

Лабораторное занятие №3.1

Тема: Выполнение задания в среде MathCAD для случая прямоугольного сигнала.

Цель работы

Целью работы служит закрепление лекционного теоретического материала по таким базовым вопросам, как ряд Фурье и спектр периодического сигнала, восстановление (синтез) сигнала по конечному числу составных гармоник сигнала, эффект Гиббса. Частотное (спектральное) разложение сигналов широко используется при разработке и описания работы структурных и функциональных схем информационно-измерительных систем.

Краткое изложение теории по теме.

Любой сигнал – это некоторая функция от времени $s(t)$. Если сигнал $s(t)$ периодический с периодом T (рис. 6.1), то для полного математического описания сигнала нам достаточно знание сигнала на интервале одного периода $[0, T]$ (или $[-T/2, T/2]$).

Из математики известно, что любую периодическую функцию, т.е. функцию, заданную на интервале периода, можно разложить в ряд Фурье

$$s(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos \omega_k t + b_k \sin \omega_k t), \quad (6.1)$$

где $\omega_k = k \omega_0$, $\omega_0 = 2\pi/T$ – основная частота; a_0 , a_k , b_k – постоянная составляющая ряда, косинусный и синусный коэффициенты ряда Фурье, которые соответственно равны:

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t) dt,$$

$$a_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t) \cos k \omega_0 t dt, \quad (6.2).$$

$$b_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t) \sin k \omega_0 t dt.$$

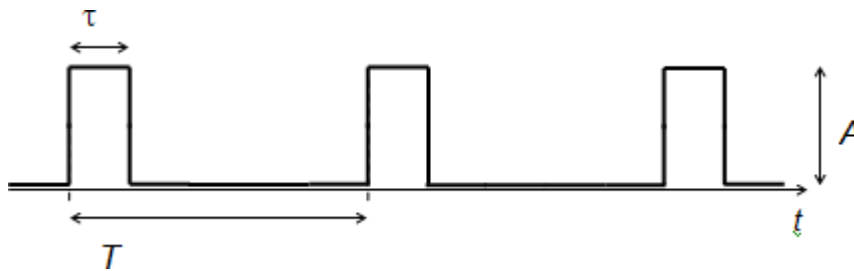


Рис. 6.1. Пример периодического сигнала

Как следует из тригонометрических соотношений, ряд Фурье можно представить также как одно гармоническое колебание с некоторой амплитудой A_k и начальной фазой φ_k

$$s(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(k \omega_0 t - \varphi_k), \quad (6.3),$$

где коэффициенты A_k и φ_k связаны с коэффициентами a_k и b_k , следующими тригонометрическими соотношениями:

$$a_k = A_k \cos \varphi_k, \quad b_k = A_k \sin \varphi_k$$

и соответственно

$$A_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}, \quad \operatorname{tg} \varphi_k = \frac{b_k}{a_k}, \quad \text{откуда} \quad \varphi_k = \operatorname{arctg} \left| \frac{b_k}{a_k} \right|.$$

Распределение амплитуд A_k по номерам гармоник называют амплитудной спектральной диаграммой периодического сигнала или просто *амплитудным спектром* сигнала, а график зависимости φ_k от номеров гармоник – фазовой спектральной диаграммой или *фазовым спектром*.

Пример аналитического вычисления спектра для прямоугольного сигнала

Найдем амплитудный спектр (в дальнейшем просто спектр) сигнала, представляющего собой последовательность однополярных прямоугольных импульсов с длительностью импульсов τ , периодом T и амплитудой U (рис. 6.2). Сквасжность импульсов $q = T/\tau$.

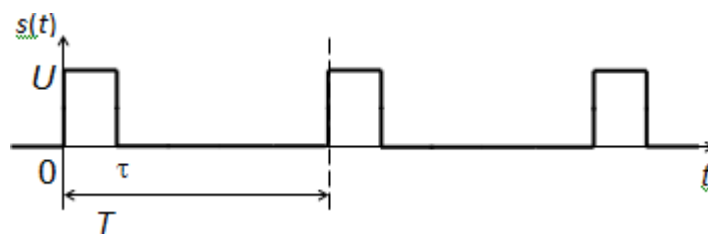


Рис. 6.2. Последовательность однополярных прямоугольных импульсов

Решение:

Так как сигнал периодический, то он полностью задан на интервале $[0, T]$ (или $[-T/2, T/2]$). Поскольку сигнал (импульс) симметричный, поместим ось ординат по центру импульса (рис. 6.3). В результате мы получим *четную* функцию, отличную от нуля на интервале $[-\tau/2, \tau/2]$.

Математическое описание данного сигнала:

$$\left\{ \begin{array}{l} s(t) = U \end{array} \right. \quad |$$

для

$$\begin{cases} t \in \left[-\frac{\tau}{2}, \frac{\tau}{2} \right] & - \\ 0 & \text{для } t \text{ вне интервала} \end{cases}$$

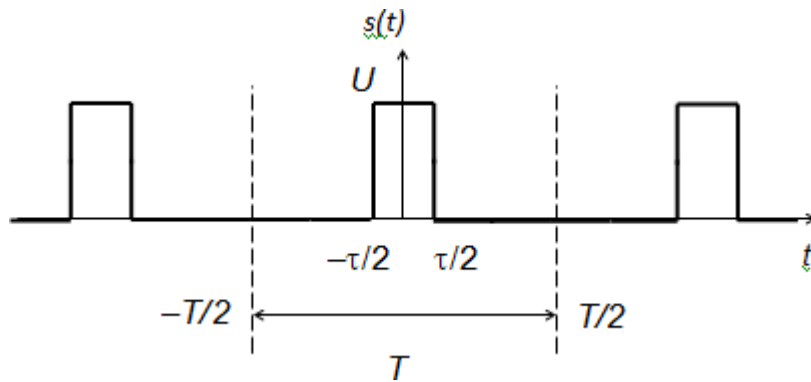


Рис. 6.3. Сдвиг оси ординат для централизованного расположения симметричного импульса

Вычисляем коэффициенты ряда Фурье по формуле (6.2):

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t) dt = \frac{2}{T} U \int_{-\tau/2}^{\tau/2} dt = \frac{2}{T} U \tau = \frac{2U}{q};$$

$$a_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t) \cos k\omega_0 t dt = \frac{2U}{T} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} \cos k\omega_0 t dt = \frac{2U}{T} \int_0^{\tau/2} \cos k\omega_0 t dt = \frac{4U}{T} \frac{\sin \frac{k\omega_0 \tau}{2}}{k\omega_0};$$

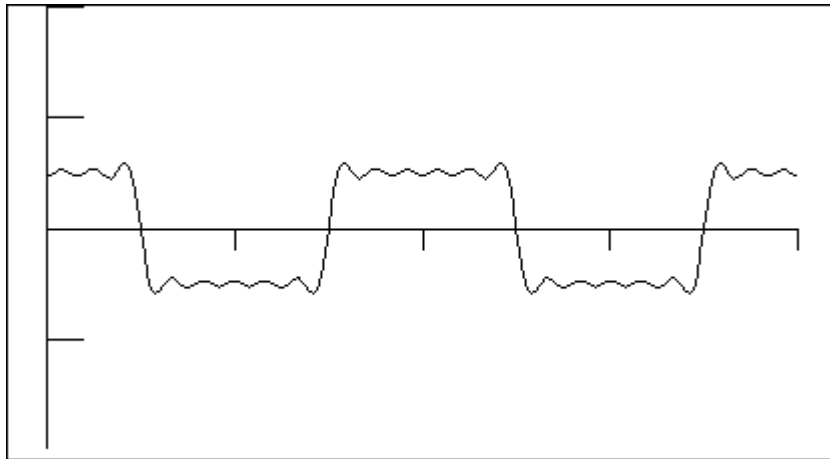
$$b_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t) \sin k\omega_0 t dt = 0.$$

В последней формуле $b_k = 0$ поскольку $s(t)$ – это четная функция, а синус – нечетная функция, следовательно, интеграл произведения этих функций равен нулю.

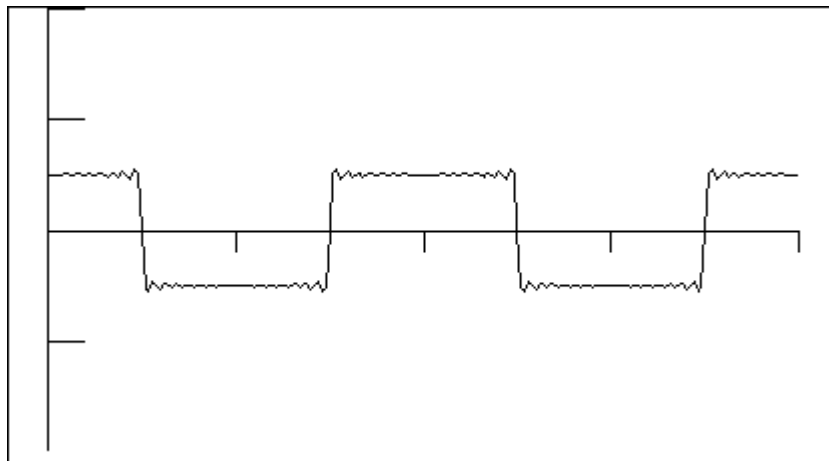
Подставляя теперь формулы, полученные для коэффициентов a_0 , a_k , и b_k в формулу (6.1), и задаваясь определенным количеством гармоник $k = 1, \dots, M$, мы получим искомый синтезированный сигнал $s_{\text{синт}}(t)$. Точность приближения $s_{\text{синт}}(t)$ к $s(t)$ будет зависеть от значения M : чем больше M , тем точнее приближение. При этом восстановленный сигнал будет испытывать небольшие волнообразные флуктуации. Эти небольшие искажения сигнала есть следствие ограниченного количества гармоник при

суммировании и называются *эффектом Гиббса*.

Результаты проведенного на компьютере моделирования (копия экрана монитора) прямоугольного сигнала для скважности $q = 2$ при различном количестве M составных гармоник, участвующих в синтезе сигнала, представлены на рис. 6.4. Из сравнения двух графиков видно, что действительно с увеличением M точность приближения синтезированного сигнала к заданному исходному виду возрастает.



а)



б)

Рис. 6.4. График восстановленного (синтезированного) прямоугольного сигнала (для скважности $q = 2$) при различном количестве M составных гармоник: а) $M=11$, б) $M=31$

Задание на выполнение типового расчета

1. Исходные данные: дан периодический измеренный сигнал $s(t)$ с параметрами: амплитуда U , длительность импульса τ и скважность q .

Варианты сигналов различного вида и их математическое описание приведены в Приложении. Конкретный вид сигнала задается преподавателем индивидуально для каждого студента.

2. Рассчитать аналитический амплитудный спектр, т.е. получить формулы для коэффициентов ряда Фурье a_0 , a_k , и b_k , а также A_k для заданного периодического сигнала.

3. С использованием полученных формул провести численные расчеты и построить графики:

1) график синтезированного (восстановленного) измерительного сигнала по конечному числу составных гармоник для двух случаев: при малом и большом значении M (рис.6.4).

2) график амплитудного спектра сигнала до 10-й гармоники включительно.

При моделировании задаться следующими значениями параметров сигнала: $U = 1$, $\tau = 50$, $q = 2$. Интервал времени задания сигнала t от 1 до N , $N = 350$.

Пример выполнения задания в среде MathCAD для случая прямоугольного сигнала

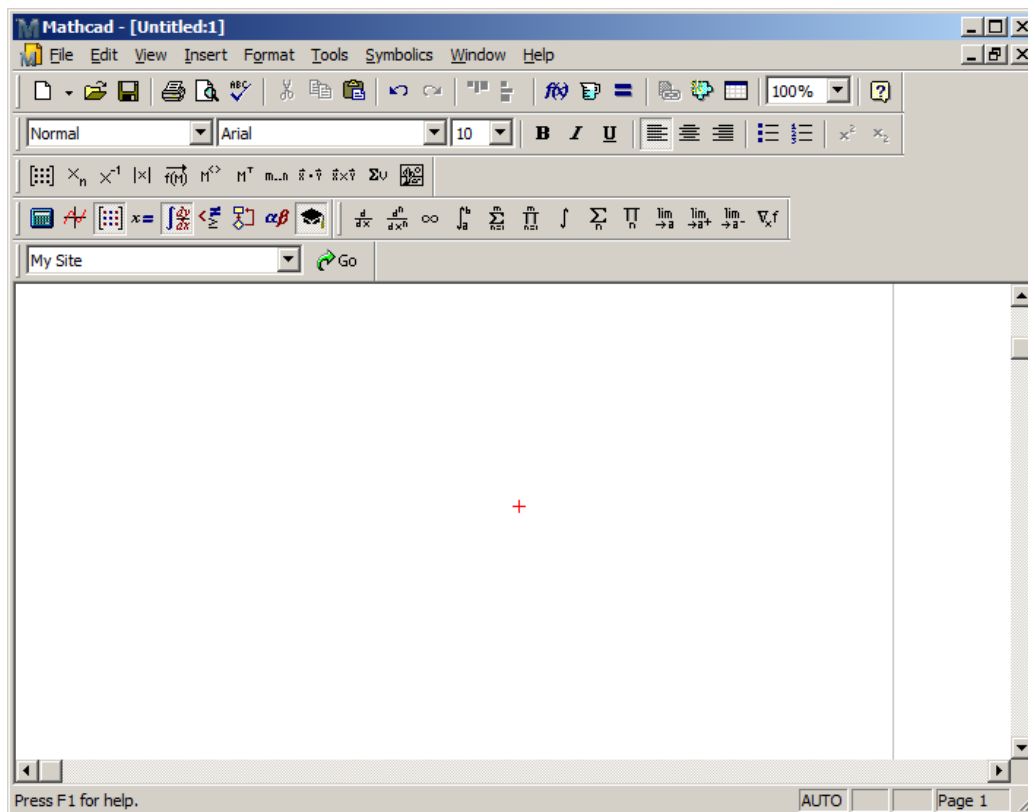
Рассмотрим как проводятся вычисления с использованием пакета MathCAD для случая прямоугольного сигнала. Для этого нам необходимо последовательно выполнить два действия:

- 1) сначала получить формулы для коэффициентов ряда Фурье;
- 2) затем по полученным формулам произвести числовые вычисления и построение графиков.

Расчет формул для коэффициентов

Запускаем пакет MathCAD.





Задаем вид функции $s(t)$. По заданной функции $s(t)$ проводим необходимые *символьные* вычисления. В результате получаем готовые формулы для a_0 , a_k , и b_k .

Получение формул для коэффициентов ряда Фурье - a_0 , a_k , b_k (режим символической математики)

Вариант - прямоугольные импульсы



$s(t) := 1$ $\omega_0 := \frac{2\pi}{T}$

$a_0 := \frac{2}{T} \cdot \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} s(t) dt$ $a_0 \rightarrow \frac{2 \cdot \tau}{T}$

$a_k := \frac{2}{T} \cdot \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} s(t) \cdot \cos(k \cdot \omega_0 \cdot t) dt$

$a_k \text{ simplify} \rightarrow \frac{2 \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot \tau \cdot k}{T}\right)}{\pi \cdot k}$

$b_k := \frac{2}{T} \cdot \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} s(t) \cdot \sin(k \cdot \omega_0 \cdot t) dt$

$b_k \text{ simplify} \rightarrow 0$

Symbolic ✕

→	▪ →
Modifiers	float
rectangular	assume
solve	simplify
substitute	factor
expand	coeffs
collect	series
parfrac	fourier
laplace	ztrans
invfourier	invlaplace
invztrans	$m^T \rightarrow$
$m^{-1} \rightarrow$	$ m \rightarrow$
explicit	combine
confrac	rewrite

Greek ✕

α	β	γ	δ	ε	ζ
η	θ	ι	κ	λ	μ
ν	ξ	\omicron	π	ρ	σ
τ	υ	ϕ	χ	ψ	ω
Λ	\Bbbeta	Γ	Δ	E	Z
H	Θ	I	K	Λ	M
N	Ξ	O	Π	ρ	Σ
T	Y	Φ	χ	Ψ	Ω

Вычисления и построение графиков

Открываем новый лист MathCAD.

Задаем значения необходимых числовых параметров: N , τ , q , t .

Вставляем (копированием через буфер обмена) формулы коэффициентов Фурье a_0 , a_k , и b_k , полученные нами в первом листе MathCAD. Проводим необходимые числовые вычисления и строим графики.

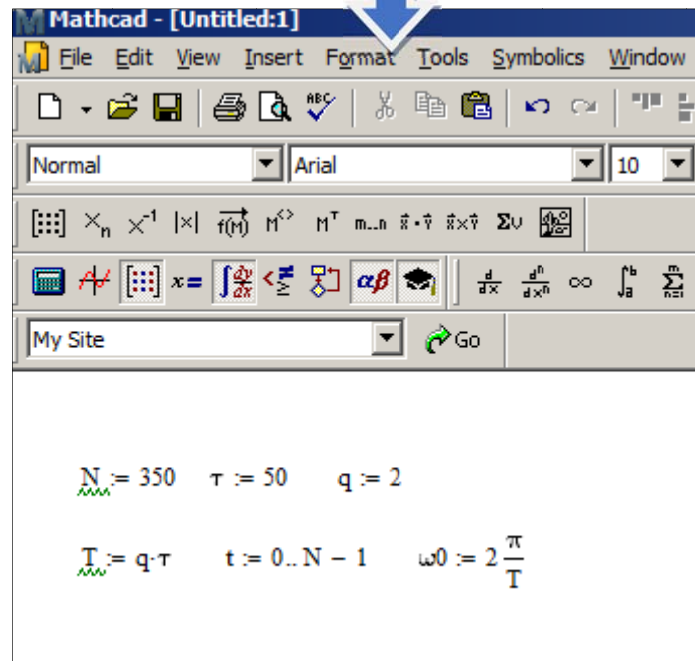
Моделирование синтеза сигнала - путем суммирования составных гармоник ряда

Вариант - прямоугольные импульсы

$$N := 350 \quad \tau := 50 \quad q := 2 \quad T := q \cdot \tau$$

$$t := 0..N - 1$$

$$\omega_0 := \frac{2\pi}{T}$$



Коэффициенты ряда Фурье - a_0 , a_k , b_k . Формулы получены в итоге символьных вычислений

$$a_0 := \frac{4}{(T \cdot \pi)} \cdot \tau$$

$$a(k) := 2 \cdot \frac{\left(\frac{1}{T} \sin\left(\frac{1}{2} \cdot \pi \cdot k \cdot \tau\right) \right)}{(k \cdot \pi)}$$

$$b(k) := 0$$



Mathcad - [Untitled:1]

File Edit View Insert Format Tools Symbolics Window Help

Normal Arial 10 B I U

x_n x^{-1} $|x|$ $f(n)$ M^x M^T $m..n$ $\delta \cdot \nabla$ $\delta \times \nabla$ ΣU

$x = \int \frac{d}{dx}$ $\frac{d}{dx^n}$ ∞ \int_a^b $\sum_{n=1}^m$ $\prod_{n=1}^m$ \int \sum_n \prod_n $\lim_{n \rightarrow a}$

My Site Go

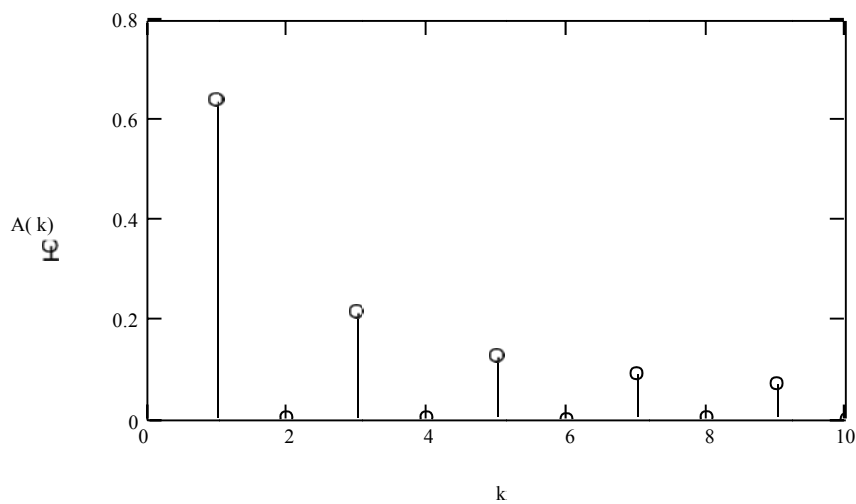
$$a_0 := \frac{4}{(T \cdot \pi)} \cdot \tau$$

$$a(k) := 2 \cdot \frac{\sin\left(\frac{1}{T} \cdot \pi \cdot k \cdot \tau\right)}{k \cdot \pi}$$

$$b(k) := 0$$

Спектр сигнала

$k := 1..10$ $A(k) := \sqrt{a(k)^2 + b(k)^2}$



k=	A(k)=
1	0.64
2	0
3	0.21
4	0
5	0.13
6	0
7	0.09
8	0
9	0.07
10	0



Mathcad - [Untitled:1]

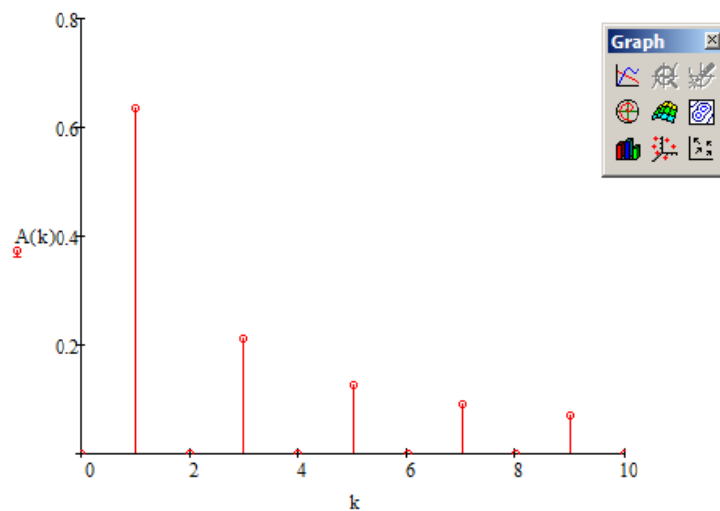
File Edit View Insert Format Tools Symbolics Window Help

Normal Arial 10 B I U

$N := 350$ $q := 2$ $\tau := 50$
 $T := q \cdot \tau$ $t := 0..N - 1$ $\omega_0 := 2 \frac{\pi}{T}$
 $a(k) := 2 \cdot \frac{\sin\left(\frac{1}{T} \cdot \pi \cdot k \cdot \tau\right)}{k \cdot \pi}$ $a_0 := \frac{4}{(T \cdot \pi)} \cdot \tau$
 $b(k) := 0$
 $k := 0..10$
 $A(k) := \sqrt{a(k)^2 + b(k)^2}$

k =	A(k) =
0	0
1	0.637
2	0
3	0.212
4	0
5	0.127
6	0
7	0.091
8	0
9	0.071
10	0

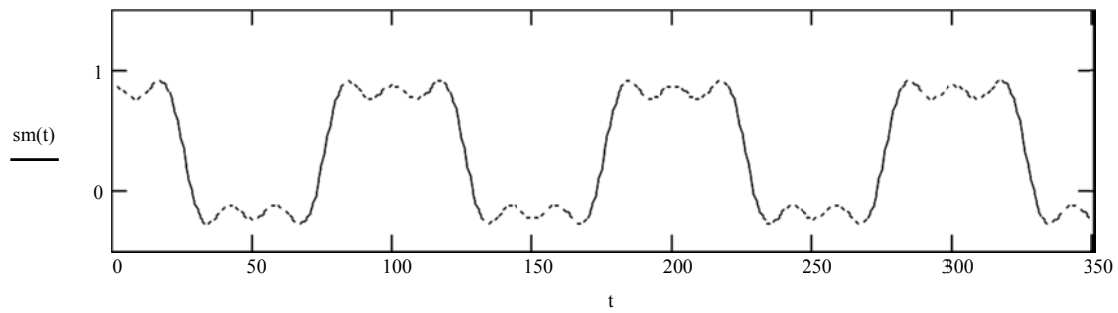
строим график спектра сигнала



М оделирование синтеза сигнала

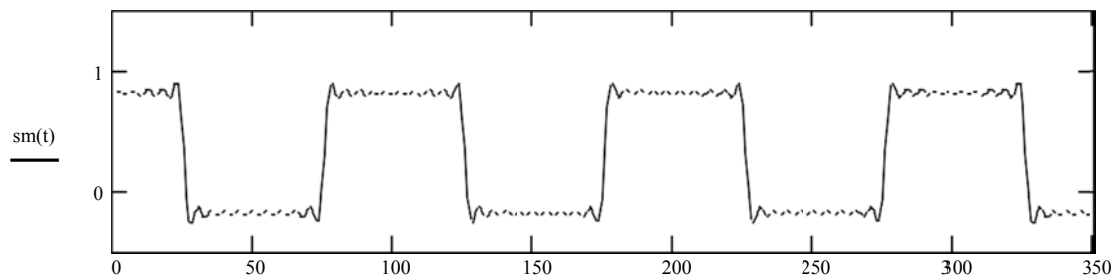
$M:=5$ M -количество гармоник для синтеза сигнала

$$sm(t) := \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^M (a(k) \cdot \cos(k \cdot \omega_0 \cdot t) + b(k) \cdot \sin(k \cdot \omega_0 \cdot t))$$



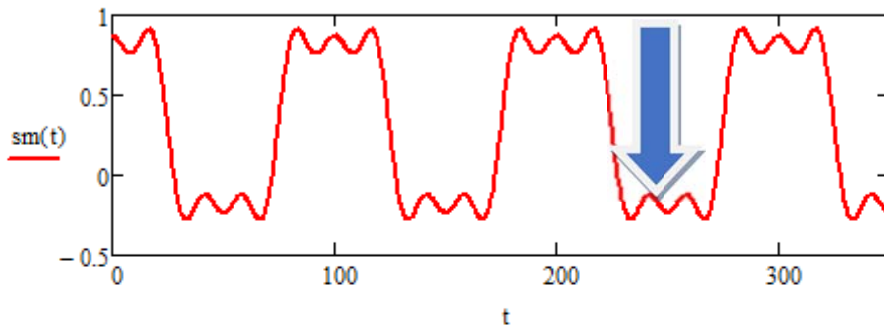
$M := 20$

$$sm(t) := \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^M (a(k) \cdot \cos(k \cdot \omega_0 \cdot t) + b(k) \cdot \sin(k \cdot \omega_0 \cdot t))$$



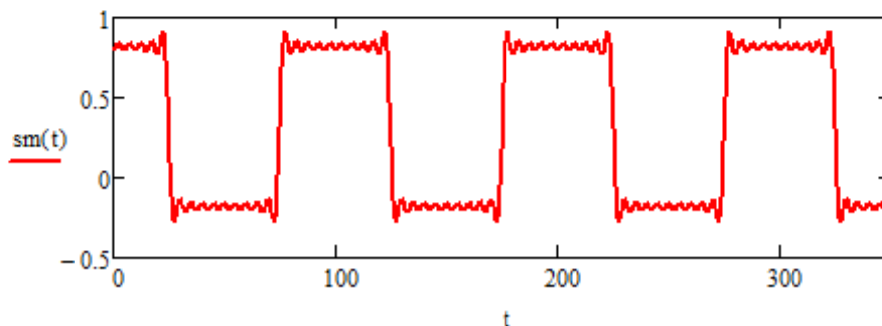
$$M := 5 \quad \omega_0 := 2 \frac{\pi}{T}$$

$$sm(t) := \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^M (a(k) \cdot \cos(k \cdot \omega_0 \cdot t) + b(k) \cdot \sin(k \cdot \omega_0 \cdot t))$$



$$M := 20 \quad \omega_0 := 2 \frac{\pi}{T}$$

$$sm(t) := \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^M (a(k) \cdot \cos(k \cdot \omega_0 \cdot t) + b(k) \cdot \sin(k \cdot \omega_0 \cdot t))$$



Выводы

В результате выполненного задания с использованием пакета MathCAD мы провели синтез (восстановление) сигнала путем сложения составных гармоник ряда Фурье, а также получили его спектр – зависимость амплитуды гармоник от частоты. Видно, что графики синтезированного сигнала повторяют форму исходного сигнала. При этом, чем больше составных гармоник M используется при суммировании, тем точнее форма восстановленного сигнала.

На графиках восстановленного сигнала видны волнообразные пульсации, что является проявлением эффекта Гиббса. Форма пульсаций зависит от количества составных гармоник: чем больше M , тем меньше период и амплитуда пульсаций.