Вычисление определителей 2-го, 3-го и высших порядков

1. Определитель 2-го и 3-го порядков.

Матрицей размера $m \times n$ называется совокупность mn чисел, расположенных в виде таблицы из m строк и n столбцов:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Для квадратных матриц существует численная характеристика, которая также имеет и многочисленные другие приложения – *определитель*.

Для обозначения определителя употребляется запись:

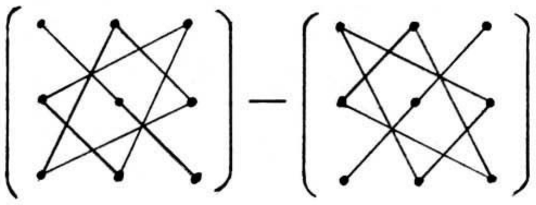
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad \text{или} \quad \det A .$$

Приведем формулы вычисления определителей второго и третьего порядков:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \qquad (1.1)$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} - \\ - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}. \qquad (1.2)$$

Выражение определителя третьего порядка является достаточно громоздким. Для запоминания формулы существуют два удобных способа. Первый способ вычисления определителя третьего порядка схематично можно изобразить следующим образом:



2. Определитель произвольного порядка.

Пусть A – квадратная матрица с элементами a_{ij}.

Дополнительным минором M_{ij} *элемента* a_{ij} называется определитель матрицы, полученной из A вычеркиванием той строки и того столбца, на пересечении которых стоит элемент a_{ij}, т.е. i-й строки и j-го столбца.

Алгебраическим дополнением элемента a_{ij} называется произведение:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}. \tag{1.3}$$

Определитель квадратной матрицы A может быть вычислен по формулам:

$$\det A = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} A_{ik} = a_{i1} A_{i1} + a_{i2} A_{i2} + \cdots + a_{in} A_{in} \tag{1.4а}$$

$$\det A = \sum_{k=1}^{n} a_{kj} A_{kj} = a_{1j} A_{1j} + a_{2j} A_{2j} + \cdots + a_{nj} A_{nj} \tag{1.4б}$$

Эти формулы называются *формулами разложения определителя по i-й строке и по j-му столбцу*, соответственно.

В качестве примера запишем формулу разложения определителя третьего порядка по первой строке:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \tag{1.5}$$

Заметим, что при использовании формулы разложения определителя по строке (или по столбцу) удобно иметь в этой строке (в этом столбце) много элементов, равных нулю (тогда соответствующие им миноры не надо будет вычислять). Поэтому полезно предварительно *так преобразовать определитель*, *чтобы в одной из строк (или в одном из столбцов) только один элемент остался, отличный от нуля.* При этом разрешается производить следующие преобразования:

1) прибавлять к одной из строк (одному из столбцов) другую строку (столбец), умноженную на некоторое число;

2) выносить общий множитель строки (столбца) за знак определителя;

3) при перестановке строк или столбцов необходимо изменить знак определителя на противоположный.

Из формул (1.4а) и (1.4б) разложения определителя по строке или столбцу следует формула для вычисления определителя *треугольной* матрицы:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}\dots a_{nn}. \qquad (1.6)$$

Примеры решения задач

1. Вычислить определитель второго порядка: $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$.

Решение: Используем формулу (1.1): $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 - 2 \cdot 3 = -2$.

2. Вычислить определитель 3-го порядка: $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 3 & 4 & 2 \end{vmatrix}$.

Решение: Вычисляя определитель разложением по первой строке по формуле (1.5), получим:

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 3 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$= 3 \cdot (5 \cdot 2 - 3 \cdot 4) - 2 \cdot (2 \cdot 2 - 3 \cdot 3) + 1 \cdot (2 \cdot 4 - 5 \cdot 3) =$$

$$= 3 \cdot (-2) - 2 \cdot (-5) + 1 \cdot (-7) = -3.$$

3. Вычислить определитель треугольной матрицы

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}.$$

Решение: Из шести слагаемых в формуле (1.2) не равным нулю будет только одно: $1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$. Следовательно, определитель равен 6. Тот же самый ответ можно было получить, используя формулу (1.6).

4. Вычислить определитель разложением по какой-нибудь строке или столбцу:

$$\begin{vmatrix} 5 & 6 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 7 & -4 & 5 \end{vmatrix}.$$

Решение: Удобнее всего вычислять определитель разложением по строке или столбцу, содержащим наибольшее количество нулей. Разложим определитель по 2-й строке (см. формулу (1.4а)):

$$(-1)^{2+1} \cdot 0 \cdot \begin{vmatrix} 6 & 3 \\ -4 & 5 \end{vmatrix} + (-1)^{2+2} \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 7 & 5 \end{vmatrix} + (-1)^{2+3} \cdot 0 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 7 & -4 \end{vmatrix} =$$

$$= 2 \cdot (25 - 21) = 8.$$

5. Вычислить определитель 4-го порядка разложением по строке или столбцу:

$$\Delta = \begin{vmatrix} -2 & -3 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & 5 & -2 \\ 0 & -2 & 4 & 1 \end{vmatrix}.$$

Решение: Удобнее пользоваться разложением по строке или столбцу, содержащим наибольшее количество нулей. Разложим определитель по первой строке (см. формулу (1.4а)):

$$\Delta = (-2) \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 & 2 \\ -1 & 5 & -2 \\ -2 & 4 & 1 \end{vmatrix} - (-3) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & 5 & -2 \\ 0 & 4 & 1 \end{vmatrix} + 0 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 5 \\ 0 & -2 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$= -2 \cdot 9 + 3 \cdot 31 + 0 - 2 \cdot 6 = 63.$$

6. Вычислить определитель приведением к треугольному виду:

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ -1 & -1 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ -1 & -1 & -1 & 3 & \dots & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & -1 & -1 & -1 & \dots & n-1 \end{vmatrix}$$

Решение: Прибавляя к каждой строке определителя первую строку, получим:

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & \dots & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & \dots & 4 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & n \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n = n!$$

Здесь мы использовали формулу (1.6).