Лекция 3. Решение систем линейных алгебраических уравнений

Системы линейных алгебраических уравнений

Курс линейной алгебры начинается с изучения систем линейных уравнений с несколькими переменными. Эти системы содержат произвольное число уравнений и неизвестных, причем число уравнений и число неизвестных в общем случае не совпадают.

Система уравнений вида

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

называется *системой m линейных уравнений с n неизвестными.*

Коэффициенты этих уравнений записываются в виде матрицы A, называемой *матрицей системы*, а числа, стоящие в правой части системы, образуют столбец B, называемый *столбцом свободных членов.* Неизвестные системы так же записываются в столбец, называемый *столбец неизвестных*:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}, \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Используя произведение матриц, можно записать данную систему в матричном виде: $AX = B$.

Совокупность чисел $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ называется *решением системы*, если каждое уравнение системы обращается в равенство после подстановки в него чисел $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ вместо неизвестных $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Системы, не имеющие решения, называются *несовместными*.

Системы, имеющие решения, называются *совместными*. Заметим, что система может иметь единственное решение, а может иметь бесконечно много решений.

Одна из задач линейной алгебры состоит в том, чтобы найти метод, позволяющий определить, совместна система или нет, а в случае совместности найти все решения системы.

Метод Крамера

Изложенная выше теория определителей позволяет исследовать на совместность системы, имеющие одинаковое количество уравнений и неизвестных.

Теорема (Крамера). Система n уравнений с n неизвестными

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \tag{1}$$

имеет единственное решение, если определитель матрицы системы отличен от нуля. Это решение находится по *формулам Крамера*:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta},\ x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \dots,\ x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta}, \tag{2}$$

где Δ – определитель матрицы системы, а Δ_k – определитель матрицы, полученной из матрицы системы заменой k-го столбца столбцом свободных членов.

Доказательство. Выберем произвольное число $k = 1,\dots,n$. Умножим левую и правую части первого уравнения системы (1) на A_{1k}, второго уравнения – на A_{2k}, …, последнего – на A_{nk}. Затем сложим левые и правые части полученных равенств, сгруппировав слагаемые с одинаковыми переменными x_i. Получим равенство

$$\sum_{i=1}^{n} a_{i1}x_1A_{ik} + \sum_{i=1}^{n} a_{i2}x_2A_{ik} + \dots + \sum_{i=1}^{n} a_{in}x_nA_{ik} = \sum_{i=1}^{n} b_iA_{ik}\ .$$

или

$$x_1 \cdot \sum_{i=1}^{n} a_{i1}A_{ik} + x_2 \cdot \sum_{i=1}^{n} a_{i2}A_{ik} + \dots + x_n \cdot \sum_{i=1}^{n} a_{in}A_{ik} = \sum_{i=1}^{n} b_iA_{ik}\ .$$

При x_k получим коэффициент $\sum_{i=1}^{n} a_{ik}A_{ik}$. Это есть определитель матрицы системы Δ. Коэффициенты при остальных x_j, $j \neq k$, имеют вид $\sum_{i=1}^{n} a_{ij}A_{ik}$ и будут равны нулю, так как сумма $\sum_{i=1}^{n} a_{ij}A_{ik}$ представляет собой определитель матрицы, имеющей два одинаковых столбца (вместо k-го столбца в определителе Δ стоит j-й столбец).

Таким образом, получили равенство

$$x_k \cdot \Delta = \sum_{i=1}^{n} b_i A_{ik} .$$

Выражение справа, очевидно, является разложением по k-му столбцу определителя

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & b_1 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & b_2 & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & b_n & \dots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

получающегося из определителя Δ заменой k-го столбца столбцом из чисел $b_1, b_2, \dots, b_n$, т.е. Δ_k. Тогда имеем $x_k \cdot \Delta = \Delta_k$. Отсюда, так как $\Delta \neq 0$, получаем $x_k = \dfrac{\Delta_k}{\Delta}$.

Пример. Решить систему.

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 1, \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 4. \end{cases}$$

Вычислим определители:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -5 \\ 1 & 3 & -2 \end{vmatrix} = 28 .$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -5 \\ 4 & 3 & -2 \end{vmatrix} = 13, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -5 \\ 1 & 4 & -2 \end{vmatrix} = 47, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 21.$$

Так как определитель матрицы системы Δ отличен от нуля, то система совместна, тогда решения системы находятся по формулам (2):

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{13}{28}, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{47}{28}, \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{21}{28}.$$

Матричный метод решения систем линейных уравнений

Рассмотрим систему, имеющую одинаковое количество уравнений и неизвестных, такую, что определитель ее матрицы отличен от нуля:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases}$$

По теореме Крамера такая система должна иметь единственное решение. Это решение может быть найдено другим способом, без применения теоремы Крамера.

Запишем данную систему в матричном виде: $AX = B$, где

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ . \ . \ . & . \ . \ . & . \ . \ . & . \ . \ . \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Так как $\det A \neq 0$, то для матрицы A существует обратная A^{-1}, и мы можем выразить неизвестный столбец X из матричного равенства:

$$X = A^{-1}B. \tag{3}$$

Это и есть матричный способ решения систем.

Пример. Решить систему $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = 2, \\ 4x_1 + 3x_2 = -1. \end{cases}$

Запишем систему в матричном виде: $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$. Так как $\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$, то для этой матрицы существует обратная, которую мы уже находили: $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$. Найдем теперь решение системы по формуле (3): $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -11 \end{pmatrix}$. Таким образом, $x_1 = 8,\ x_2 = -11$.

Метод Гаусса решения систем линейных уравнений

Метод Гаусса является универсальным методом решения систем линейных уравнений с произвольным количеством уравнений и неизвестных.

Рассмотрим произвольную систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

Пусть $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ . & . & . \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$ – матрица системы.

Матрица $A^* = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ . & . & . & . \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$, получающаяся из A приписыванием столбца свободных членов, называется *расширенной* матрицей.

Основная идея метода Гаусса заключается в том, что расширенная матрица A^* системы уравнений путем элементарных преобразований над строками приводится к ступенчатой форме, когда все элементы ниже главной диагонали обращены в нуль.

$$A^* \sim \begin{pmatrix} a'_{11} & a'_{12} & a'_{13} & \dots & a'_{1r} & \dots & b'_1 \\ 0 & a'_{22} & a'_{23} & \dots & a'_{2r} & \dots & b'_2 \\ 0 & 0 & a'_{33} & \dots & a'_{3r} & \dots & b'_3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a'_{rr} & \dots & b'_r \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \qquad (4)$$

По полученной матрице выписывается система, которая, очевидно, будет эквивалентна исходной.

Если в матрице (4) получилась строка с единственным ненулевым элементом – b'_s, то система несовместна, так как этой строке соответствует уравнение $0 = b'_s$, не имеющее решений. В противном случае возможны два варианта:

1) $r = n$ и нижняя ненулевая строка матрицы (4) определяет уравнение: $a'_{nn}x_n = b'_n$. Так как $a'_{nn} \neq 0$, то имеем решение $x_n = b'_n / a'_{nn}$. Подставим его в вышестоящее уравнение и получим уравнение с одной неизвестной x_{n-1}, решим его и перейдем к следующему уравнению и т.д. В результате получим единственное решение системы: $(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$.

2) $r < n$ и нижняя ненулевая строка дает уравнение с несколькими неизвестными: $a'_{rr}x_r + a'_{r,r+1}x_{r+1} + \dots + a'_{rn}x_n = b'_r$. Назовем $x_{r+1}, \dots, x_n$ параметрами и выразим через них сначала x_r, а затем остальные переменные $x_1, \dots, x_{r-1}$. Получаем бесконечное множество решений системы.

Пример. Решить систему: $\begin{cases} x_1 - 5x_2 + 2x_3 = 6, \\ 3x_1 - x_2 - x_3 = -3, \\ -2x_1 - 4x_2 + 3x_3 = 9. \end{cases}$

Запишем расширенную матрицу $A^* = \begin{pmatrix} 1 & -5 & 2 & 6 \\ 3 & -1 & -1 & -3 \\ -2 & -4 & 3 & 9 \end{pmatrix}$. Приведем ее к ступенчатой форме (4):

$$A^* = \begin{pmatrix} 1 & -5 & 2 & 6 \\ 3 & -1 & -1 & -3 \\ -2 & -4 & 3 & 9 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -5 & 2 & 6 \\ 0 & 14 & -7 & -21 \\ 0 & -14 & 7 & 21 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -5 & 2 & 6 \\ 0 & 2 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

По полученной матрице выписываем систему: $\begin{cases} x_1 - 5x_2 + 2x_3 = 6, \\ \quad 2x_2 - x_3 = -3. \end{cases}$ Переменную x_3 назовем параметром и обозначим $x_3 = c$. Находим x_2 из второго уравнения: $x_2 = \frac{c-3}{2}$.

Находим из первого уравнения $x_1 = \frac{5c-15}{2} - 2c + 6 = \frac{c-3}{2}$. Таким образом, получаем решение системы: $X = \begin{pmatrix} (c-3)/2 \\ (c-3)/2 \\ c \end{pmatrix}$, где c – любое число.