Лекция 5. Линейные операции над векторами. Разложение вектора по базису.

Линейные операции над векторами

Линейными операциями принято называть операцию сложения векторов и операцию умножения вектора на число.

Суммой $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ двух векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ называется вектор, который идет из начала вектора $\boldsymbol{a}$ в конец вектора $\boldsymbol{b}$, при условии, что вектор $\boldsymbol{b}$ приложен к концу вектора $\boldsymbol{a}$.

Существует два способа сложения векторов: по правилу треугольника (рис. 1) и по правилу параллелограмма (рис. 2).

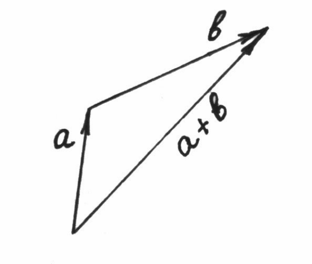

Рисунок 1

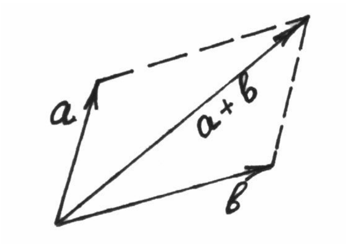

Рисунок 2

Сложение векторов обладает следующими свойствами:

1) переместительное свойство: $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$;
2) сочетательное свойство: $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$.

Справедливость второго свойства видна на рис. 3.

Используя сочетательное свойство сложения векторов, легко определить сложение любого конечного числа векторов.

Общее правило сложения векторов $\boldsymbol{a}_1,\ldots,\boldsymbol{a}_n$: надо к концу вектора $\boldsymbol{a}_1$ приложить вектор $\boldsymbol{a}_2$, затем к концу вектора $\boldsymbol{a}_2$ приложить $\boldsymbol{a}_3$, …, к концу $\boldsymbol{a}_{n-1}$ приложить $\boldsymbol{a}_n$. Тогда суммой $\boldsymbol{a}_1+\cdots+\boldsymbol{a}_n$ будет вектор, идущий из начала $\boldsymbol{a}_1$ в конец $\boldsymbol{a}_n$.

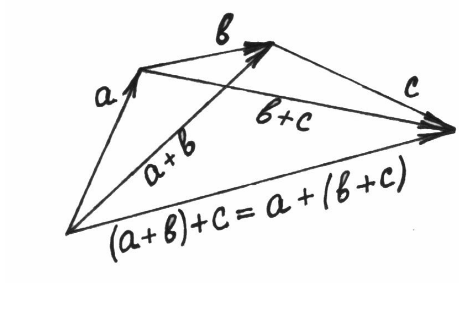

Рисунок 3

Общее правило сложения векторов представлено на рис. 4.

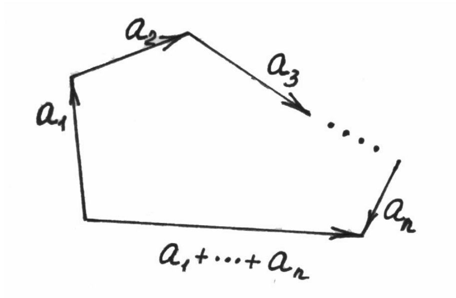

Рисунок 4

Вектор $-\boldsymbol{a}$ называется *обратным* вектору $\boldsymbol{a}$, если он коллинеарен вектору $\boldsymbol{a}$, имеет длину, равную $|\boldsymbol{a}|$, и направлен в противоположную сторону.

Очевидно, $\boldsymbol{a} + (-\boldsymbol{a}) = 0$.

Разностью двух векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ называется вектор $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} = \boldsymbol{a} + (-\boldsymbol{b})$.

На рисунке 5 показано, как построить разность векторов двумя различными способами.

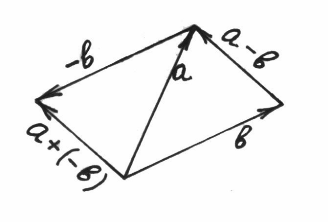

Рисунок 5

Произведением числа α *на вектор* $\boldsymbol{a}$ называется вектор $\alpha\boldsymbol{a}$, коллинеарный вектору $\boldsymbol{a}$, имеющий длину $|\alpha|\cdot|\boldsymbol{a}|$, и направленный также, как $\boldsymbol{a}$, если $\alpha > 0$, и в противоположную сторону, если $\alpha < 0$. Если $\alpha = 0$, то $\alpha\boldsymbol{a} = 0$.

Перечислим свойства, которыми обладает операция произведения вектора на число.

1) Распределительное свойство относительно суммы векторов: $\alpha(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) = \alpha\boldsymbol{a} + \alpha\boldsymbol{b}$.

Это свойство следует из подобия треугольников (рис. 6). В самом деле, треугольник ABC подобен треугольнику AB_1C_1 с коэффициентом подобия α.

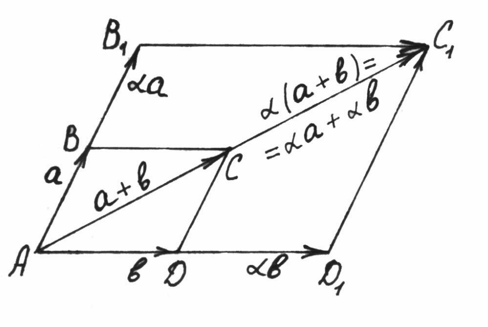

Рисунок 6

Следовательно, $\overline{AC_1} = \alpha\overline{AC} = \alpha(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$. Но, с другой стороны, имеем $\overline{AC_1} = \overline{AB_1} + \overline{AD_1} = \alpha\boldsymbol{a} + \alpha\boldsymbol{b}$, отсюда следует требуемое свойство.

2) Распределительное свойство относительно суммы чисел: $(\alpha + \beta)\boldsymbol{a} = \alpha\boldsymbol{a} + \beta\boldsymbol{a}$.

Это свойство очевидно.

3) Сочетательное свойство: $\alpha(\beta\boldsymbol{a}) = (\alpha\beta)\boldsymbol{a}$.

Это свойство также очевидно, так как нет никакой разницы, умножать длину вектора сначала на $|\beta|$, а потом на $|\alpha|$, или сразу умножить на $|\alpha\beta|$.

4) Если вектор $\boldsymbol{b}$ коллинеарен вектору $\boldsymbol{a}$, то существует число λ такое, что $\boldsymbol{b} = \lambda\boldsymbol{a}$.

Для доказательства этого свойства приложим векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ к одной точке O. Тогда они расположатся на одной прямой и будет возможен один из двух случаев, представленных на рис. 7 и 8 (мы будем считать, что $\boldsymbol{a} \neq 0$, $\boldsymbol{b} \neq 0$ и $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{b}$).

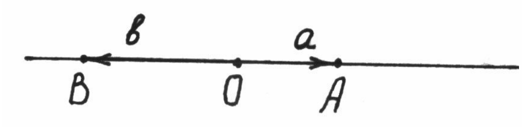

Рисунок 7

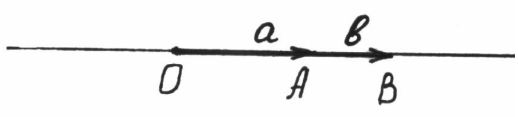

Рисунок 8

И в том, и в другом случае точка O делит вектор $\overline{BA}$ в некотором отношении. Обозначим его $-\lambda$. Тогда

$$\frac{BO}{OA} = -\lambda .$$

Отсюда получаем $OB = \lambda \cdot OA$. В первом случае, (рис. 7) $\lambda < 0$. В другом случае, (рис. 8) $\lambda > 0$.

Заметим, что OB и $\lambda \cdot OA$ – это алгебраические величины векторов $\boldsymbol{b}$ и $\lambda\boldsymbol{a}$. Но равенство алгебраических величин влечет равенство векторов на оси. Следовательно, $\boldsymbol{b} = \lambda\boldsymbol{a}$.

Базис. Разложение вектора по базису

Три вектора в пространстве называются *компланарными*, если они параллельны одной плоскости.

Базисом на плоскости называются любые два неколлинеарных вектора.

Базисом в пространстве называются любые три некомпланарных вектора.

Будем говорить, что вектор $\boldsymbol{a}$ *раскладывается по векторам* $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$, или *выражается* через эти векторы, если справедливо равенство:

$$\boldsymbol{a} = \alpha_1 \boldsymbol{a}_1 + \cdots + \alpha_n \boldsymbol{a}_n,$$

где $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ – некоторые числа.

Теорема 1. Любой вектор $\boldsymbol{a}$ на плоскости может быть разложен по любому базису $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ на этой плоскости: $\boldsymbol{a} = \alpha_1 \boldsymbol{e}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{e}_2$. Любой вектор $\boldsymbol{a}$ в пространстве может быть разложен по любому базису $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ в пространстве: $\boldsymbol{a} = \alpha_1 \boldsymbol{e}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{e}_2 + \alpha_3 \boldsymbol{e}_3$. Причем в обоих случаях разложение единственно.

Доказательство. Пусть векторы $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ лежат в одной плоскости. Приложим их к одной точке O (рис 9). Если вектор $\boldsymbol{a}$ коллинеарен вектору $\boldsymbol{e}_1$ (или $\boldsymbol{e}_2$), то по свойству 4 $\boldsymbol{a} = \lambda \boldsymbol{e}_1$ (или $\boldsymbol{a} = \lambda \boldsymbol{e}_2$), и теорема будет верна, если взять $\alpha_1 = \lambda, \alpha_2 = 0$ (или $\alpha_1 = 0, \alpha_2 = \lambda$).

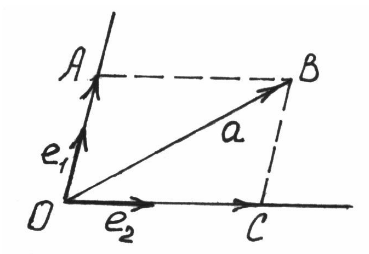

Рисунок 9

Пусть $\boldsymbol{a}$ не коллинеарен не $\boldsymbol{e}_1$, ни $\boldsymbol{e}_2$. Построим параллелограмм $OABC$ так, что $\boldsymbol{e}_1$ и $\boldsymbol{e}_2$ лежат на сторонах параллелограмма (или на их продолжении), а вектор $\boldsymbol{a} = \overline{OB}$

является его диагональю. Тогда $\boldsymbol{a} = \overline{OA} + \overline{OC}$. Так как $\overline{OA}$ коллинеарен $\boldsymbol{e}_1$, а $\overline{OC}$ коллинеарен $\boldsymbol{e}_2$, то из четвертого свойства произведения вектора на число следует требуемое равенство: $\boldsymbol{a} = \alpha_1\boldsymbol{e}_1 + \alpha_2\boldsymbol{e}_2$.

Докажем теперь вторую часть теоремы. Пусть $\boldsymbol{a}$ – вектор в пространстве. Снова приложим все векторы $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ к одной точке *O*. Если $\boldsymbol{a}$ вместе с какой-нибудь парой векторов из базиса образует компланарную тройку векторов, например, $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ – компланарны, то по первой части теоремы $\boldsymbol{a} = \alpha_1\boldsymbol{e}_1 + \alpha_2\boldsymbol{e}_2$. Тогда взяв $\alpha_3 = 0$, получим утверждение теоремы.

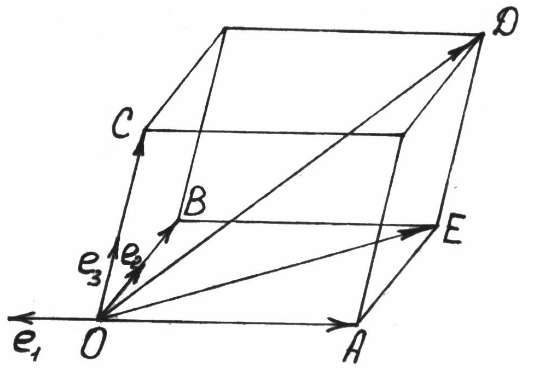

Рисунок 10

Пусть никакие три вектора из $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ не компланарны. Тогда можно построить параллелепипед так, что векторы $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ лежат на его сторонах (или на их продолжениях), а $\boldsymbol{a}$ является его диагональю (рис. 10). Тогда $\boldsymbol{a} = \overline{OE} + \overline{ED} = \overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC}$. Или, как и выше, $\boldsymbol{a} = \alpha_1\boldsymbol{e}_1 + \alpha_2\boldsymbol{e}_2 + \alpha_3\boldsymbol{e}_3$.

Докажем теперь единственность для пространственного случая (плоский случай доказывается аналогично). Пусть существует два различных разложения вектора $\boldsymbol{a}$:

$$\boldsymbol{a} = \alpha_1\boldsymbol{e}_1 + \alpha_2\boldsymbol{e}_2 + \alpha_3\boldsymbol{e}_3$$

и

$$\boldsymbol{a} = \alpha_1'\boldsymbol{e}_1 + \alpha_2'\boldsymbol{e}_2 + \alpha_3'\boldsymbol{e}_3.$$

Вычтем из первого равенства второе, получим:

$$(\alpha_1 - \alpha_1')\boldsymbol{e}_1 + (\alpha_2 - \alpha_2')\boldsymbol{e}_2 + (\alpha_3 - \alpha_3')\boldsymbol{e}_3 = 0.$$

Ясно, что хотя бы одна из скобок в этом равенстве не равна нулю, пусть это будет $(\alpha_1 - \alpha_1') \neq 0$. Поделим полученное равенство на эту скобку и перепишем его в виде

$$e_1 = -\frac{(\alpha_2 - \alpha_2')}{(\alpha_1 - \alpha_1')} e_2 - \frac{(\alpha_3 - \alpha_3')}{(\alpha_1 - \alpha_1')} e_3 .$$

Полученное равенство означает, что вектор $\boldsymbol{e}_1$ выражается через векторы $\boldsymbol{e}_2$ и $\boldsymbol{e}_3$, следовательно, он лежит с ними в одной плоскости, но это противоречит некомпланарности векторов $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$. Следовательно, все скобки в равенстве должны равняться нулю, т.е.

$$\alpha_1 - \alpha_1' = 0, \quad \alpha_2 - \alpha_2' = 0, \quad \alpha_3 - \alpha_3' = 0 ,$$

или

$$\alpha_1 = \alpha_1', \quad \alpha_2 = \alpha_2', \quad \alpha_3 = \alpha_3' .$$

Единственность доказана, а вместе с этим доказана и теорема.

В декартовой системе координат в качестве базиса выбирают векторы $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$, такие, что они лежат на координатных осях, имеют длину, равную единице, и направлены в положительную сторону. Векторы $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ называют *ортонормированным базисом* в пространстве.

По теореме 1 любой вектор $\boldsymbol{a}$ может быть единственным образом разложен по базису $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$:

$$\boldsymbol{a} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k} \tag{1}$$

Причем числа x, y, z являются координатами вектора $\boldsymbol{a}$, т.е. проекциями на оси Ox, Oy и Oz (см. рис. 11).

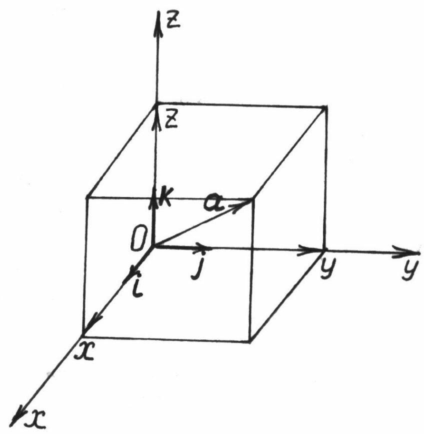

Рисунок 11

Таким образом, мы можем использовать две равносильные формы записи координат вектора $\boldsymbol{a}$:

$$\boldsymbol{a}(x, y, z) \quad \text{и} \quad \boldsymbol{a} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k} .$$

Если вектор $\boldsymbol{a}$ единичный (т.е. $|\boldsymbol{a}| = 1$), а $\cos\alpha, \cos\beta$ и $\cos\gamma$ – направляющие косинусы вектора $\boldsymbol{a}$, то

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{i}\cos\alpha + \boldsymbol{j}\cos\beta + \boldsymbol{k}\cos\gamma \tag{2}$$

Т.е. *направляющие косинусы являются координатами вектора единичной длины.*

Линейные операции в координатной форме

Теорема 2. При сложении двух векторов их соответствующие координаты складываются, а при умножении вектора на число его координаты умножаются на это число.

Доказательство. Действительно, пусть даны два вектора:

$$\boldsymbol{a} = x_1\boldsymbol{i} + y_1\boldsymbol{j} + z_1\boldsymbol{k} \quad \text{и} \quad \boldsymbol{b} = x_2\boldsymbol{i} + y_2\boldsymbol{j} + z_2\boldsymbol{k}\ .$$

Тогда

$$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = x_1\boldsymbol{i} + y_1\boldsymbol{j} + z_1\boldsymbol{k} + x_2\boldsymbol{i} + y_2\boldsymbol{j} + z_2\boldsymbol{k} =$$
$$= (x_1 + x_2)\boldsymbol{i} + (y_1 + y_2)\boldsymbol{j} + (z_1 + z_2)\boldsymbol{k}.$$

Далее, если λ – некоторое число, то

$$\lambda\boldsymbol{a} = \lambda(x_1\boldsymbol{i} + y_1\boldsymbol{j} + z_1\boldsymbol{k}) = (\lambda x_1)\boldsymbol{i} + (\lambda y_1)\boldsymbol{j} + (\lambda z_1)\boldsymbol{k}\ .$$

Получили утверждения теоремы. Теорема доказана.

В качестве следствия из этой теоремы можно получить *условие коллинеарности двух векторов:*

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2} = \lambda \tag{3}$$

Таким образом, *два вектора коллинеарны тогда и только тогда, когда их координаты пропорциональны.*

Отметим, что здесь и далее любое отношение $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ следует понимать, как пропорцию, т.е. как равенство $ad = bc$. Это означает, что если один из знаменателей b или d будет равен нулю, то нулю должен равняться и соответствующий числитель a или c.

Пример. Проверить, что три данные точки $A(1, -5, 3)$, $B(5, -1, 7)$ и $C(6, 0, 8)$ лежат на одной прямой.

Это утверждение равносильно тому, что векторы $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$ коллинеарны. Найдем координаты векторов: $\overline{AB}(4,4,4)$, $\overline{AC}(5,5,5)$. Условие коллинеарности (3) выполняется при $\lambda = \frac{4}{5}$. Таким образом, $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$ коллинеарны и точки A, B и C лежат на одной прямой.

Следующая теорема о проекциях утверждает, что линейная операция над векторами приводит к соответствующей линейной операции над проекциями на произвольную ось.

Теорема 3. Проекция суммы векторов равна сумме их проекций на одну и ту же произвольную ось, проекция произведения вектора на число равна произведению проекции этого вектора на тоже число, т.е.:

$$\text{пр}_u(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) = \text{пр}_u\boldsymbol{a} + \text{пр}_u\boldsymbol{b},$$

$$\text{пр}_u(\lambda\boldsymbol{a}) = \lambda\text{пр}_u\boldsymbol{a}.$$

Доказательство. Выберем декартову систему координат так, чтобы ось u совпала с осью Ox. Тогда проекции векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ на ось u будут совпадать с первыми координатами этих векторов. Из теоремы 2 следует, что при сложении векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ складываются их координаты, а при умножении вектора на число его координаты умножаются на это число. Отсюда получаем утверждение теоремы. Теорема доказана.

Преобразование системы координат

Пусть на плоскости заданы две декартовы системы координат с одинаковыми масштабными единицами, причем в обеих системах кратчайший поворот от оси абсцисс к оси ординат совершается против часовой стрелки. Тогда одна из систем может быть совмещена с другой посредством параллельного переноса и последующего поворота на некоторый угол α.

Рассмотрим три случая.

1). Параллельный сдвиг координатных осей.

Пусть положение новых осей относительно старой системы координат определяется заданием координат нового начала: $O'(a, b)$, где a – величина сдвига по направлению оси Ox, а b – по направлению оси Oy (см. рис. 12).

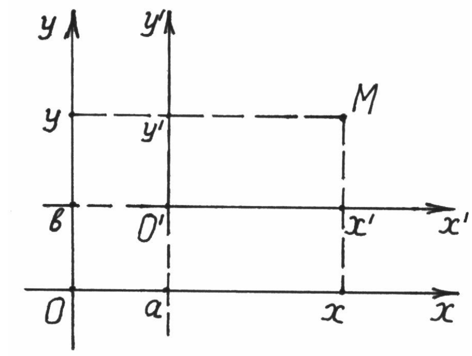

Рисунок 12

Произвольная точка M имеет декартовы координаты в старой системе $M(x, y)$, и в новой системе $M(x', y')$. Очевидно выполнение равенств:

$$\begin{cases} x = a + x', \\ y = b + y', \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x' = x - a, \\ y' = y - b. \end{cases}$$

2). Поворот координатных осей на угол α (см. рис. 13).

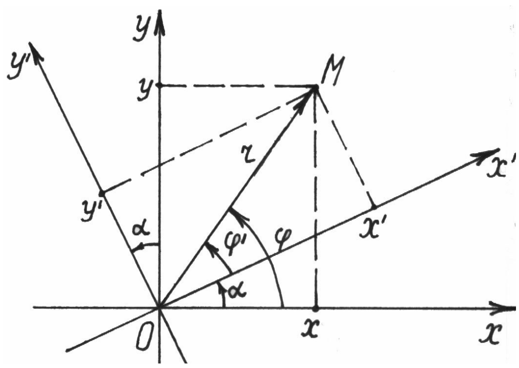

Рисунок 13

Пусть положение новых осей относительно старой системы координат определяется заданием угла поворота α. Если угол α положителен, то оси поворачиваются против часовой стрелки, если отрицателен – то по часовой стрелке.

Произвольная точка M имеет полярные координаты в старой системе $M(r, \varphi)$ и в новой системе $M(r, \varphi')$ (рис. 15). Ясно, что $\varphi = \varphi' + \alpha$. Найдем декартовы координаты точки M. Имеем

$$x = r\cos\varphi = r\cos(\varphi' + \alpha) = r\cos\varphi'\cos\alpha - r\sin\varphi'\sin\alpha =$$
$$= x'\cos\alpha - y'\sin\alpha \ .$$

Аналогично получаем

$$y = r\sin\varphi = r\sin(\varphi' + \alpha) = r\sin\varphi'\cos\alpha + r\cos\varphi'\sin\alpha =$$
$$= y'\cos\alpha + x'\sin\alpha \ .$$

Таким образом, получаем формулы, выражающие старые координаты через новые:

$$\begin{cases} x = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha\ , \\ y = x'\sin\alpha + y'\cos\alpha\ . \end{cases}$$

Или также можно выразить новые координаты через старые:

$$\begin{cases} x' = x\cos\alpha + y\sin\alpha\ , \\ y' = -x\sin\alpha + y\cos\alpha\ . \end{cases}$$

3). Композиция сдвига координатных осей и поворота их на угол α.

Пусть теперь оси декартовой системы координат параллельно переносятся на величину a в направлении оси Ox и на величину b в направлении оси Oy, и затем поворачиваются на угол α вокруг нового начала координат (см. рис. 14).

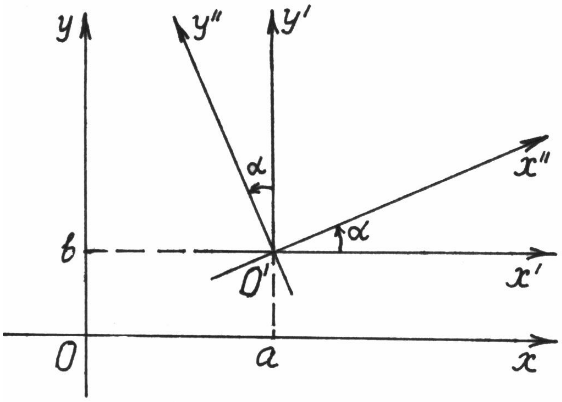

Рисунок 14

Формулы, выражающие координаты (x, y) через (x'', y''):

$$\begin{cases} x = x''\cos\alpha - y''\sin\alpha + a\ , \\ y = x''\sin\alpha + y''\cos\alpha + b\ . \end{cases}$$

Формулы, выражающие координаты (x'', y'') через (x, y):

$$\begin{cases} x'' = (x-a)\cos\alpha + (y-b)\sin\alpha\ , \\ y'' = -(x-a)\sin\alpha + (y-b)\cos\alpha\ . \end{cases}$$

Полярные координаты

Полярная система координат определяется заданием некоторой точки O, называемой *полюсом*, исходящего из нее луча Ox, называемого *полярной осью* и масштабной единицы для измерения длин.

Полярными координатами точки M называются два числа r и φ, где r – *полярный радиус*, т.е. расстояние от точки O до точки M, а φ – *полярный угол*, т.е. угол между вектором $\overline{OM}$ и осью Ox.

При этом повороты «против часовой стрелки» вокруг точки O считаются положительными (см. рис. 15), т.е. если угол φ отмеряется «против часовой стрелки», то он будет положительным, а если «по часовой стрелке», то – отрицательным.

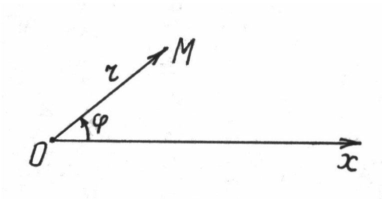

Рисунок 15

Ясно, что полярный угол для любой точки определяется неоднозначно. Поэтому выделяют *главное значение* полярного угла, которое заключено в пределах: $-\pi < \varphi \le \pi$.

Вектор $\overline{OM}$ называется *радиус-вектором* точки M. Полярный радиус является длиной радиус-вектора и не может быть отрицательным: $r \ge 0$.

Пусть полюс полярной системы совпадает с началом декартовых координат, а полярная ось совпадает с осью абсцисс (см. рис. 16). Пусть точка M имеет декартовы координаты x и y и полярные координаты r и φ.

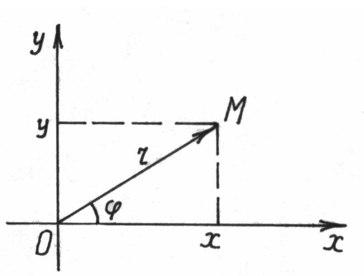

Рисунок 16

Очевидно, выполняются равенства:

$$\begin{aligned} x &= r\cos\varphi\ , \\ y &= r\sin\varphi\ . \end{aligned} \tag{4}$$

Эти формулы называются *формулами перехода от декартовых координат к полярным*.

Полярные координаты точки по ее декартовым координатам определяются следующим образом:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \qquad \mathrm{tg}\varphi = \frac{y}{x}.$$

При этом надо учитывать знак угла φ, который зависит от того, в какой четверти расположена точка.