Решение систем линейных уравнений методом Крамера и Гаусса

1. Метод Крамера.

Система уравнений вида

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \tag{3.1}$$

называется *системой m линейных уравнений с n неизвестными.*

Коэффициенты этих уравнений записываются в виде матрицы A, называемой *матрицей системы*, а числа, стоящие в правой части системы, образуют столбец B, называемый *столбцом свободных членов.* Неизвестные системы так же записываются в столбец, называемый *столбец неизвестных*:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}, \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Используя произведение матриц, можно записать данную систему в матричном виде: $AX = B$.

Совокупность чисел $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ называется *решением системы*, если каждое уравнение системы обращается в равенство после подстановки в него чисел $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ вместо неизвестных $x_1, x_2, \dots, x_n$.

Системы, не имеющие решения, называются *несовместными*.

Системы, имеющие решения, называются *совместными*. Заметим, что система может иметь единственное решение, а может иметь бесконечно много решений.

Для нахождения единственного решения систем с одинаковым количеством уравнений и неизвестных есть метод, называемый *метод Крамера*.

Система n уравнений с n неизвестными

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

имеет единственное решение, если определитель матрицы системы отличен от нуля. Это решение находится по формулам Крамера:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \dots, x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta}, \tag{3.2}$$

где Δ – определитель матрицы системы, а Δ_k – определитель матрицы, полученной из матрицы системы заменой k-го столбца столбцом свободных членов.

2. Метод Гаусса.

Матрица $A^* = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$, получающаяся из A приписыванием столбца свободных членов, называется *расширенной* матрицей.

Основная идея метода Гаусса заключается в том, что расширенная матрица A^* системы уравнений (3.1) путем элементарных преобразований над строками приводится к *ступенчатой форме*, когда все элементы ниже главной диагонали обращены в нуль.

$$A^* \sim \begin{pmatrix} a'_{11} & a'_{12} & a'_{13} & \dots & a'_{1r} & \dots & b'_1 \\ 0 & a'_{22} & a'_{23} & \dots & a'_{2r} & \dots & b'_2 \\ 0 & 0 & a'_{33} & \dots & a'_{3r} & \dots & b'_3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a'_{rr} & \dots & b'_r \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \tag{3.3}$$

По полученной матрице выписывается система, которая, очевидно, будет эквивалентна исходной.

Если в матрице (3.3) получилась строка с единственным ненулевым элементом – b'_s, то система несовместна, так как этой строке соответствует уравнение $0=b'_s$, не имеющее решений. В противном случае возможны два варианта:

1) $r = n$ и нижняя ненулевая строка матрицы (3.3) определяет уравнение: $a'_{nn}x_n = b'_n$. Так как $a'_{nn} \neq 0$, то имеем решение $x_n = b'_n / a'_{nn}$. Подставим его в вышестоящее уравнение и получим уравнение с одной неизвестной x_{n-1}, решим его и перейдем к следующему уравнению и т.д. В результате получим единственное решение системы: $(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$.

2) $r < n$ и нижняя ненулевая строка дает уравнение с несколькими неизвестными: $a'_{rr}x_r + a'_{r,r+1}x_{r+1} + \cdots + a'_{rn}x_n = b'_r$. Назовем $x_{r+1},\ldots,x_n$ параметрами и выразим через них сначала x_r, а затем остальные переменные $x_1,\ldots,x_{r-1}$. Получаем бесконечное множество решений системы.

Примеры решения задач

1. Решить систему линейных уравнений методом Крамера:

$$\begin{cases} x+y+z=3, \\ x-y+3z+7, \\ 2x+3y-z=0. \end{cases}$$

Решение. Вычислим определитель матрицы системы:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & -4 & 3 \\ -1 & 4 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 8-4=4 \neq 0.$$

Так как $\Delta \neq 0$, то система имеет единственное решение, которое находится по формулам Крамера. Вычисляем

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 7 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 7 & -4 & 3 \\ 0 & 4 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 7 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & -1 \end{vmatrix} = -4\cdot(6-7) = -4\cdot(-1) = 4,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 7 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -4 & -2 \\ 1 & 7 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -2\cdot 2\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 7 \\ 2 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 8 .$$

По формулам (3.2) находим решение системы:

$$x = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{4}{4} = 1; \quad y = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{0}{4} = 0; \quad z = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{8}{4} = 2 .$$

2. Решить систему методом Гаусса: $\begin{cases} x + y - z = -4, \\ x + 2y - 3z = 0, \\ -2x - 2z = 16. \end{cases}$

Решение: Составим расширенную матрицу системы и приведем ее к ступенчатому виду (3.3):

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -4 \\ 1 & 2 & -3 & 0 \\ -2 & 0 & -2 & 16 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 2 & -4 & 8 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Получили ступенчатую матрицу. Выпишем по полученной матрице систему, которая будет эквивалентна исходной: $\begin{cases} x + y - z = -4, \\ y - 2z = 4. \end{cases}$ Эта система совместна и имеет бесконечно много решений. Из второго уравнения находим: $y = 4 + 2z$. Из первого уравнения находим $x = -4 + z - 4 - 2z = -8 - z$. Таким образом, решение системы будут составлять два равенства: $x = -8 - z,\ y = 4 + 2z$.