Лекция 4. Основные понятия о векторах

Вектор на оси, на плоскости и в пространстве

Осью называется прямая линия с указанным на ней направлением. *Вектором на оси* называется направленный отрезок на оси.

Будем обозначать вектор с начальной точкой A и конечной точкой B символом $\overline{AB}$. Если начальная и конечная точки вектора совпадают, то такой вектор называется *нулевым*.

Длиной вектора называется расстояние между началом и концом вектора. Длину вектора называют еще *модулем* вектора и обозначают $|AB|$.

Два вектора назовем *равными*, если они имеют одинаковые длины и одинаковые направления.

Алгебраической величиной вектора в направлении оси называется число, равное его длине, взятой со знаком плюс, если направление вектора совпадает с направлением оси, и со знаком минус, если направление противоположно направлению оси. Алгебраическая величина вектора $\overline{AB}$ обозначается AB.

Очевидно, необходимым и достаточным условием равенства векторов на оси является равенство алгебраических величин этих векторов.

Вектором на плоскости и в пространстве называется направленный отрезок.

Помимо обозначения $\overline{AB}$, где A начало вектора, а B – его конец, будем использовать также малые латинские буквы, выделенные жирным шрифтом: $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$, … . Аналогично, как для вектора на оси, определяется нулевой вектор, а также *длина* или *модуль* вектора.

Векторы называются *коллинеарными*, если они лежат на одной прямой или на параллельных прямых.

Назовем два вектора *равными*, если они коллинеарны, имеют одинаковые длины и одинаковые направления. Таким образом, мы можем осуществлять параллельный перенос вектора, с сохранением длины и направления, в любую точку плоскости. В связи с этим векторы, изучаемые в геометрии, называют *свободными* векторами, т.е. не имеющими привязки к конкретной точке плоскости.

Пусть дан вектор $\overline{AB}$ и некоторая ось u, пусть A_1 и B_1 – проекции точек A и B на ось u.

Проекцией вектора $\overline{AB}$ *на ось* u называется алгебраическая величина вектора $\overline{A_1B_1}$ на оси u. Проекция обозначается символом $\text{пр}_u \overline{AB} = A_1B_1$.

Заметим, что проекция может быть положительным, отрицательным или равным нулю числом.

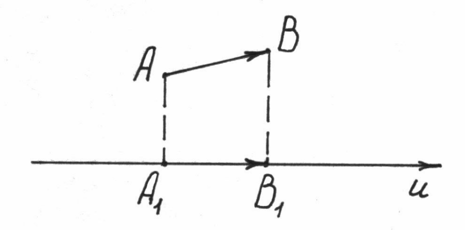

Рисунок 1

Существует удобная формула для нахождения проекции вектора $\overline{AB}$. Для ее получения необходимо ввести понятие *угла* φ *между вектором* $\overline{AB}$ *и осью u*. Этот угол можно определить как угол между двумя лучами, выходящими из одной точки, один из которых имеет направление, совпадающее с направлением вектора $\overline{AB}$, а другой – направление, совпадающее с направлением оси *u*.

Отметим, что $\overline{A_1C} = \overline{AB}$. Если угол φ – острый, то, очевидно, что

$$\text{пр}_u \overline{AB} = |A_1B_1| = |A_1C|\cos\varphi = |AB|\cos\varphi.$$

Если угол φ – тупой, то имеем

$$\text{пр}_u \overline{AB} = -|A_1B_1| = -|A_1C|\cos(\pi-\varphi) = |A_1C|\cos\varphi = |AB|\cos\varphi.$$

Таким образом, в любом случае справедлива формула:

$$\text{пр}_u \overline{AB} = |AB|\cos\varphi,$$

где φ – *угол между вектором* $\overline{AB}$ *и осью u*. На рисунке 2.2 представлено два случая: угол φ – острый (в этом случае проекция положительна) и угол φ – тупой (проекция отрицательна):

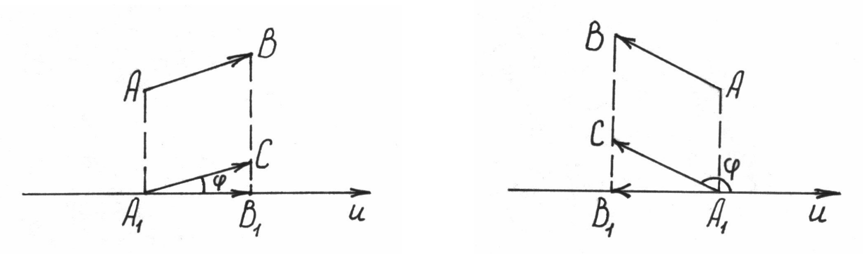

Рисунок 2

Вектор в пространстве определяется также, как вектор на плоскости, как свободный направленный отрезок без привязки к конкретной точке пространства. Аналогично определяются длина вектора, коллинеарность и равенство векторов.

Аналогично можно определить *проекцию вектора* $\overline{AB}$ *на ось u*. Отметим только, что в данном случае прямая, на которой лежит вектор $\overline{AB}$, и ось u могут не лежать в одной плоскости, т.е. эти две прямые могут скрещиваются. Тогда для нахождения проекции вектора $\overline{AB}$ необходимо провести через точки A и B плоскости α и β, перпендикулярные прямой u (рис. 3). Пусть ось u пересекает плоскости α и β в точках A_1 и B_1. Тогда прямые AA_1 и BB_1 будут перпендикулярны оси u, т.е. A_1 и B_1 будут проекциями точек A и B на ось u.

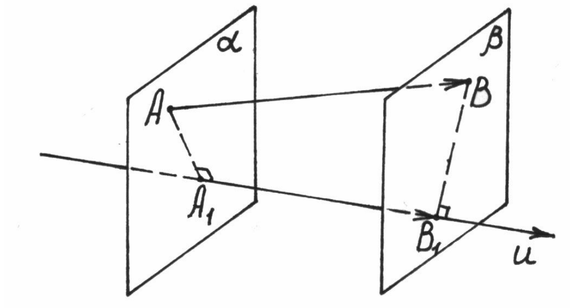

Рисунок 3

Теперь проекцию вектора $\overline{AB}$ на ось u можно определить, как алгебраическую величину вектора $\overline{A_1B_1}$, т.е.

$$\text{пр}_u \overline{AB} = A_1B_1.$$

Также как и в случае на плоскости будет справедлива формула:

$$\text{пр}_u \overline{AB} = |AB| \cos \varphi,$$

где угол φ – есть *угол наклона вектора* $\overline{AB}$ *к оси u*, т.е. угол между двумя лучами, один из которых направлен как ось *u*, а другой – как вектор $\overline{AB}$.

Определим проекцию вектора на плоскость. Пусть даны вектор $\overline{AB}$ и плоскость α. Пусть A_1 и B_1 – проекции точек *A* и *B* на плоскость α (рис.4). Тогда *проекцией вектора* $\overline{AB}$ *на плоскость* α называется вектор $\overline{A_1B_1}$.

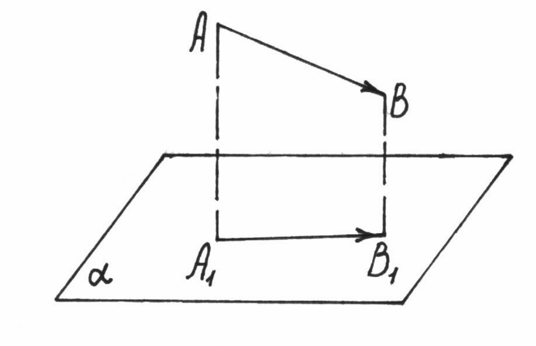

Рисунок 4

Отметим, что проекцией вектора на плоскость является снова вектор, а не число, как в случае проекции вектора на ось.

Декартовы координаты на плоскости и в пространстве

Две перпендикулярные оси, занумерованные в каком-нибудь порядке, и единая масштабная единица образуют *декартову систему координат на плоскости.* Точка пересечения осей называется *началом координат* и является точкой отсчета, а сами оси называются *координатными осями*, причем первая из них называется *осью абсцисс* и обозначается *Ox*, а вторая – *осью ординат* и обозначается *Oy*.

Пусть *M* – некоторая точка на плоскости, M_x и M_y – проекции этой точки на оси *Ox* и *Oy*, соответственно (рис. 5).

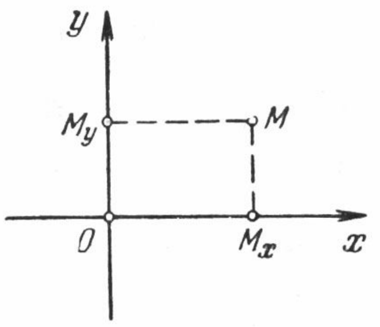

Рисунок 5

Декартовыми координатами точки M являются алгебраические величины векторов $\overline{OM_x}$ и $\overline{OM_y}$. Если x и y – координаты точки M, то это записывается следующим образом: $M(x, y)$. Первую координату x обычно называют *абсциссой* точки M, а вторую y – ее *ординатой*.

Координатные оси разбивают плоскость на четыре части, которые называются *координатными четвертями*. На рис. 6 указана нумерация координатных четвертей, а также знаки координат точек, расположенных в каждой из четвертей.

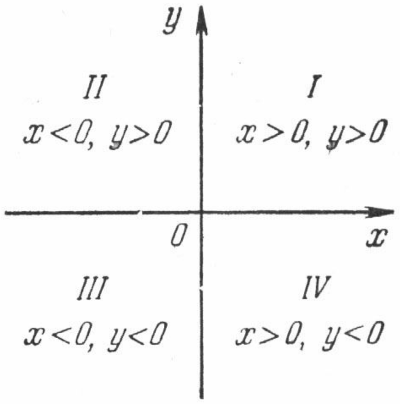

Рисунок 6

Пусть на плоскости дан вектор $\boldsymbol{a}$. И пусть a_x и a_y – проекции вектора $\boldsymbol{a}$ на оси Ox и Oy, соответственно. Тогда a_x и a_y называются *декартовыми координатами вектора* $\boldsymbol{a}$ (рис. 7). Это обозначается следующим образом: $\boldsymbol{a}(a_x, a_y)$.

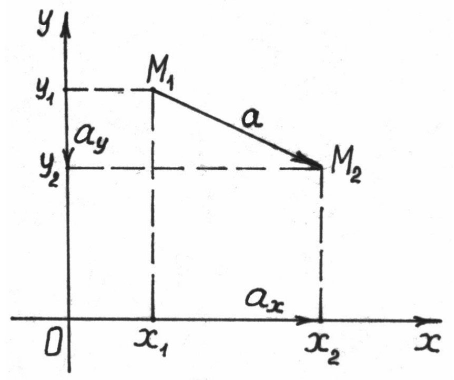

Рисунок 7

Если $\boldsymbol{a} = \overline{M_1 M_2}$ и $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$, то, очевидно,

$$a_x = x_2 - x_1, \qquad a_y = y_2 - y_1.$$

Таким образом, по этим формулам можно определить координаты вектора, зная координаты точек начала и конца вектора:

$$\overline{M_1 M_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1).$$

Используя теорему Пифагора, можно определить *длину* вектора по его координатам:

$$|\boldsymbol{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2},$$

или

$$|M_1 M_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Последняя формула выражает также *расстояние между точками* M_1 и M_2.

Перейдем к определению декартовой системы координат в пространстве.

Три взаимно перпендикулярные оси в пространстве с общим началом O и одинаковой масштабной единицей образуют *декартову систему координат в пространстве.* Оси занумерованы в определенном порядке и называются: первая – ось Ox или *ось абсцисс*, вторая – ось Oy или *ось ординат*, третья – ось Oz или *ось аппликат*.

Пусть M – произвольная точка в пространстве, а M_x, M_y и M_z – проекции этой точки на оси Ox, Oy и Oz, соответственно (см. рис. 8).

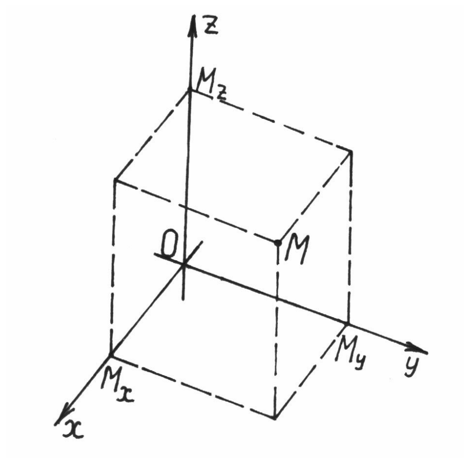

Рисунок 8

Декартовыми координатами точки M называются алгебраические величины векторов $\overline{OM_x}$, $\overline{OM_y}$ и $\overline{OM_z}$. Это обозначается следующим образом: $M(x, y, z)$, где $x = \overline{OM_x}$, $y = \overline{OM_y}$, $z = \overline{OM_z}$. Декартовы координаты x, y и z точки M называют еще ее *абсциссой, ординатой и аппликатой*, соответственно.

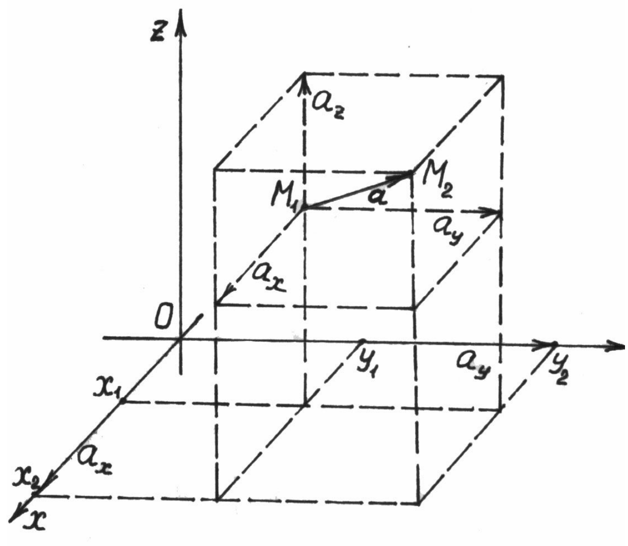

Рисунок 9

Пусть в пространстве дан вектор $a = \overline{M_1M_2}$. *Декартовыми координатами вектора* ***a*** называются проекции a_x, a_y и a_z этого вектора на координатные оси (см. рис. 9). Обозначение: $\boldsymbol{a}(a_x, a_y, a_z)$.

Если известны координаты точек $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$, то координаты вектора вычисляются по формулам:

$$a_x = x_2 - x_1, \quad a_y = y_2 - y_1, \quad a_z = z_2 - z_1 \qquad (1)$$

Проведем через точки M_1 и M_2 плоскости, параллельные координатным плоскостям. Полученные шесть плоскостей будут ограничивать прямоугольный параллелепипед, диагональю которого будет вектор $\overline{M_1M_2} = \boldsymbol{a}$. Очевидно, длина ребра этого параллелепипеда, параллельного оси Ox, равна абсолютной величине проекции вектора $\boldsymbol{a}$ на эту ось, т.е. $|a_x|$. Аналогично, два других ребра, параллельных осям Oy и Oz, равны, соответственно, $|a_y|$ и $|a_z|$. Используя теперь дважды теорему Пифагора, получим формулу для вычисления *длины вектора* ***a***, а также *расстояния между точками* M_1 и M_2:

$$|\boldsymbol{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \qquad |M_1M_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} \qquad (2)$$

Обозначим α, β и γ – углы наклона вектора $\boldsymbol{a}$ к координатным осям Ox, Oy и Oz, соответственно. Три числа $\cos\alpha$, $\cos\beta$ и $\cos\gamma$ называются *направляющими косинусами вектора* $\boldsymbol{a}$.

Справедливы равенства:

$$a_x = |\boldsymbol{a}|\cos\alpha, \qquad a_y = |\boldsymbol{a}|\cos\beta, \qquad a_z = |\boldsymbol{a}|\cos\gamma \qquad (3)$$

Формулы для вычисления направляющих косинусов:

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}, \quad \cos\beta = \frac{a_y}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}, \quad \cos\gamma = \frac{a_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}} \qquad (4)$$

Если равенства (4) возвести в квадрат и сложить, то получим:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1 \qquad (5)$$

Таким образом, *сумма квадратов направляющих косинусов любого вектора равна единице*.

Так как любой вектор однозначно определяется заданием трех его координат, то теперь мы видим, что любой вектор также однозначно определяется заданием его длины и направляющих косинусов.

Деление отрезка в данном отношении

Рассмотрим в пространстве две точки M_1 и M_2. Пусть α – прямая, проходящая через точки M_1 и M_2, а M – некоторая точка на этой прямой (см. рис. 10).

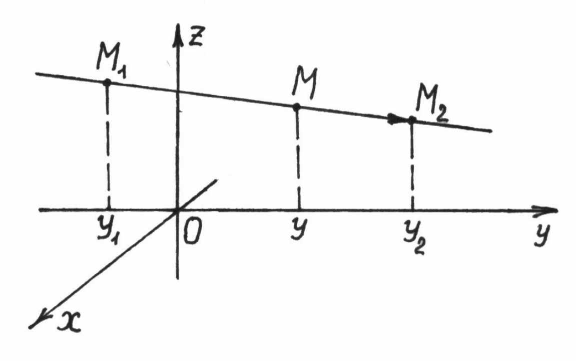

Рисунок 10

Говорят, что точка M *делит отрезок* M_1M_2 *в отношении* λ, если выполняется равенство: $\dfrac{M_1M}{MM_2} = \lambda$.

Отметим, что λ может быть любым числом, за исключением -1. Причем, если M лежит между точками M_1 и M_2, то λ – положительное, если M лежит правее точки M_2 или левее точки M_1, то λ – отрицательное.

Предположим, что известны координаты данных точек: $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$. Найдем координаты точки $M(x, y, z)$. Спроектируем точки M_1, M_2 и M на координатные оси (на рисунке 10 показаны только проекции на ось Oy). Очевидно, что соответствующие векторы на координатных осях будут делиться также в отношении λ, т.е. будут выполнены равенства:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x} = \lambda, \quad \frac{y - y_1}{y_2 - y} = \lambda, \quad \frac{z - z_1}{z_2 - z} = \lambda .$$

Выражая отсюда x, y и z, получим следующие формулы, по которым могут быть найдены координаты точки M:

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}, \quad z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda} \tag{6}$$

Эти формулы называются *формулами деления отрезка в данном отношении.*

В частности, если $\lambda = 1$, то точка M делит отрезок M_1M_2 пополам:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}, \quad z = \frac{z_1 + z_2}{2} \tag{7}$$

Заметим, что формулы (6) деления отрезка в данном отношении имеют смысл, только если $\lambda \neq -1$.

Пример. Отрезок AB разделен на пять равных частей. Известна первая точка деления $C(3, –5, 7)$ и последняя $F(–2, 4, –8)$. Определить координаты концов отрезка и его длину.

Точка C делит отрезок AB в отношении $\lambda_1 = \frac{1}{4}$, а точка F делит отрезок AB в отношении $\lambda_2 = 4$ (см. рис. 11).

Рисунок 11

Обозначим координаты точек A и B: $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$. Воспользуемся формулами (6) деления отрезка в отношении $\lambda_1 = \frac{1}{4}$ и $\lambda_2 = 4$. Получим равенства:

$$\frac{x_1 + \frac{1}{4}x_2}{5/4} = 3, \quad \frac{y_1 + \frac{1}{4}y_2}{5/4} = -5, \quad \frac{z_1 + \frac{1}{4}z_2}{5/4} = 7,$$
$$\frac{x_1 + 4x_2}{5} = -2, \quad \frac{y_1 + 4y_2}{5} = 4, \quad \frac{z_1 + 4z_2}{5} = -8.$$

Из этих равенств составим три системы:

$$\begin{cases} 4x_1 + x_2 = 15, \\ x_1 + 4x_2 = -10, \end{cases} \quad \begin{cases} 4y_1 + y_2 = -25, \\ y_1 + 4y_2 = 20, \end{cases} \quad \begin{cases} 4z_1 + z_2 = 35, \\ z_1 + 4z_2 = -40. \end{cases}$$

Решая их, находим точки $A\left(\frac{14}{3}, -8, 12\right)$ и $B\left(-\frac{11}{3}, 7, -13\right)$.

Найдем теперь расстояние между точками A и B по формуле (2):

$$|AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} = \sqrt{\left(-\frac{25}{3}\right)^2 + 15^2 + (-25)^2} = \frac{5\sqrt{331}}{3}.$$