Лекция 2. Алгебра матриц. Обратная матрица. Решение матричных уравнений

Алгебра матриц

Понятие матрицы, благодаря своим многочисленным применениям, стало предметом самостоятельной теории, в основе которой лежат алгебраические операции над матрицами: сложение и умножение.

Определим сначала равенство и сложение матриц.

Матрицы A и B одинаковых размеров $n\times m$ с элементами a_{ij} и b_{ij} называются *равными*, если $a_{ij} = b_{ij}$ для $i = 1, 2, \ldots, n$, $j = 1, 2, \ldots, m$. Равенство матриц обозначается $A = B$.

Суммой двух матриц A и B одинаковых размеров $n\times m$ с элементами a_{ij} и b_{ij} называется матрица $C = A + B$, элементы которой получаются путем сложения соответствующих элементов данных матриц: $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ для $i = 1, 2, \ldots, n$, $j = 1, 2, \ldots, m$.

Определенное таким образом сложение будет, очевидно, коммутативным и ассоциативным.

Для сложения существует и обратная операция – *вычитание* матриц $A - B$. Роль нуля играет при этом *нулевая матрица*, составленная из одних нулей.

Введем операцию умножения матрицы на число.

Произведением матрицы A *на число* λ называется матрица $C = \lambda \cdot A$, элементы которой получаются умножением элементов матрицы A на число λ: $c_{ij} = \lambda \cdot a_{ij}$, где $i = 1, 2, \ldots, n$, $j = 1, 2, \ldots, m$.

Все перечисленные выше операции над матрицами аналогичны операциям над числами и являются вполне естественными.

Следующая операция умножения матриц на первый взгляд покажется не столь очевидной.

Произведением матрицы A размера $m\times n$ с элементами a_{ij} и матрицы B размера $n\times p$ с элементами b_{ij} называется матрица $C = AB$ размера $m\times p$ с элементами c_{ij}, если

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj} = \sum_{s=1}^{n} a_{is}b_{sj}, \qquad (1)$$

где $i = 1, 2, \ldots, m$, $j = 1, 2, \ldots, p$.

Пример.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 2+2\cdot 0 & 1\cdot 1+2\cdot(-1) & 1\cdot 0+2\cdot 5 \\ 3\cdot 2+(-1)\cdot 0 & 3\cdot 1+(-1)\cdot(-1) & 3\cdot 0+(-1)\cdot 5 \\ 0\cdot 2+4\cdot 0 & 0\cdot 1+4\cdot(-1) & 0\cdot 0+4\cdot 5 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & -1 & 10 \\ 6 & 4 & -5 \\ 0 & -4 & 20 \end{pmatrix}.$$

Теперь можно легко составлять и вычислять матричные выражения.

Пример. Если $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, то $A^2 + 5A = \begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 22 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 15 & 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 20 \\ 30 & 42 \end{pmatrix}$.

Свойства произведения матриц

1. Произведение матриц не коммутативно, т.е. в общем случае

$$AB \neq BA.$$

Например,

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 6 & 17 \end{pmatrix},$$

но, взяв эти матрицы в другом порядке, получим другой результат:

$$\begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 23 & 32 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}.$$

2. Произведение матриц ассоциативно, т.е. $A(BC) = (AB)C$.

Из этого свойства, в частности, следует, что произведение нескольких матриц можно записывать без скобок, т.е. ABC.

3. Произведение и сложение матриц подчиняются дистрибутивным законам:

$$A(B + C) = AB + AC,$$

$$(B + C)A = BA + CA.$$

4. Транспонированное произведение равно произведению транспонированных сомножителей, взятых в обратном порядке:

$$(AB)^T = B^T A^T.$$

5. Определитель произведения двух квадратных матриц равен произведению определителей этих матриц:

$$\det(AB) = \det A \det B.$$

Обратная матрица. Решение матричных уравнений

Квадратная матрица называется *вырожденной*, если ее определитель равен нулю, и *невырожденной* – в противном случае.

Из пятого свойства произведения матриц вытекают следующие утверждения:

1) произведение матриц, из которых хотя бы одна вырожденная, будет вырожденной матрицей;

2) произведение любых невырожденных матриц само будет невырожденной матрицей.

Рассмотрим вопрос о существовании *обратной* матрицы.

Пусть матрица A вырожденная. Если бы для нее существовала обратная матрица A^{-1}, то произведение $A^{-1}A$, также как и произведение AA^{-1}, было бы, как мы знаем, вырожденной матрицей, но это произведение равно единичной матрице, которая невырожденна. Поэтому для вырожденной матрицы обратная матрица не существует.

Пусть дана невырожденная матрица n-го порядка

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ . & . \; . \; . \; . \; . \; . & . \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Матрица

$$A^V = \begin{pmatrix} A_{11} & \dots & A_{n1} \\ . & . \; . \; . \; . \; . \; . & . \\ A_{1n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix},$$

составленная из алгебраических дополнений к элементам матрицы A, причем алгебраическое дополнение A_{ij} к элементу a_{ij} стоит на месте (ji), т.е. на пересечении j-й строки и i-го столбца, называется *присоединенной* к матрице A.

Теорема (о существовании обратной матрицы). Если A – невырожденная квадратная матрица, то она имеет единственную обратную матрицу, получающуюся из присоединенной A^V делением всех ее элементов на $\det A$:

$$A^{-1} = \frac{A^V}{\det A} = \begin{pmatrix} \frac{A_{11}}{\det A} & \dots & \frac{A_{n1}}{\det A} \\ . & . \; . \; . \; . \; . \; . \; . & . \\ \frac{A_{1n}}{\det A} & \dots & \frac{A_{nn}}{\det A} \end{pmatrix} \tag{2}$$

Доказательство. Найдем произведения AA^V и $A^V A$. На диагоналях в этих матрицах будут стоять известные формулы разложения определителя по строке или столбцу $\sum_{i=1}^{n} a_{ik} A_{ik} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} A_{ik} = \det A$. А на остальных местах будут стоять выражения вида $\sum_{i=1}^{n} a_{ij} A_{ik}$ $(j \neq k)$ или $\sum_{k=1}^{n} a_{jk} A_{ik}$ $(j \neq i)$, которые будут равны нулю, так как, например, сумма $\sum_{i=1}^{n} a_{ij} A_{ik}$ представляет собой определитель матрицы, имеющей два одинаковых столбца (вместо k-го столбца в определителе $\det A$ стоит j-й столбец). Таким образом, получим следующие равенства:

$$AA^V = A^V A = \begin{pmatrix} \det A & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \det A & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \det A \end{pmatrix}.$$

Вынося множитель $\det A$, получим

$$AA^V = A^V A = \det A \cdot E,$$

или

$$A \cdot \frac{A^V}{\det A} = \frac{A^V}{\det A} \cdot A = E.$$

Из этих равенств вытекает существование обратной матрицы для любой невырожденной матрицы A:

$$A^{-1} = \frac{A^V}{\det A},$$

причем левая и правая обратные матрицы совпадают.

Докажем единственность матрицы A^{-1}. Предположим, что существует еще одна матрица C, такая, что $AC = CA = E$, тогда

$$CAA^{-1} = C(AA^{-1}) = CE = C,$$
$$CAA^{-1} = (CA)A^{-1} = EA^{-1} = A^{-1},$$

т.е. $C = A^{-1}$. Теорема доказана.

Если теперь даны квадратные матрицы n-го порядка A и B, из которых A – невырожденная, а B – произвольная, то мы можем решать *матричные уравнения*:

$$AX = B, \qquad YA = B,$$

т.е. выполнять правые и левые деления матрицы B на A. Решением этих матричных уравнений будут

$$X = A^{-1}B, \qquad Y = BA^{-1}. \tag{3}$$

Нахождение обратной матрицы

Существует два способа нахождения обратной матрицы.

1. Первый способ основан на теореме о существовании обратной матрицы.

Пример. Найти обратную матрицу к матрице $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$.

Вычислим определитель этой матрицы $\det A = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 5$. Так как $\det A \neq 0$, то обратная матрица существует. Найдем алгебраические дополнения всех элементов:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 5, \quad A_{12} = -\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 10, \quad A_{13} = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 0,$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 4, \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 12, \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 1,$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1, \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = -3, \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Составим присоединенную матрицу

$$A^V = \begin{pmatrix} 5 & 4 & -1 \\ 10 & 12 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Находим обратную матрицу, поделив каждый элемент присоединенной матрицы на определитель матрицы A:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{4}{5} & -\frac{1}{5} \\ 2 & \frac{12}{5} & -\frac{3}{5} \\ 0 & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}.$$

2. Метод элементарных преобразований.

Элементарными преобразованиями матрицы A называются следующие преобразования этой матрицы:

а) перестановка двух строк или двух столбцов,

б) умножение строки или столбца на отличное от нуля число,

в) прибавление к одной строке или столбцу другой строки или столбца.

Заметим, что если матрица A получается из матрицы B элементарными преобразованиями, то, обратив эти преобразования, можно и матрицу B получить из матрицы A.

Две матрицы называются *эквивалентными*, если одна из этих матриц получается из другой элементарными преобразованиями.

Пусть $S_1, \ldots, S_n$ – матрицы, выражающие элементарные преобразования, которые данную матрицу A приводят к единичной матрице, т.е.

$$S_n \ldots S_1 A = E.$$

Умножив левую и правую части этого матричного равенства справа на матрицу A^{-1}, получим

$$S_n \ldots S_1 E = A^{-1}.$$

Таким образом, одни и те же элементарные преобразования приводят матрицу A к единичной, а единичную матрицу к матрице A^{-1}.

Метод элементарных преобразований нахождения обратной матрицы заключается в том, что к данной матрице A справа приписывается единичная матрица такого же порядка. Затем над строками полученной прямоугольной матрицы производятся элементарные преобразования такие, чтобы на месте матрицы A получилась единичная матрица. При этом на месте единичной матрицы получится матрица, которая будет как раз обратной к матрице A.

Пример. Найти обратную к матрице $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$.

Припишем справа единичную матрицу

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Разделив первую строку на три и обнулив элемент в первом столбце ниже тройки, получим

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & -\frac{4}{3} & 1 \end{array}\right).$$

Умножив вторую строку на три и обнулив элемент во втором столбце выше $\frac{1}{3}$, получим

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & -4 & 3 \end{array}\right).$$

Таким образом,

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}.$$