Лекция 1. Матрицы и определители

Матрицы

Матрицей размера $m \times n$ называется совокупность mn чисел, расположенных в виде таблицы из m строк и n столбцов:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Числа a_{ij} называются *элементами* матрицы. Таким образом, первый индекс элемента a_{ij} указывает на номер строки, второй – на номер столбца, на пересечении которых стоит этот элемент. Если $m=n$, т.е. число строк матрицы равно числу столбцов, то матрица называется *квадратной* матрицей *порядка n.*

Диагональ квадратной матрицы, составленная из элементов a_{11}, a_{22}, …, a_{nn}, называется *главной диагональю.*

Квадратная матрица называется *единичной*, если на главной диагонали у нее стоят единицы, а остальные элементы – нули.

Пусть дана произвольная матрица $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$.Матрица $B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$, у которой каждая строка является столбцом матрицы A с тем же номером (и, следовательно, каждый столбец является строкой матрицы A), называется *транспонированной* к матрице A. Переход от матрицы A к B называется *транспонированием*. Будем обозначать транспонированную матрицу A^T.

Заметим, что $\left(A^T\right)^T = A$.

Определители

Для квадратных матриц существует численная характеристика, которая также имеет и многочисленные другие приложения. Прежде чем сформулировать определение определителя матрицы, введем одно вспомогательное понятие.

Пусть $(s_1, s_2, \dots ,s_n)$ – строка из n различных чисел от 1 до n. Будем говорить, что в строке имеется *нарушение*, если существует такая пара чисел (s_i, s_j), что $i < j$, а $s_i > s_j$. Другими словами, если в этой строке большее число стоит раньше меньшего. Например, в строке (1, 4, 2, 3) имеется два нарушения (4, 2) и (4, 3).

Определителем матрицы порядка n (или *определителем n-го порядка*) называется сумма $n!$ членов, составленная следующим образом: членами служат всевозможные произведения n элементов матрицы, взятых по одному в каждой строке и в каждом столбце и расположенных по возрастанию номеров строк, причем член берется со знаком плюс, если строка из номеров столбцов его элементов имеет четное число нарушений, и со знаком минус – в противном случае.

Для обозначения определителя будем употреблять запись:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad \text{или} \quad \det A .$$

Основываясь на определении, мы можем записать явные формулы для вычисления определителей второго и третьего порядков:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \tag{1}$$

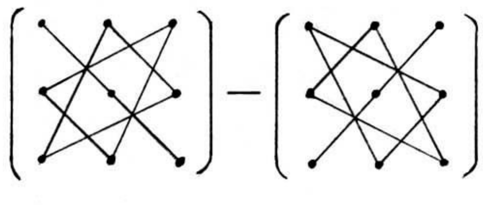
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} - \\ - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} . \tag{2}$$

Примеры:

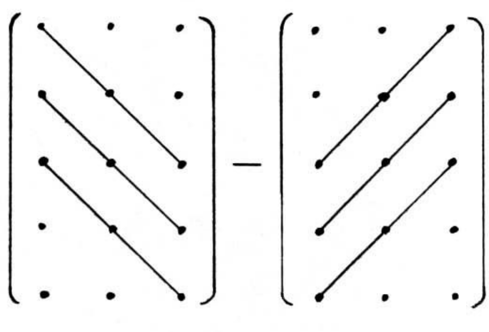
1) $\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 1\cdot 2 - 4\cdot 3 = -10$,

2) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 2\cdot 4\cdot 3 + 1\cdot 0\cdot 0 + 2\cdot 1\cdot 1 - 2\cdot 4\cdot 0 - 2\cdot 0\cdot 1 - 1\cdot 1\cdot 3 = 23$.

Выражение определителя третьего порядка является достаточно громоздким. Для запоминания формулы существуют два удобных способа. Первый способ вычисления определителя третьего порядка схематично можно изобразить следующим образом:



Второй способ заключается в том, что под элементами матрицы выписываются снова первая и вторая строки. Тогда вычисление определителя схематично можно изобразить следующим образом:



Свойства определителей

Перечислим некоторые простейшие свойства определителей.

1. Определитель не меняется при транспонировании матрицы.

Пример.

$$\begin{vmatrix} 4 & -6 & 2 \\ 5 & 9 & 7 \\ 12 & 1 & -5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 5 & 12 \\ -6 & 9 & 1 \\ 2 & 7 & -5 \end{vmatrix}.$$

2. Если матрица содержит строку, состоящую из нулей, то ее определитель равен нулю.

3. Если в матрице поменять местами какие-нибудь две строки, то ее определитель изменит знак.

Пример.

$$\begin{vmatrix} 2 & 6 & 5 \\ 9 & 4 & 1 \\ 3 & 25 & 9 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 9 & 4 & 1 \\ 2 & 6 & 5 \\ 3 & 25 & 9 \end{vmatrix}.$$

4. Если в матрице есть две одинаковые строки, то ее определитель равен нулю.

5. При умножении строки матрицы на число, ее определитель умножается на это число.

6. Если все элементы i-й строки матрицы представлены в виде суммы двух слагаемых $a_{ij} = b_j + c_j$, $j = 1,\ldots,n$, то ее определитель равен сумме определителей двух матриц, у которых все строки, кроме i-й, такие же, как и в заданной матрице, а i-я строка в первой матрице состоит из элементов b_j, а во второй – из элементов c_j.

Прежде чем перейти к следующему свойству, сформулируем важное определение.

Будем говорить, что строка $a = (a_1,\ldots,a_n)$ является *линейной комбинацией строк*

$$b_1 = (b_{11}, b_{12} \ldots, b_{1n}) \ , \ \ldots \ , \ b_m = (b_{m1}, b_{m2} \ldots, b_{mn}) \, ,$$

если существуют некоторые числа $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$, такие, что для любого $i = 1, \ldots, n$ выполняется следующее: $a_i = \alpha_1 b_{1i} + \alpha_2 b_{2i} \ldots + \alpha_m b_{mi}$, или то же самое можно записать в обозначениях строк:

$$a = \alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2 \ldots + \alpha_m b_m \, .$$

7. Если одна из строк матрицы есть линейная комбинация остальных строк этой матрицы, то ее определитель равен нулю.

Пример.

$$\begin{vmatrix} 2 & 7 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 9 & 5 \end{vmatrix} = 0 \, .$$

Этот определитель равен нулю, так как третья строка есть сумма первой строки и второй строки, умноженной на 2.

8. Определитель матрицы не изменится, если к какой-нибудь ее строке прибавить линейную комбинацию остальных строк этой матрицы.

Пример.

$$\begin{vmatrix} 1 & 7 & -1 & 0 \\ 0 & -5 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & -2 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 & 2 \\ 0 & -5 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & -2 & 5 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -5 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & -2 & 5 \end{vmatrix} = 2 \cdot 0 = 0 \, .$$

Второй определитель получен из первого прибавлением к первой строке второй и третьей строк, затем общий множитель первой строки был вынесен за знак определителя по свойству 5 и получился определитель, имеющий две одинаковые строки, который по свойству 4 равен нулю.

Заметим, что из первого свойства вытекает, что все остальные свойства могут быть сформулированы не только для строк матрицы, но и для ее столбцов.

Формулы разложения определителя по строке и столбцу

Пусть A – квадратная матрица с элементами a_{ij}.

Дополнительным минором M_{ij} *элемента* a_{ij} называется определитель матрицы, полученной из A вычеркиванием той строки и того столбца, на пересечении которых стоит элемент a_{ij}, т.е. i-й строки и j-го столбца.

Алгебраическим дополнением элемента a_{ij} называется произведение:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}. \tag{3}$$

Теорема 1. Определитель квадратной матрицы A может быть вычислен по формулам:

$$\det A = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} A_{ik} = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} \tag{4а}$$

$$\det A = \sum_{k=1}^{n} a_{kj} A_{kj} = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj} \tag{4б}$$

Эти формулы называются *формулами разложения определителя по i-й строке и по j-му столбцу*, соответственно.

В качестве примера запишем формулу разложения определителя третьего порядка по первой строке:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \tag{5}$$

Заметим, что при использовании формулы разложения определителя по строке (или по столбцу) удобно иметь в этой строке (в этом столбце) много элементов, равных нулю (тогда соответствующие им миноры не надо будет вычислять). Поэтому полезно предварительно *так преобразовать определитель*, используя свойство 8, *чтобы в одной из строк (или в одном из столбцов) только один элемент остался, отличный от нуля.*

Пример. Вычислить определитель четвертого порядка:

$$D=\begin{vmatrix}0 & 1 & 4 & 0\\ 2 & 3 & -1 & 5\\ 4 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 4 & 1 & -2\end{vmatrix}.$$

Выполним следующее преобразование: умножим второй столбец на (–4) и прибавим его к третьему столбцу. Затем разложим полученный определитель по первой строке. Получим:

$$D=\begin{vmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ 2 & 3 & -13 & 5\\ 4 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 4 & -15 & -2\end{vmatrix}=(-1)^{1+2}\cdot\begin{vmatrix}2 & -13 & 5\\ 4 & 1 & 1\\ 0 & -15 & -2\end{vmatrix}.$$

Умножая первую строку на (–2) и прибавляя ее ко второй строке, затем, раскладывая полученный определитель по первому столбцу, вычисляем:

$$D=(-1)\cdot\begin{vmatrix}2 & -13 & 5\\ 0 & 27 & -9\\ 0 & -15 & -2\end{vmatrix}=(-1)\cdot(-1)^{1+1}\cdot 2\cdot\begin{vmatrix}27 & -9\\ -15 & -2\end{vmatrix}=378.$$

Замечание. Из формул (4а) и (4б) разложения определителя по строке или столбцу следует полезная формула для вычисления определителя *треугольной* матрицы:

$$\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n}\\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n}\\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}\dots a_{nn}. \qquad (6)$$