## Действия над матрицами, вычисление обратной матрицы. Решение матричных уравнений

### 1. Алгебра матриц.

Пусть дана произвольная матрица $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$. Матрица $B=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$, у которой каждая строка является столбцом матрицы $A$ с тем же номером (и, следовательно, каждый столбец является строкой матрицы $A$), называется *транспонированной* к матрице $A$. Переход от матрицы $A$ к $B$ называется *транспонированием*. Будем обозначать транспонированную матрицу $A^T$.

Матрицы $A$ и $B$ одинаковых размеров $n\times m$ с элементами $a_{ij}$ и $b_{ij}$ называются *равными*, если $a_{ij}=b_{ij}$ для $i = 1, 2, \dots, n$, $j = 1, 2, \dots, m$. Равенство матриц обозначается $A = B$.

*Суммой* двух матриц $A$ и $B$ одинаковых размеров $n\times m$ с элементами $a_{ij}$ и $b_{ij}$ называется матрица $C = A + B$, элементы которой получаются путем сложения соответствующих элементов данных матриц: $c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$ для $i = 1, 2, \dots, n$, $j = 1, 2, \dots, m$.

*Произведением* матрицы $A$ *на число* $\lambda$ называется матрица $C = \lambda\cdot A$, элементы которой получаются умножением элементов матрицы $A$ на число $\lambda$: $c_{ij}=\lambda\cdot a_{ij}$, где $i = 1, 2, \dots, n$, $j = 1, 2, \dots, m$.

*Произведением* матрицы $A$ размера $m\times n$ с элементами $a_{ij}$ и матрицы $B$ размера $n\times p$ с элементами $b_{ij}$ называется матрица $C = AB$ размера $m\times p$ с элементами $c_{ij}$, если

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\dots+a_{in}b_{nj}=\sum_{s=1}^{n}a_{is}b_{sj}\,, \tag{2.1}$$

где $i = 1, 2, \ldots, m$, $j = 1, 2, \ldots, p$.

Отметим, что произведение матриц не коммутативно. Но удовлетворяет свойствам ассоциативности и дистрибутивности.

**2. Обратная матрица.**

Пусть дана невырожденная (т.е. с неравным нулю определителем) матрица $n$-го порядка $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$. Матрица $A^V = \begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{n1} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ A_{1n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$, составленная из алгебраических дополнений к элементам матрицы $A$, причем алгебраическое дополнение $A_{ij}$ к элементу $a_{ij}$ стоит на месте $(ji)$, т.е. на пересечении $j$-й строки и $i$-го столбца, называется *присоединенной* к матрице $A$.

Если $A$ – невырожденная квадратная матрица, то она имеет единственную обратную матрицу, получающуюся из присоединенной $A^V$ делением всех ее элементов на $\det A$:

$$A^{-1} = \frac{A^V}{\det A} = \begin{pmatrix} \frac{A_{11}}{\det A} & \cdots & \frac{A_{n1}}{\det A} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{A_{1n}}{\det A} & \cdots & \frac{A_{nn}}{\det A} \end{pmatrix} \qquad (2.2)$$

Если теперь даны квадратные матрицы $n$-го порядка $A$ и $B$, из которых $A$ – невырожденная, а $B$ – произвольная, то мы можем решать *матричные уравнения*:

$$AX = B, \qquad YA = B,$$

т.е. выполнять правые и левые деления матрицы $B$ на $A$. Решением этих матричных уравнений будут

$$X = A^{-1}B, \qquad Y = BA^{-1}. \qquad (2.3)$$

Обратную матрицу можно находить двумя способами. Первый способ – это использование формулы (2.2). Второй способ – это метод элементарных преобразований.

*Элементарными преобразованиями* матрицы $A$ называются следующие преобразования этой матрицы:

а) перестановка двух строк или двух столбцов,

б) умножение строки или столбца на отличное от нуля число,

в) прибавление к одной строке или столбцу другой строки или столбца.

Метод элементарных преобразований нахождения обратной матрицы заключается в том, что к данной матрице $A$ справа приписывается единичная матрица такого же порядка. Затем над строками полученной прямоугольной матрицы производятся элементарные преобразования такие, чтобы на месте матрицы $A$ получилась единичная матрица. При этом на месте единичной матрицы получится матрица, которая будет как раз обратной к матрице $A$.

### *Примеры решения задач*

1. Найти линейную комбинацию матриц $2A+3B$, где $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-2 & 3 & 0\\ 2 & 1 & 1\end{pmatrix}$.

*Решение*: $2A+3B=2\cdot\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix}+3\cdot\begin{pmatrix}-2 & 3 & 0\\ 2 & 1 & 1\end{pmatrix}=$

$$=\begin{pmatrix}2 & 4 & 6\\ 0 & 2 & -2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-6 & 9 & 0\\ 6 & 3 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2-6 & 4+9 & 6+0\\ 0+6 & 2+3 & -2+3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4 & 13 & 6\\ 6 & 5 & 1\end{pmatrix}.$$

2. Пусть $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 0 & -1\end{pmatrix}$ – матрица размерности 2 x 3, $B=\begin{pmatrix}3 & 4 & 5\\ 6 & 0 & -2\\ 7 & 1 & 8\end{pmatrix}$ – матрица размерности 3 x 3. Найти произведения $AB$ и $BA$ (если это возможно).

*Решение:* Используем формулу (2.1):

$$AB=\begin{pmatrix}1\cdot 3+2\cdot 6+3\cdot 7 & 1\cdot 4+2\cdot 0+3\cdot 1 & 1\cdot 5+2\cdot(-2)+3\cdot 8\\ 1\cdot 3+0\cdot 6+(-1)\cdot 7 & 1\cdot 4+0\cdot 0+(-1)\cdot 1 & 1\cdot 5+0\cdot(-2)+(-1)\cdot 8\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}36 & 7 & 25\\ -4 & 3 & -3\end{pmatrix}.$$

Произведение $BA$ не существует, так как число столбцов матрицы $B$ не совпадает с числом строк матрицы $A$: $3\neq 2$.

3. Найти $A^3$, если $A=\begin{pmatrix}3 & 2\\ 1 & 4\end{pmatrix}$.

*Решение*: $A^2=\begin{pmatrix}3 & 2\\ 1 & 4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3 & 2\\ 1 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9+2 & 6+8\\ 3+4 & 2+16\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}11 & 14\\ 7 & 18\end{pmatrix}$.

$$A^3=A^2\cdot A=\begin{pmatrix}11 & 14\\ 7 & 18\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3 & 2\\ 1 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}33+14 & 22+56\\ 21+18 & 14+72\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}47 & 78\\ 39 & 86\end{pmatrix}.$$

4. Найти значение матричного многочлена $f(A)$, если $f(x)=-2x^2+5x+9$, $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 0\end{pmatrix}$.

*Решение*: $A^2=A\cdot A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7 & 2\\ 3 & 6\end{pmatrix}$.

$$f(A)=-2A^2+5A+9E=-2\cdot\begin{pmatrix}7 & 2\\ 3 & 6\end{pmatrix}+5\cdot\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 0\end{pmatrix}+9\cdot\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}-14 & -4\\ -6 & -12\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}5 & 10\\ 15 & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}9 & 0\\ 0 & 9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 6\\ 9 & -3\end{pmatrix}.$$

5. Транспонировать матрицу $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\end{pmatrix}$.

*Решение*: Так как у матрицы $A$ две строки и три столбца, то у матрицы $A^T$ будет три строки и два столбца: $A^T=\begin{pmatrix}1 & 4\\ 2 & 5\\ 3 & 6\end{pmatrix}$.

6. Дана матрица $A=\begin{pmatrix}3 & 2 & 2\\ 1 & 3 & 1\\ 5 & 3 & 4\end{pmatrix}$. Найти обратную матрицу.

*Решение*: Воспользуемся первым способом нахождения обратной матрицы, т.е. формулой (2.2). Вычисляем определитель матрицы $A$:

$$\det A=\begin{vmatrix}3 & 2 & 2\\ 1 & 3 & 1\\ 5 & 3 & 4\end{vmatrix}=27+2-24=5.$$

Так как $\det A \neq 0$, то матрица $A^{-1}$ существует. Найдем алгебраические дополнения ко всем элементам матрицы *A*:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 9; \qquad A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -(8-6) = -2;$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = -(4-5) = 1; \qquad A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = 12 - 10 = 2;$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = -12; \qquad A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = -(9-10) = 1;$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 6 = -4;$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -(3-2) = -1;$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 9 - 2 = 7.$$

Составим присоединенную матрицу: $A^V = \begin{pmatrix} 9 & -2 & -4 \\ 1 & 2 & -1 \\ -12 & 1 & 7 \end{pmatrix}$. Находим обратную матрицу, поделив каждый элемент присоединенной матрицы на определитель матрицы *A*. Получаем ответ:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{9}{5} & \frac{-2}{5} & \frac{-4}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & \frac{-1}{5} \\ \frac{-12}{5} & \frac{1}{5} & \frac{7}{5} \end{pmatrix}.$$

7. Решить матричное уравнение: $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$.

*Решение*: Запишем данное матричное уравнение в виде $AX = B$. Его решением является матрица $X = A^{-1} \cdot B$ (если существует матрица $A^{-1}$). Найдем определитель матрицы *A*: $\det A = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$. Значит, обратная матрица $A^{-1}$ существует, и исходное уравнение имеет (единственное) решение.

Найдем обратную матрицу: $A_{11} = -3,\quad A_{21} = -2,\quad A_{12} = -2,\quad A_{22} = -1$; $A^V = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$, $A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. Найдем решение матричного уравнения:

$$X = A^{-1} \cdot B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

8. Найти обратную к матрице $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$, используя метод элементарных преобразований.

*Решение*: Припишем справа единичную матрицу

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Разделив первую строку на три и обнулив элемент в первом столбце ниже тройки, получим

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & -\frac{4}{3} & 1 \end{array}\right).$$

Умножив вторую строку на три и обнулив элемент во втором столбце выше $\frac{1}{3}$, получим

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & -4 & 3 \end{array}\right).$$

Таким образом, $A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$.