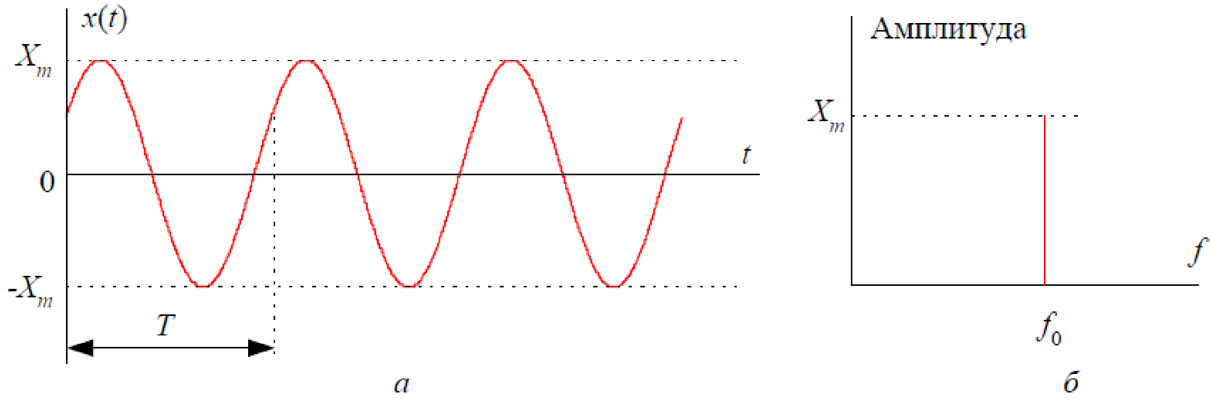
$$x(t) = X_m \sin\left(2\pi f_0 t + \theta\right), \tag{5.2}$$

где X_m – амплитуда;

f_0 – циклическая частота, измеряемая в циклах в единицу времени;

θ – начальная фаза, рад.

Соотношение (5.2) может быть представлено графически в функции времени и в амплитудно-частотном изображении (спектре), как показано на рис. 5.4.



Циклическая частота $f_0 = \dfrac{1}{T}$, где T – период гармонических колебаний.

Полигармонические процессы описываются функцией времени, точно повторяющей свои значения через одинаковые интервалы

$$x(t) = x(t \pm iT), \quad i = 1,2,3,\ldots \tag{5.3}$$

Число циклов в единицу времени называется основной частотой f_1. Полигармонический процесс может быть представлен рядом Фурье

$$x(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{i=1}^{\infty}\left(a_i\cos 2\pi i f_1 t+b_i\sin 2\pi i f_1 t\right), \tag{5.4}$$

Где $f_1=\dfrac{1}{T},\quad f_i=if_1,\quad i=2,3\ldots;$

$$a_i=\frac{2}{T}\int_0^T x(t)\cos 2\pi i f_1 t\,dt,\quad i=0,1,2,\ldots;$$

$$b_i=\frac{2}{T}\int_0^T x(t)\sin 2\pi i f_1 t\,dt,\quad i=1,2,3,\ldots.$$

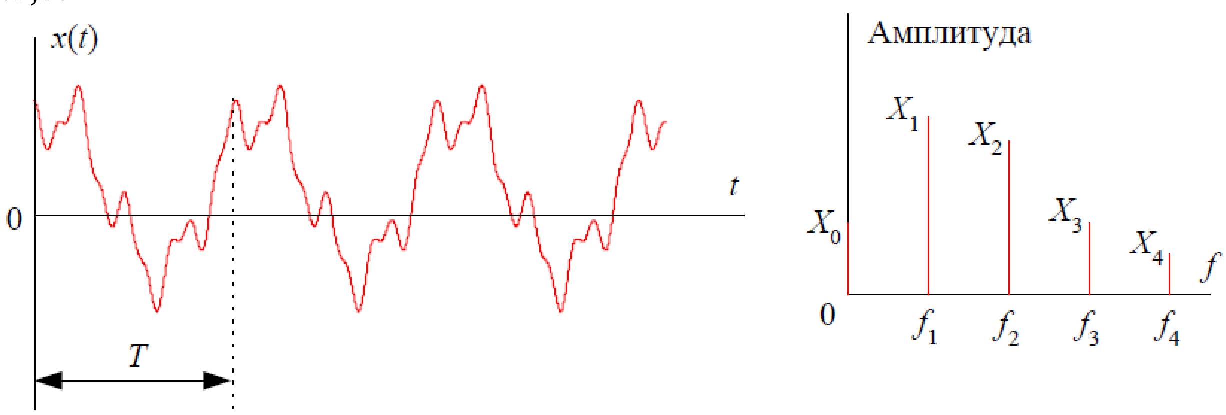
Возможен и другой способ записи ряда Фурье для полигармонического процесса:

$$x(t)=X_0+\sum_{i=1}^{\infty}X_i\cos\left(2\pi i f_1-\theta_i\right), \tag{5.5}$$

где $X_0=\dfrac{a_0}{2};\quad X_i=\sqrt{a_i^2+b_i^2};\quad i=1,2,3\ldots;\quad \theta=\operatorname{arctg}\left(\dfrac{b_i}{a_i}\right);\quad i=1,2,3\ldots$.

Как видно из (5.5), полигармонические процессы состоят из постоянной составляющей X_0 и бесконечного числа синусоидальных составляющих, называемых гармониками, с амплитудами X_i и начальными фазами θ_i. Частоты всех гармоник кратны основной частоте f_1.

Полигармонический процесс может имеет вид, представленный на рис 5.5,*а*, и соответствующий формуле (5.5) дискретный спектр, показанный на рис 5.5,*б*.



а *б*

Рис. 5.5. Полигармонический процесс и его спектр

В других случаях составляющая с основной частотой может отсутствовать. Предположим, например, что периодический процесс формируется в результате сложения трех синусоидальный функций с частотами 60, 75 и 100 Гц. Наибольший общий делитель этих чисел равен 5 Гц, поэтому период результирующего периодического процесса составляет 0,2 с. Следовательно, при разложении в ряд Фурье значения X_i будут равны нулю при всех i, кроме $i = 12$, $i = 15$, $i = 20$.

Физические процессы полигармонического типа встречаются гораздо чаще простых гармонических процессов. В действительности, когда тот или иной процесс относят к типу гармонических, то зачастую при этом имеют в виду только приближенное представление процесса, который на самом деле является полигармоническим. Например, напряжение на выходе генератора переменного тока содержит небольшие колебания с частотами высших гармоник.

Однако процессы, образованные при суммировании двух или более гармонических функций с произвольными частотами, не будут, вообще говоря, периодическими. Сумма двух или более синусоидальных функций образует периодический процесс только в том случае, если отношение всех возможных пар частот представляет собой рациональные числа. Это означает, что существует некоторый основной период, удовлетворяющий формуле (5.3). Так процесс

$$x(t) = X_1 \sin(2\pi 2t + \theta_1) + X_2 \sin(2\pi 3t + \theta_2) + X_3 \sin(2\pi\sqrt{50}t + \theta_3) \qquad (5.7)$$

является периодическим, поскольку 2/3, 3/7 и 2/7 – рациональные числа (с основным периодом, равным единице). С другой стороны, процесс

$$x(t) = X_1 \sin(2\pi 2t + \theta_1) + X_2 \sin(2\pi 3t + \theta_2) + X_3 \sin(2\pi\sqrt{50}t + \theta_3) \qquad (5.7)$$

не является периодическим, поскольку числа $2/\sqrt{50}$ и $3/\sqrt{50}$ иррациональные и основной период равен бесконечности. В этом случае процесс является почти периодическим, но соотношение (5.3) не удовлетворяется при любых конечных значениях T.

Таким образом, к почти периодическим относятся такие процессы, которые могут быть описаны функцией времени:

$$x(t) = \sum_{i=1}^{\infty} X_i \sin\left(2\pi f_i t + \theta_i\right), \qquad (5.8)$$

имеющей хотя бы одно отношение f_i / f_j, которое не является рациональным числом.

Дискретный спектр почти периодического процесса аналогичен спектру полигармонического процесса.

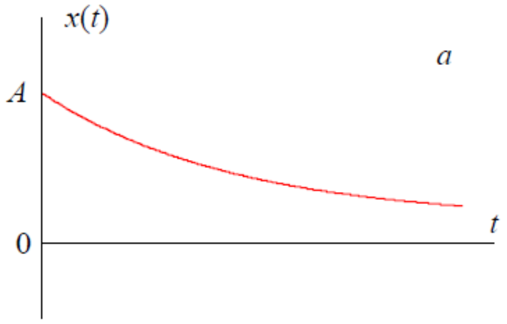
К переходным относятся все непериодические процессы, не являющиеся почти периодическими процессами, описанными выше. Другими словами, переходные процессы включают в себя все не рассмотренные ранее процессы, которые могут быть описаны подходящими функциями времени. Три примера распространенных переходных процессов приведены на рис. 5.6.

Физические переходные процессы весьма многочисленны и разнообразны. Например, процесс, изображенный на рис. 5.6,*а*, может описывать изменение во времени температуры проводника после отключения протекавшего по нему тока. Кривая на рис. 5.6,*б* может характеризовать свободные колебания инерционной механической системы после прекращения действия вынуждающей силы. График на рис. 5.6,*в* может описывать изменение во времени механического напряжения в тросе, который подвешен на опорах линии электропередачи и разрывается в момент *c*.

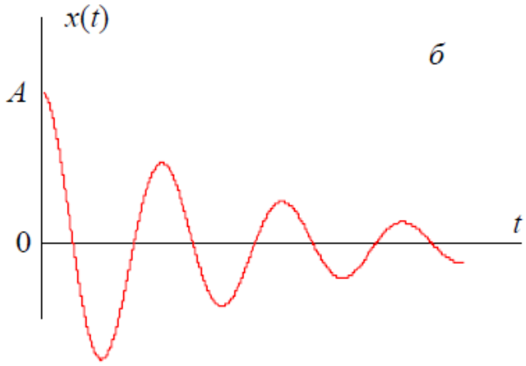
Важное отличие переходных процессов от периодических и почти периодических состоит в том, что их невозможно представить с помощью дискретного спектра. Однако в большинстве случаев получают непрерывное спектральное представление переходных процессов, используя интеграл Фурье

$$x(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{2\pi i t} dt.$$

$$x(t) = \begin{cases} Ae^{-\alpha t} & t \ge 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$



$$x(t) = \begin{cases} Ae^{-\alpha t}\cos bt & t \ge 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$



$$x(t) = \begin{cases} A & 0 \le t \le c \\ 0 & 0 < t \text{ и } t > c \end{cases}$$

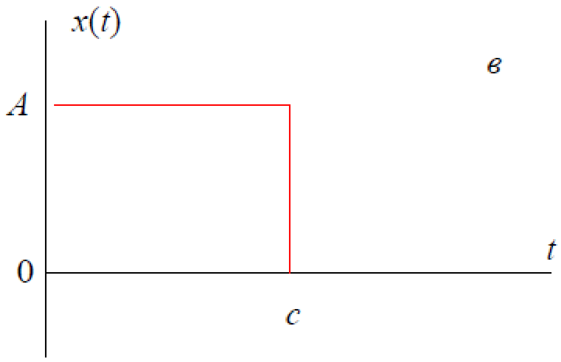


Рис. 5.6. Примеры переходных процессов

Спектр Фурье $X(f)$ в общем случае является комплексной функцией, которая может быть записана в показательной форме

$$X(f) = |X(f)| e^{-j\theta(f)} \tag{5.9}$$

Здесь $|X(f)|$ - модуль, а $\theta(f)$ - аргумент. Модули $|X(f)|$ преобразования Фурье трех переходных процессов, изображенных на рис. 5.6., показаны на рис. 5.7.

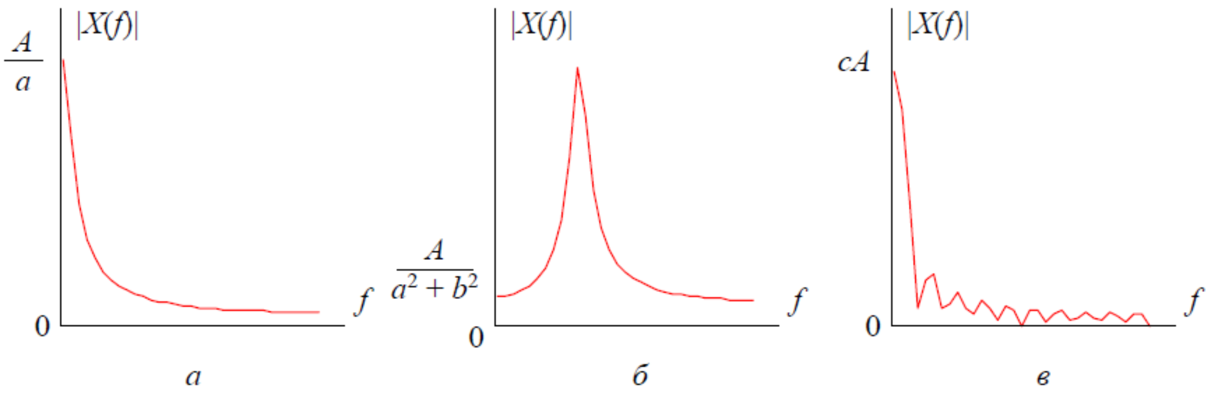


Рис. 5.7. Спектры переходных процессов

1.3. Случайные процессы.

Функция X(t) называется случайной, если ее значение при любом аргументе t является случайной величиной. Случайные функции времени называют случайными процессами.

Реализацией случайной функции $X(t)$ (выборочной функцией) называется конкретный вид, который она принимает в результате опыта, рис. 5.8. Реализация случайного процесса может рассматриваться как элемент множества возможных физических реализаций случайного процесса. Совокупность реализаций случайного процесса называется ансамблем реализаций. Совокупность значений реализаций в фиксированный момент времени (выборка случайных значений) называется сечением случайного процесса.

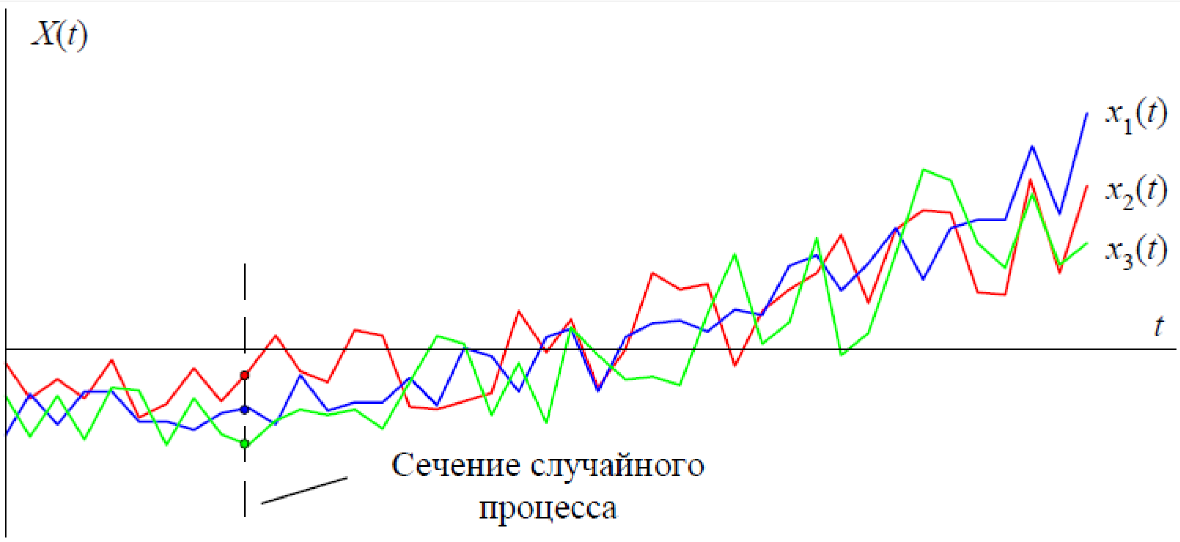


Рис. 5.8. Реализации случайного процесса

В любом сечении случайный процесс есть случайная величина. Математическое ожидание случайного процесса есть функция времени

$$m_X(t) = M[X(t)]. \qquad (5.10)$$

Второй центральный момент для двух сечений случайного процесса называется ковариационной функцией

$$R_X(t,t') = M\left[\overset{\circ}{X}(t)\cdot\overset{\circ}{X}(t')\right], \qquad (5.11)$$

где $X(t) = X(t) - m_X(t)$ – центрированный случайный процесс.

При $t = t'$ ковариационная функция равна дисперсии случайного процесса

$$R_X(t,t) = D_X(t) = D\left[X(t)\right]. \qquad (5.12)$$

Математическое ожидание и ковариационная функция случайного процесса могут быть найдены по реализациям случайного процесса – осреднения по реализациям:

$$m_X(t) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} x_k(t),$$
$$R_X(t,t') = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} \overset{\circ}{x}_k(t) \cdot \overset{\circ}{x}_k(t'), \tag{5.13}$$

где N – число реализаций случайного процесса.

Если математическое ожидание и ковариационная функция не зависят от времени t, то процесс является стационарным

$$m_X(t) = m_X, \;\; R_X(t,t') = R_X(\tau). \tag{5.14}$$

где $\tau = t' - t$. В (5.15) ковариационная функция зависит только от величины τ, а не от места его расположения на оси времени, рис. 5.9.

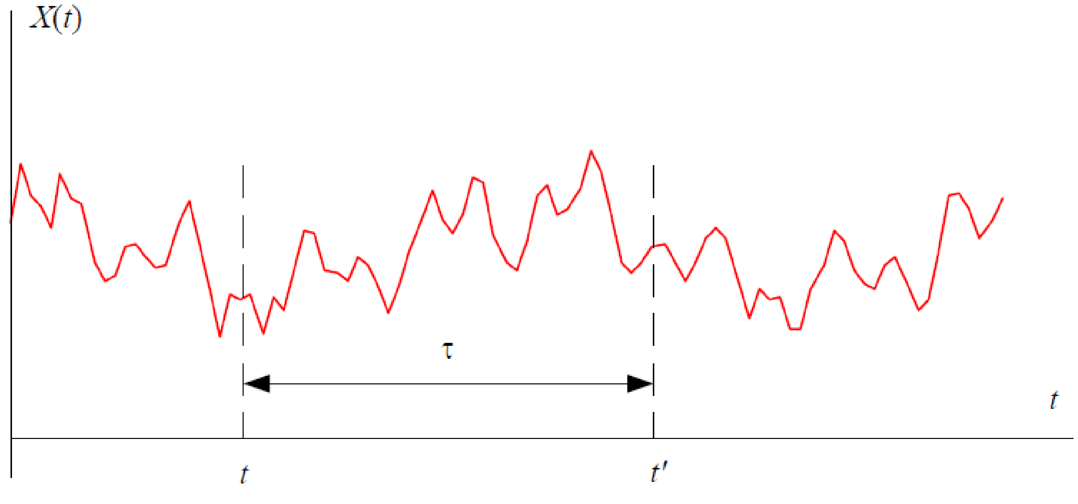
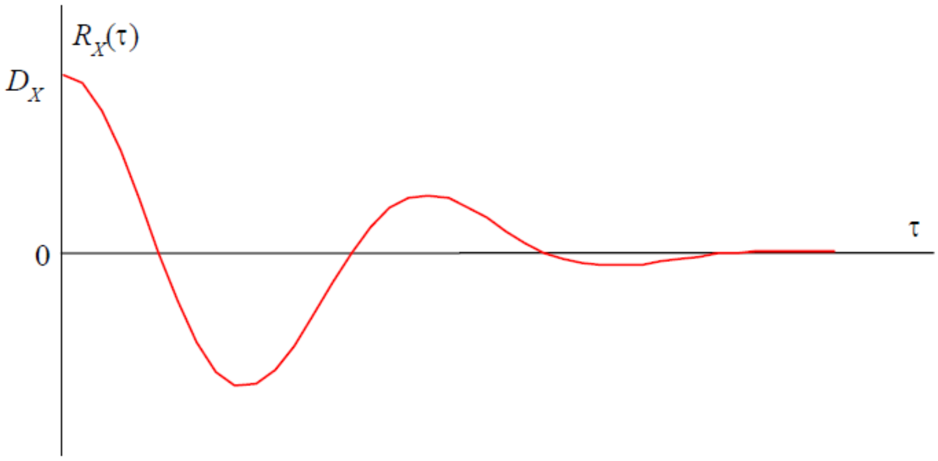


Рис. 5.9. Время между двумя сечениями случайного процесса

Возможный вид ковариационной функции показан на рис. 5.10.



$$r_X(\tau) = \frac{R_X(\tau)}{D_X}. \qquad (5.15)$$

Во многих случаях используется нормированная ковариационная (или корреляционная) функция. Для стационарного случайного процесса

$$m_X = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T x_k(t)dt,$$
$$R_X(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T-\tau} \int_0^{T-\tau} \overset{\circ}{x}_k(t) \cdot \overset{\circ}{x}_k(t+\tau)dt. \qquad (5.16)$$

Если случайный процесс $X(t)$ стационарен и характеристики m_X и $R_X(\tau)$ одинаковы для различных выборочных функций, то такой процесс называют *эргодическим*.

Эргодические процессы представляют важный класс случайных процессов.

Нестационарными случайными процессами являются все случайные процессы, не обладающие свойствами стационарности. Эти процессы сложны в исследованиях, и зачастую в задачах по их анализу их разбивают на интервалы стационарности или приближенно аппроксимируют стационарными процессами.

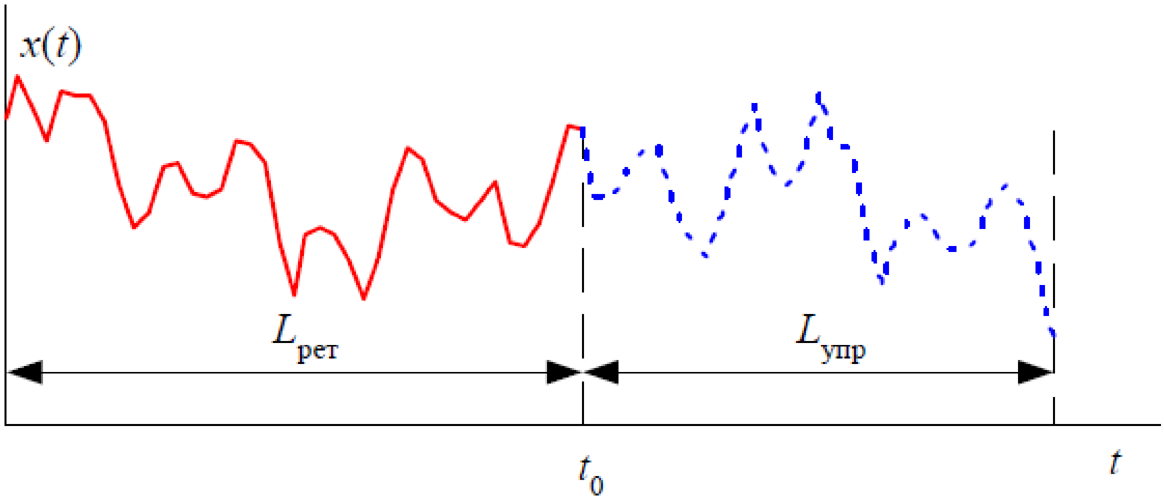
2. Методологические основы прогнозирования.

Прогноз − научно обоснованное суждение о возможных состояниях объекта в будущем и/или об альтернативных путях и сроках их осуществления.

Можно выделить два вида прогнозируемых характеристик системы, зависящих от времени: *переменные состояния* и *переменные интенсивности*.

Переменная состояния определяется периодически, и ее значение в течение небольшого интервала времени не зависит от времени, прошедшего с начала наблюдения. Переменная интенсивности также определяется периодически, но ее значение пропорционально времени, прошедшего с момента предыдущего наблюдения. Такие характеристики системы, как температура, скорость, число подписчиков на журнал или цена, являются примерами переменных состояния. В качестве примеров переменной интенсивности можно привести количество выпавших осадков, количество переданной электроэнергии, количество проданных экземпляров или спрос. Если переменная состояния характеризует количество, то переменная интенсивности – скорость его изменения.

Если прогноз делается в момент времени t_0, то для этого используются данные о течении процесса до этого момента. Такие данные называются ретроспективой и могут быть описаны какой-либо математической моделью физического процесса. Время, в течение которого были собраны данные о процессе, называется временем ретроспективы – $L_{\text{рет}}$. Время, на которое делается прогноз, называется временем упреждения – $L_{\text{упр}}$, рис. 5.11



Процессы прогнозирования переменных состояния и интенсивности отличаются друг от друга следующими особенностями:

- если измерения характеристик системы проводятся через равные интервалы времени, то величину интервала необходимо учитывать при оценке переменных интенсивности, в то время как при оценке переменных состояния эта величина не имеет значения;
- так как прогнозы обычно осуществляются для нескольких последовательных интервалов времени в пределах некоторого времени упреждения, по истечении которого становятся важными результаты реализации принятых решений, то правильный прогноз переменной состояния должен определять ее значение в конце времени упреждения, а прогноз

переменной интенсивности должен представлять собой сумму прогнозов на протяжении времени упреждения;

- функция распределения во времени вероятностей ошибок прогноза для переменной состояния должна соответствовать функции рас-пределения вероятностей ошибок в исходных данных, тогда как для переменной интенсивности закон распределения вероятностей ошибок прогноза во времени стремится к нормальному при любом законе распределения вероятностей ошибок в исходных данных, поскольку эти ошибки представляют собой сумму ошибок прогноза в отдельные интервалы времени.

Объектами прогнозирования могут быть процессы, явления, события. Здесь рассматриваются вопросы прогнозирования физических процессов.

Прогноз разделяют на текущий, краткосрочный и долгосрочный. Сравнительная характеристика этих прогнозов дана в табл. 5.1.

Таблица 5.1

Характеристика различных видов прогноза

Признак	Вид прогноза		
	Оперативный	Краткосрочный	Долгосрочный
Время упреждения	1…2 суток	До 1…2 лет	На 5…20 лет
Соотношение $L_{упр}$ и $L_{рет}$			
Тип используемой информации	Непрерывные процессы	Интервальная	Интервальная качественная
Основные гипотезы	Стационарность, эргодичность, устойчивость средних	Устойчивость тенденций	Неустойчивость и неравномерность развития
Определяющие законы функционирования	Физические, вероятностные	Системные, причинно-следственные	Эволюционные

Методы прогнозирования можно подразделить на три вида:

- статистические (описательные);
- причинно-следственные;
- комбинированные.

Статистические методы не вскрывают внутренних связей в системе и влияния внешней среды и по существу экстраполируют детерминированный или стохастический процесс по подобранной математической модели.

Причинно-следственные модели прогноза учитывают влияние окружающей среды и позволяют выделить причины изменений в системе. Прогноз, полученный по такой модели, объясняет будущее системы.

Если процесс является периодическим, то частота наблюдений должна быть, по крайней мере, вдвое больше частоты изучаемого процесса.

Важное значение имеет анализ исходных данных для прогнозирования. Данные являются результатами выборочных наблюдений, в которых возможны выбросы, т. е. значения, которые появились в результате аномальных эффектов (чрезвычайно большая температура в помещении вследствие поломки кондиционера, большой спрос на продукцию во время забастовок, изменение потребления электроэнергии в период экономических и социальных перемен и т. п.). Поэтому не всякая совокупность является подходящим временным рядом и перед построением модели прогноза необходимо из данных исключить выбросы, которые не характеризуют прогнозируемый процесс.

Некоторые процессы поддаются графоаналитическому описанию в силу некоторых физических, экологических и даже экономических закономерностей, Так, например, замечена закономерность появления и спада спроса на некоторую продукцию на рынке, рис.5.12. Известны и хорошо подтверждаются на практике экологические модели размножения и гибели популяций.

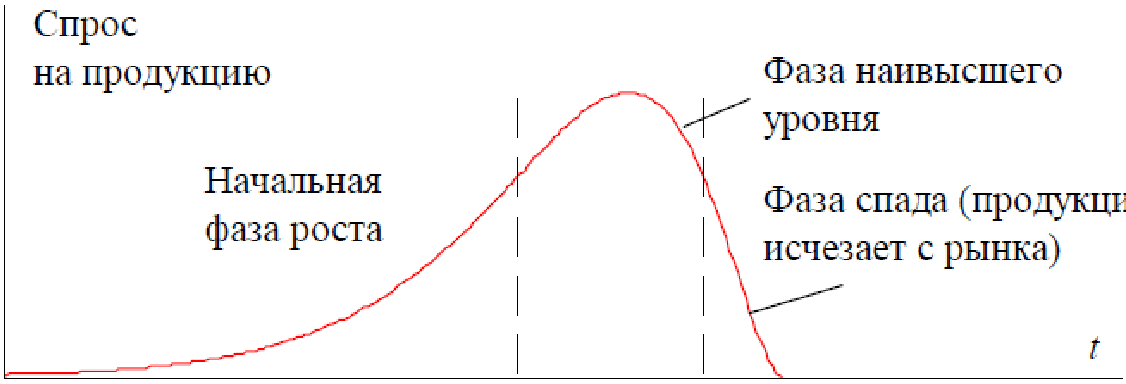


Рис.5.12. Кривые жизненного цикла продукции

3. Экспоненциальная модель прогнозирования

Во многих случаях в качестве математического описания физических процессов используется экспоненциальная функция. Рассмотрим такую модель на примере процесса распада радиоактивного элемента.

Известно, что скорость распада любого радиоактивного элемента прямо пропорциональна наличной его массе

$$\frac{dx}{dt} = -kx, \quad k \succ 0 \qquad (5.17)$$

Знак минус указывает на убывание массы.

Разделим переменные в дифференциальном уравнении (5.17)

$$\frac{dx}{x} = -kdt,$$

и после интегрирования получим

$$\ln x = -kt + C, \tag{5.19}$$

При t=0 из (5.19)будем иметь $C = \ln x_0$, где x_0 – количество массы в начальный момент времени, тогда

$$\ln x - \ln x_0 = -kt \quad \text{и} \quad \ln\frac{x}{x_0} = -kt, \tag{5.20}$$

откуда

$$x(t) = x_0 e^{-kt}, \quad t \ge 0 \tag{5.21}$$

где k – константа, которая может быть определена экспериментальным путем.

Пусть за время $t = t - t_0$ распалось α % радиоактивного элемента, тогда остаток

$$\left(1 - \frac{\alpha}{100}\right)x_0 = x_0 e^{-k\Delta t} \text{ и } \left(1 - \frac{\alpha}{100}\right) = e^{-k\Delta t} \tag{5.22}$$

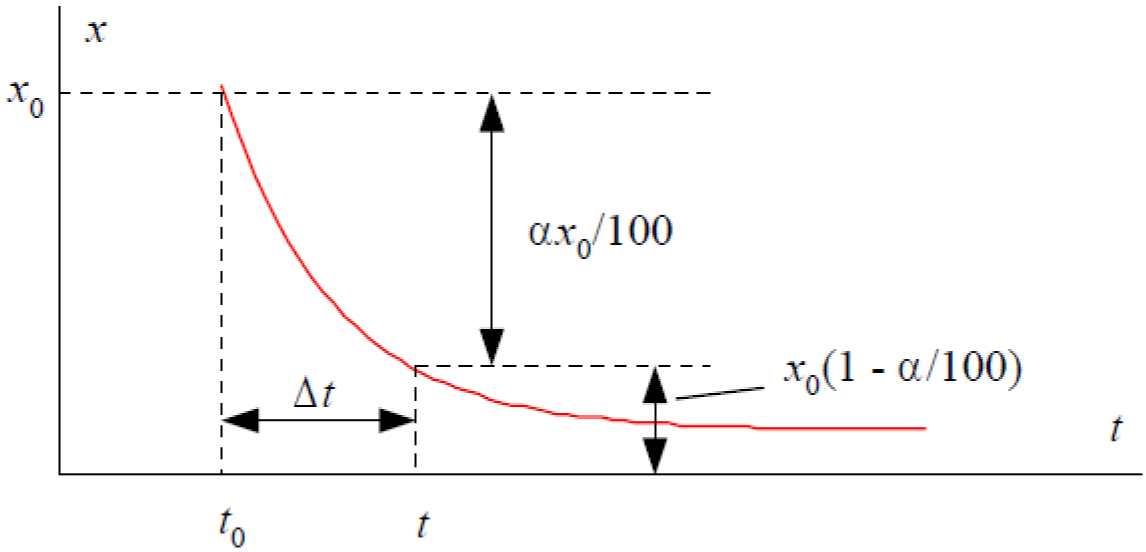


Рис.5.14. Определение параметра модели распада радиоактивного элемента

Логарифмируя полученное выражение и выражая коэффициент k, получим

$$k = -\frac{1}{\Delta t}\ln\left(1 - \frac{\alpha}{100}\right) \tag{5.23}$$

Для элемента радия k = 0,00044 1/год.

Во многих случаях экспоненциальная модель зарекомендовала себя очень хорошо как в случае убывания некоторой субстанции, так и для роста субстанции. В общем случае модель формулируется следующим образом: скорость изменения некоторой субстанции (роста, спада) пропорциональна уже имеющемуся количеству. Так, например, скорость увеличения выработанной электрической энергии

$$\frac{dW}{dt} = \alpha W, \quad \alpha \succ 0 \tag{5.24}$$

т.е. прирост показателя в единицу времени пропорционален уже имеющемуся количеству (достигнутому уровню) с неизменным коэффициентом пропорциональности *α* = *const.*

В логарифмических координатах зависимость ln*W*(*t*) – прямая линия.

$$\ln W(t) = \alpha t + \ln C \tag{5.35}$$

В случае начала отсчета

$$t = t_0 (t_0 \neq 0), W = W_0 \quad и \ \ln W_0 = \alpha t_0 + \ln C \tag{5.26}$$

Откуда

$$\ln C = \ln W_0 - \alpha t_0 \tag{5.27}$$

и

$$\ln W(t) = \ln W_0 + \alpha (t - t_0) \tag{5.28}$$

Окончательно получаем модель

$$W(t) = W_0 e^{\alpha (t - t_0)}. \tag{5.29}$$

В некоторых случаях оказывается более удобной модель с постоянным коэффициентом β:

$$W(t) = W_0 e^{\alpha (t - t_0)} + \beta. \tag{5.30}$$

4. Логистическая модель прогнозирования

Экспоненциальная модель достаточно хорошо описывает процесс на этапах развития без влияния каких-либо мешающих внешних факторов, при этом темп роста (спада) остается неизменным. Однако во многих случаях на протяжении достаточно большого времени темп процесса не может считаться постоянным.

Рассмотрим модель процесса производства электроэнергии. Замечено, что постоянство темпа роста производства электроэнергии не имеет места и с увеличением времени темп роста снижается. Это связано со многими факторами, среди которых главными являются: стремление к экономии электроэнергии, появление новых энергосберегающих технологий и ограничение энергетических ресурсов (рис. 5.14).

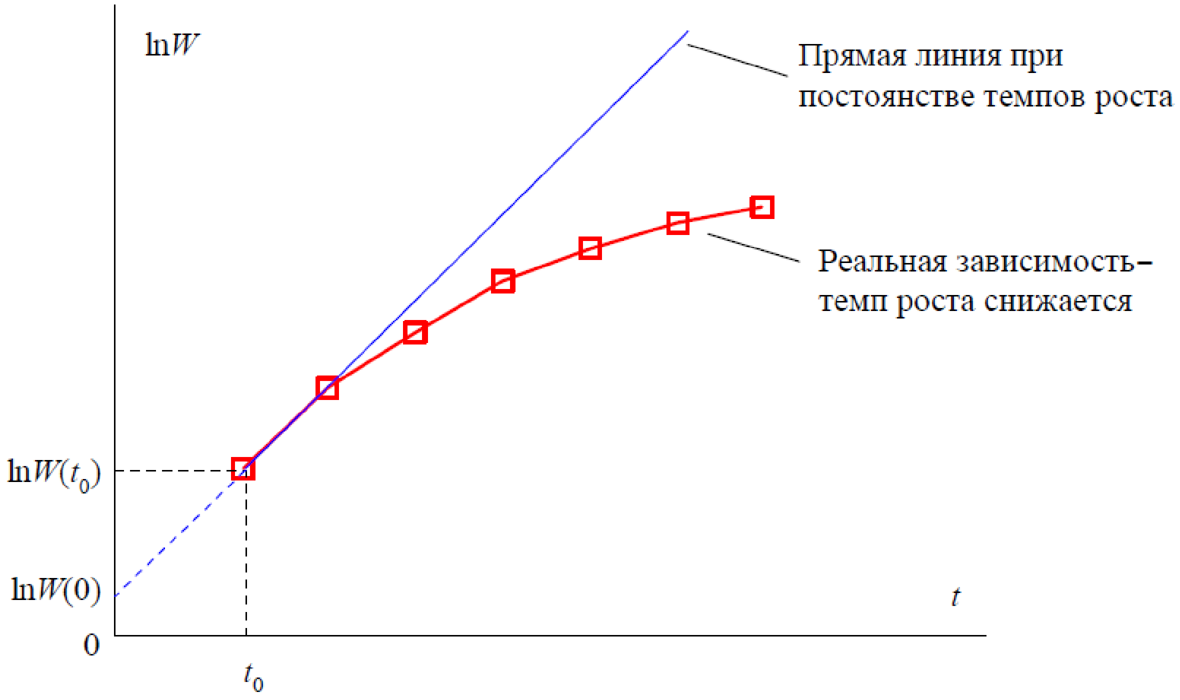


Рис.5.14. Процесс выработки электроэнергии в логарифмических координатах

Для описания целого ряда массовых явлений, где одна группа факторов способствует развитию процесса, а другая, напротив, тормозит развитие, причем тем значительнее, чем дальше продвинулся процесс, используется так называемая логистическая (*s*-образная) кривая.

В случае, *когда* α = *const*, процесс производства электрической энергии выражается формулой (5.29) и в логарифмических координатах записывается как

$$\ln W(t) = \ln W_0 + \alpha(t - t_0) \qquad (5.31)$$

Возьмем производную от (5.310 по времени

$$\frac{d \ln W(t)}{dt} = \alpha. \qquad (5.32)$$

Если на всем рассматриваемом интервале времени производная (5.32) постоянна, то это экспоненциальная модель, в противном случае

$$\frac{d \ln W(t)}{dt} = \alpha(t). \qquad (5.33)$$

Так как со временем темп роста уменьшается, то можно предположить, что $\alpha(t)$ есть монотонно убывающая функция, и также использовать для нее экспоненциальную модель

$$\alpha(t) = \alpha_0 e^{-\gamma t}, \quad \gamma > 0 \tag{5.34}$$

Логарифмируя выражение (5.34), получаем

$$\ln\alpha = \ln\alpha_0 - \gamma t. \tag{5.35}$$

Таким образом, в логарифмических координатах (5.35) есть прямая линия.

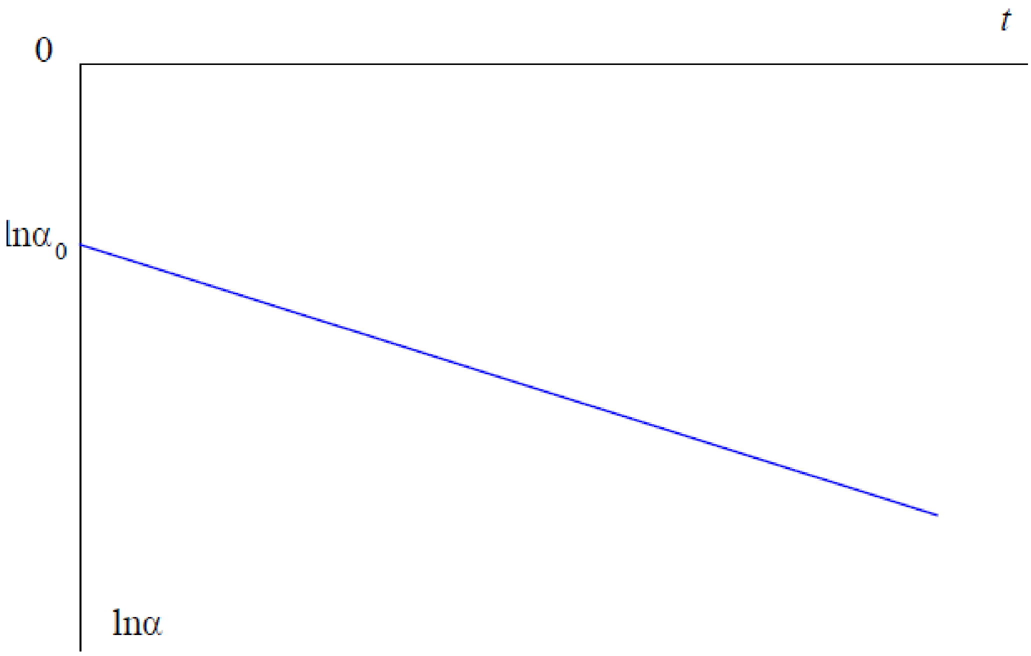


Рис. 5.15. Зависимость темпа роста процесса в логарифмических координатах

Эта модель также могла быть получена из решения дифференциального уравнения (скорость уменьшения темпа α пропорциональна имеющейся величине)

$$\frac{d\alpha}{dt} = -\gamma\alpha. \tag{5.36}$$

При начальных условиях $t = t_0$ и $\alpha(t_0) = \alpha_0$ уравнение (5.36) имеет решение

$$\alpha(t) = \alpha_0 e^{-\gamma(t-t_0)}. \tag{5.37}$$

Подставляя (5.37) в (5.32), будем иметь дифференциальное уравнение

$$\frac{d\ln W(t)}{dt} = \alpha_0 e^{-\gamma(t-t_0)}, \tag{5.38}$$

Решить которое можно путем разделения переменных

$$d\ln W(t) = \alpha_0 e^{-\gamma(t-t_0)} dt \tag{5.39}$$

и интегрированием от момента времени t_0 до момента t:

$$\int_{\ln W(t_0)}^{\ln W(t)} d\ln W(t) = \alpha_0 \int_{t_0}^{t} e^{-\gamma(t-t_0)} dt \tag{5.40}$$

и

$$\ln W(t) - \ln W(t_0) = -\frac{\alpha_0}{\gamma}\left(e^{-\gamma(t-t_0)} - e^{-\gamma(t_0-t_0)}\right). \tag{5.41}$$

Имея в виду, что $W_0 = W(t_0)$ и $e^{-\gamma(t_0-t_0)} = 1$, получаем

$$W(t) = W_0 e^{-\frac{\alpha_0}{\gamma}\left(e^{-\gamma(t-t_0)}-1\right)}. \tag{5.42}$$

Полученное выражение (5.42) является логистической моделью процесса. С помощью этой модели достаточно хорошо описывается процесс годовой выработки электроэнергии во многих странах мира за последние десятилетия.

В СССР в 60-е годы прирост электроэнергии составлял 5…6 % в год, в 80-е годы он снизился до 2…3 % в год. Аналогичная картина имеется и в некоторых других странах.

5. Прогнозирование случайных процессов

Прогнозирование случайных процессов использует статистические характеристики процессов, такие как математическое ожидание $M[X(t)]$ и ковариационная функция $R_X(\tau)$. Особое значение имеет время, в течение которого между сечениями случайного процесса сохраняется статистическая связь – τ_0.

Иногда τ_0 – это половина ширины основания прямоугольника единичной высоты, площадь которого равна площади под кривой модуля $r_X(\tau)$ – корреляционной функции случайного процесса

$$\tau_0 = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \left| r_X(\tau) \right| d\tau \tag{5.43}$$

Если τ_0 = 0, то процесс представляет собой «белый шум». Время τ_0 называют еще интервалом корреляции процесса. Ошибка прогноза есть разница действительного и прогнозного значений процесса

$$e(\theta) = X(t_0 + \theta) - \hat{X}(t_0 + \theta) \tag{5.44}$$

Дисперсия ошибки прогноза может быть получена как математическое ожидание квадрата ошибки процесса, так как математическое ожидание стационарного случайного процесса неизменно во времени

$$\sigma_e^2(\theta) = M\left\{\left[X(t_0 + \theta) - \hat{X}(t_0 + \theta)\right]^2\right\}, \tag{5.45}$$

где t_0 – момент времени, в который выполняется прогноз;

θ – время упреждения;

$X(t_0 + \theta)$ – истинное значение процесса на момент прогноза;

$\hat{X}(t_0 + \theta)$ − прогнозное значение.

Заключительная часть занятия: Ответить на вопросы, обратить их внимание на необходимость знания изученного материала.

Проверить качество усвоения учебного материала занятия.

Подвести итог занятия, оценить знания и действия.

Выдать задание на самостоятельную работу.

Объявить тему и место проведения очередного занятия, дать команду о наведении порядка в классе и об окончании занятия.

Доцент кафедры к.т.н. доцент: Максимов В.В

«___» __________201 г.

Обсуждено на заседании кафедры «___» __________ 201 г.,

протокол № ___