Лекция 6. Скалярное, векторное и смешанное произведения векторов

Скалярное произведение векторов

Скалярным произведением двух векторов называется число, равное произведению их длин на косинус угла между ними.

Скалярное произведение принято обозначать двумя способами: $\boldsymbol{ab}$ и $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$. Мы будем использовать первое из обозначений:

$$\boldsymbol{ab} = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\varphi \qquad (1)$$

Физический смысл скалярного произведения заключается в следующем: если вектор $\boldsymbol{a}$ изображает силу, точка приложения которой перемещается из начала вектора $\boldsymbol{b}$ в его конец, то работа A этой силы вычисляется с помощью скалярного произведения: $A = \boldsymbol{ab}$.

Перечислим *свойства скалярного произведения*.

1. $\boldsymbol{ab} = |\boldsymbol{a}|\ \text{пр}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b}$.
2. Свойство коммутативности: $\boldsymbol{ab} = \boldsymbol{ba}$.
3. Свойство линейности: $(\alpha\boldsymbol{a} + \beta\boldsymbol{b})\boldsymbol{c} = \alpha(\boldsymbol{ac}) + \beta(\boldsymbol{bc})$.

Для доказательства этого свойства будем использовать первые два свойства и теорему о проекциях:

$$(\alpha\boldsymbol{a} + \beta\boldsymbol{b})\boldsymbol{c} = |\boldsymbol{c}|\ \text{пр}_{\boldsymbol{c}}(\alpha\boldsymbol{a} + \beta\boldsymbol{b}) = |\boldsymbol{c}|\ (\alpha\ \text{пр}_{\boldsymbol{c}}\boldsymbol{a} + \beta\ \text{пр}_{\boldsymbol{c}}\boldsymbol{b}) =$$

$$= \alpha|\boldsymbol{c}|\ \text{пр}_{\boldsymbol{c}}\boldsymbol{a} + \beta|\boldsymbol{c}|\ \text{пр}_{\boldsymbol{c}}\boldsymbol{b} = \alpha(\boldsymbol{ac}) + \beta(\boldsymbol{bc}).$$

4. Скалярный квадрат является неотрицательным числом:

$\boldsymbol{aa} > 0$, если $\boldsymbol{a}$ – ненулевой вектор,

$\boldsymbol{aa} = 0$, если $\boldsymbol{a}$ – нулевой вектор.

Из этого свойства следует часто применяющаяся формула для вычисления длины вектора:

$$|\boldsymbol{a}| = \sqrt{\boldsymbol{aa}} \qquad (2)$$

5. $\boldsymbol{ab} > 0$ тогда и только тогда, когда угол φ между векторами острый; $\boldsymbol{ab} < 0$ тогда и только тогда, когда угол φ тупой; $\boldsymbol{ab} = 0$ тогда и только тогда, когда $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ перпендикулярны.

Пусть теперь векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ заданы своими координатами: $\boldsymbol{a}(x_1, y_1, z_1)$ и $\boldsymbol{b}(x_2, y_2, z_2)$.

Теорема. Скалярное произведение векторов равно сумме произведений соответствующих координат этих векторов:

$$\boldsymbol{ab} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 \tag{3}$$

Доказательство. Так как $\boldsymbol{a} = x_1\boldsymbol{i} + y_1\boldsymbol{j} + z_1\boldsymbol{k}$ и $\boldsymbol{b} = x_2\boldsymbol{i} + y_2\boldsymbol{j} + z_2\boldsymbol{k}$, , то, используя свойство линейности, вычисляем

$$\boldsymbol{ab} = (x_1\boldsymbol{i} + y_1\boldsymbol{j} + z_1\boldsymbol{k})(x_2\boldsymbol{i} + y_2\boldsymbol{j} + z_2\boldsymbol{k}) = x_1x_2\boldsymbol{ii} + x_1y_2\boldsymbol{ij} + x_1z_2\boldsymbol{ik} + \\ + y_1x_2\boldsymbol{ji} + y_1y_2\boldsymbol{jj} + y_1z_2\boldsymbol{jk} + z_1x_2\boldsymbol{ki} + z_1y_2\boldsymbol{kj} + z_1z_2\boldsymbol{kk}.$$

Поскольку векторы $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$ и $\boldsymbol{k}$ взаимно перпендикулярны, то $\boldsymbol{ij} = 0$, $\boldsymbol{jk} = 0$ и $\boldsymbol{ik} = 0$, а так как $|\boldsymbol{i}| = |\boldsymbol{j}| = |\boldsymbol{k}| = 1$, то $\boldsymbol{ii} = 1$, $\boldsymbol{jj} = 1$, $\boldsymbol{kk} = 1$. Таким образом, получаем $\boldsymbol{ab} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$. Теорема доказана.

В качестве следствия из этой теоремы получаем формулу для вычисления косинуса угла φ между векторами $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$:

$$\cos\varphi = \frac{\boldsymbol{ab}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}} \tag{4}$$

Пример. Векторы $\overline{AB} = 2\boldsymbol{i} - 6\boldsymbol{j}$, $\overline{BC} = \boldsymbol{i} + 7\boldsymbol{j}$ и $\overline{CA} = -3\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j}$ образуют треугольник ABC. Найти углы этого треугольника.

Пусть α – угол между векторами $\overline{AB}$ и $\overline{AC} = 3\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j}$**.** Найдем скалярное произведение этих векторов по формуле (3): $\overline{AB} \cdot \overline{AC} = 6 - 6 = 0$. Таким образом, векторы $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$ перпендикулярны и $\alpha = \frac{\pi}{2}$. Пусть β – угол между векторами $\overline{BA} = -2\boldsymbol{i} + 6\boldsymbol{j}$ и $\overline{BC}$. Тогда по формуле (4)

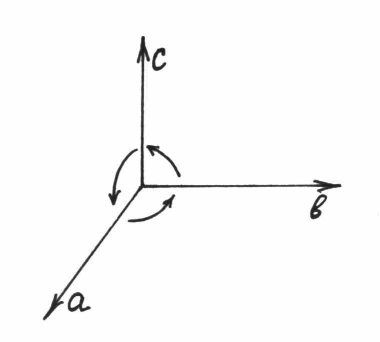
$$\cos\beta = \frac{\overline{BA} \cdot \overline{BC}}{|BA||BC|} = \frac{-2 + 42}{\sqrt{4 + 36}\sqrt{1 + 49}} = \frac{40}{\sqrt{40}\sqrt{50}} = \frac{2}{\sqrt{5}}.$$

Аналогично находим косинус третьего угла:

$$\cos\gamma = \frac{\overline{CA} \cdot \overline{CB}}{|CA||CB|} = \frac{3 + 7}{\sqrt{9 + 1}\sqrt{1 + 49}} = \frac{10}{\sqrt{10}\sqrt{50}} = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Векторное произведение векторов

Упорядоченная тройка некомпланарных векторов $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$, приведенных к общему началу, называется *правой*, если, находясь внутри трехгранного угла, образованного этими векторами, поворот от $\boldsymbol{a}$ к $\boldsymbol{b}$, от $\boldsymbol{b}$ к $\boldsymbol{c}$, от $\boldsymbol{c}$ к $\boldsymbol{a}$ виден против часовой стрелки (рис. 1). В противном случае тройка векторов называется *левой* (рис. 2).



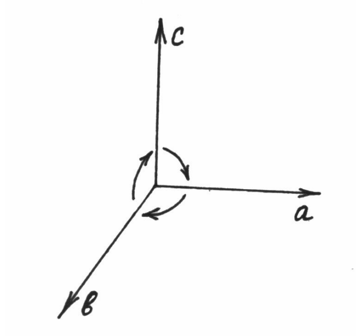


Рисунок 1 - правая тройка Рисунок 2 - левая тройка

Векторным произведением векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ называется вектор $\boldsymbol{c}$, удовлетворяющий условиям:

1) $|\boldsymbol{c}| = |\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}| \sin\varphi$, где φ – угол между векторами $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$;
2) вектор $\boldsymbol{c}$ перпендикулярен векторам $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$;
3) тройка векторов $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$ является правой.

Для векторного произведения, также как и для скалярного, используются два обозначения: $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ и $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$. Мы будем придерживаться первого: $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$.

Физический смысл векторного произведения: если вектор $\boldsymbol{b}$ изображает силу, приложенную в некоторой точке M, а вектор $\boldsymbol{a}$ идет из точки O в точку M, то вектор $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ представляет собой момент силы $\boldsymbol{b}$ относительно точки O.

Свойства векторного произведения.

1. Векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ коллинеарны тогда и только тогда, когда $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} = 0$, в частности, $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a} = 0$. В самом деле, коллинеарность равносильна тому, что угол φ между векторами $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ равен 0 или π, следовательно, $\sin\varphi = 0$. А это означает, что $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} = 0$.

2. Если векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ привести к общему началу, то длина их векторного произведения $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|$ будет равна площади S параллелограмма, построенного на векторах $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ (см. рис. 3) (*геометрический смысл векторного произведения*). Это очевидно, так как площадь параллелограмма равна произведению двух его сторон на синус угла между ними: $S = |\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}| \sin\varphi$.

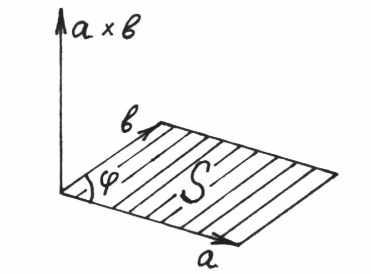


Рисунок 3

3. Свойство антикоммутативности: $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = -\,\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a}$.

Для доказательства обозначим $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{d} = \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a}$. Векторы $\boldsymbol{c}$ и $\boldsymbol{d}$ коллинеарны, так как они перпендикулярны векторам $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$. Кроме того, ясно, что $|\boldsymbol{c}| = |\boldsymbol{d}|$. Таким образом, верно либо $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{d}$, либо $\boldsymbol{c} = -\,\boldsymbol{d}$. Но, по третьему условию, обе тройки векторов ($\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$) и ($\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{d}$) – правые. При $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{d}$ этого быть не может.
Следовательно, $\boldsymbol{c} = -\,\boldsymbol{d}$ и $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = -\,\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a}$.

4. Числовой множитель можно выносить за знак векторного произведения:

$$\lambda\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \lambda(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}), \qquad \boldsymbol{a} \times \lambda\boldsymbol{b} = \lambda(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}).$$

Докажем первое из этих равенств. Пусть $\boldsymbol{c} = \lambda\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{d} = \lambda(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})$. Если φ – угол между векторами $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, то угол между векторами $\lambda\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ равен либо φ, либо $\pi - \varphi$. В любом случае, $\sin\varphi = \sin(\pi - \varphi)$. Следовательно, длины векторов $\boldsymbol{c}$ и $\boldsymbol{d}$ равны:

$$|\boldsymbol{c}| = |\boldsymbol{d}| = |\lambda|\cdot|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\sin\varphi.$$

Далее, так как a коллинеарен $\lambda\boldsymbol{a}$, то $\boldsymbol{c}$ и $\boldsymbol{d}$ коллинеарны. Осталось показать, что $\boldsymbol{c}$ и $\boldsymbol{d}$ одинаково направлены. Если $\lambda > 0$, то $\boldsymbol{a}$ направлен также, как $\lambda\boldsymbol{a}$ и, следовательно, $\boldsymbol{c}$ и $\boldsymbol{d}$ имеют одинаковое направление. Если $\lambda < 0$, то $\boldsymbol{a}$ и $\lambda\boldsymbol{a}$ противоположно направлены, тогда векторы $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ и $\lambda\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ противоположно направлены, но $\lambda(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})$ и $\lambda\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ будут уже направлены одинаково. Таким образом, $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{d}$.

Второе равенство доказывается с использованием антикоммутативности:

$$\boldsymbol{a} \times \lambda\boldsymbol{b} = -\lambda\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a} = -\lambda(\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a}) = \lambda(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}).$$

5. Свойство дистрибутивности:

$$(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) \times \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c} + \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}, \qquad \boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c}.$$

Составим таблицу векторного умножения базисных векторов $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$ и $\boldsymbol{k}$. При этом учитываем, что эти векторы взаимно перпендикулярны, имеют единичную длину и тройка $(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k})$ – правая. Получим:

$$\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k},\qquad \boldsymbol{j}\times\boldsymbol{i}=-\boldsymbol{k},\qquad \boldsymbol{i}\times\boldsymbol{i}=0,$$
$$\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{k}=\boldsymbol{i},\qquad \boldsymbol{k}\times\boldsymbol{j}=-\boldsymbol{i},\qquad \boldsymbol{j}\times\boldsymbol{j}=0,$$
$$\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j},\qquad \boldsymbol{i}\times\boldsymbol{k}=-\boldsymbol{j},\qquad \boldsymbol{k}\times\boldsymbol{k}=0.$$

Используя эту таблицу, можно получить следующую теорему.

Теорема. Векторное произведение векторов $\boldsymbol{a}(x_1, y_1, z_1)$ и $\boldsymbol{b}(x_2, y_2, z_2)$ вычисляется по формуле:

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=(y_1z_2-y_2z_1)\boldsymbol{i}+(z_1x_2-z_2x_1)\boldsymbol{j}+(x_1y_2-x_2y_1)\boldsymbol{k} \tag{5}$$

Для координатной записи векторного произведения удобно использовать символы определителя 2-го и 3-го порядков из курса линейной алгебры:

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}\boldsymbol{i}-\begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix}\boldsymbol{j}+\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}\boldsymbol{k} \tag{6}$$

или

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} \tag{7}$$

Пример. Вычислить площадь треугольника ABC, если $\overline{AB}=\boldsymbol{m}+2\boldsymbol{n}$, $\overline{AC}=\boldsymbol{m}-3\boldsymbol{n}$, $|\boldsymbol{m}|=5$, $|\boldsymbol{n}|=3$, угол между векторами $\boldsymbol{m}$ и $\boldsymbol{n}$ равен $\dfrac{\pi}{6}$.

По свойству 2 векторного произведения имеем

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}S_{\text{парал.}}=\frac{1}{2}\left|\overline{AB}\times\overline{AC}\right|.$$

Вычисляем $\overline{AB}\times\overline{AC}=(\boldsymbol{m}+2\boldsymbol{n})(\boldsymbol{m}-3\boldsymbol{n})=\boldsymbol{m}\times\boldsymbol{m}+2\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{m}-3\boldsymbol{m}\times\boldsymbol{n}-6\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{n}$.

Так как $\boldsymbol{m}\times\boldsymbol{n}=-\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{m}$, $\boldsymbol{m}\times\boldsymbol{m}=0$, $\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{n}=0$, то $\overline{AB}\times\overline{AC}=5\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{m}$. Таким образом,

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}\cdot 5\cdot\left|\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{m}\right|=\frac{5}{2}|\boldsymbol{n}|\cdot|\boldsymbol{m}|\sin\frac{\pi}{6}=\frac{5}{2}\cdot 3\cdot 5\cdot\frac{1}{2}=\frac{75}{4}.$$

Смешанное произведение векторов

Смешанным произведением трех векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ называется скаляр $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\boldsymbol{c}$.

Следующая теорема выясняет *геометрический смысл смешанного произведения*.

Теорема. Смешанное произведение $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\boldsymbol{c}$ трех некомпланарных векторов равно объему параллелепипеда, построенного на векторах $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$, приведенных к общему началу, и взятому со знаком «+», если тройка $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$ правая, и со знаком «–», если тройка $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$ левая.

Доказательство. Пусть S – площадь параллелограмма, построенного на векторах $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$. Тогда по второму свойству векторного произведения

$$S = |\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}|.$$

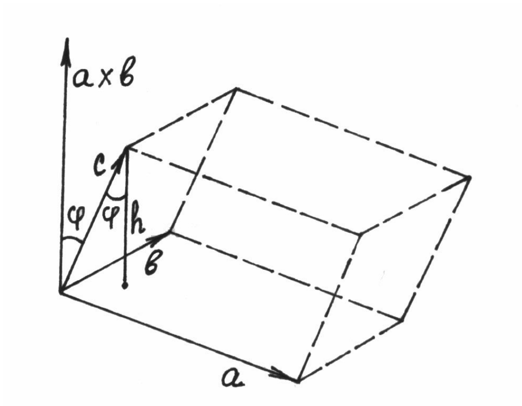


Рисунок 4

По определению скалярного произведения имеем (см. рис. 4):

$$(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})\boldsymbol{c} = |\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}| \cdot |\boldsymbol{c}| \cos\varphi,$$

где φ – угол между векторами $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$. Если $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$ – правая тройка, то угол φ – острый, как это изображено на рисунке 4. Так как вектор $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ перпендикулярен векторам $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, т.е. перпендикулярен плоскости основания параллелепипеда, то он параллелен высоте h, и, следовательно, $|\boldsymbol{c}|\cos\varphi = h$. Таким образом, получаем $(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})\boldsymbol{c} = S \cdot h = V$.

Если $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$ – левая тройка, то угол φ – тупой, векторы $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ и c будут лежать по разные стороны от основания параллелепипеда и $h = |\boldsymbol{c}| \cos(\pi - \varphi) = -|\boldsymbol{c}| \cos\varphi$. Тогда $(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})\boldsymbol{c} = -S \cdot h = -V$. Теорема доказана.

Следствие. Справедливо равенство: $(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a}(\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c})$.

В самом деле, левая и правая части этого равенства равны объему параллелепипеда, построенного на векторах $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$, причем знаки также будут совпадать, так как тройки $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$ и $(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{a})$ либо обе левые, либо обе правые.

В связи с этим смешанное произведение принято обозначать $\boldsymbol{abc} = (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a}(\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c})$.

Заметим, что тройка векторов меняет свою ориентацию (т.е. будучи левой становится правой, и наоборот), если в ней переставляются любые два вектора. Поэтому справедливы равенства: $\boldsymbol{abc} = -\boldsymbol{bac} = -\boldsymbol{cba} = -\boldsymbol{acb}$.

Теорема. Если три вектора определены своими координатами: $\boldsymbol{a}\ (x_1, y_1, z_1)$, $\boldsymbol{b}\ (x_2, y_2, z_2)$ и $\boldsymbol{c}\ (x_3, y_3, z_3)$, то смешанное произведение вычисляется по формуле:

$$\boldsymbol{abc} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} \tag{8}$$

Доказательство. Так как

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} = (y_1 z_2 - y_2 z_1)\boldsymbol{i} + (z_1 x_2 - z_2 x_1)\boldsymbol{j} + (x_1 y_2 - x_2 y_1)\boldsymbol{k}$$

и

$$\boldsymbol{c} = x_3\boldsymbol{i} + y_3\boldsymbol{j} + z_3\boldsymbol{k}\,,$$

то

$$\boldsymbol{abc} = (\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\boldsymbol{c} = (y_1 z_2 - y_2 z_1)x_3 + (z_1 x_2 - z_2 x_1)y_3 + (x_1 y_2 - x_2 y_1)z_3\,.$$

Используя выражения для вычисления определителей 2-го и 3-го порядков, получаем

$$\boldsymbol{abc} = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} x_3 - \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} y_3 + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} z_3$$

или

$$\boldsymbol{abc} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

Теорема доказана.

Используя смешанное произведение, можно сформулировать простое и удобное *условие компланарности трех векторов.*

Три вектора $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ *компланарны тогда и только тогда, когда их смешанное произведение равно нулю.*

Используя последнюю теорему, можно сформулировать условие компланарности в координатах.

Три вектора $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ *компланарны тогда и только тогда, когда определитель, составленный из их координат, равен нулю:*

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = 0 \tag{9}$$

Пример. Вычислить объем тетраэдра, построенного на трех векторах $\boldsymbol{p}(3, 1, -2)$, $\boldsymbol{q}(-4, 0, 3)$ и $\boldsymbol{r}(1, 5, -1)$ и выяснить, какую тройку образуют эти векторы: левую или правую?

Найдем смешанное произведение этих векторов по формуле (8):

$$\boldsymbol{pqr} = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -2 \\ -4 & 0 & 3 \\ 1 & 5 & -1 \end{vmatrix} = -6 .$$

Так как $\boldsymbol{pqr} < 0$, то тройка $(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{r})$ – левая. Имеем $V_{\text{парал}} = 6$. Найдем объем тетраэдра:

$$V_{\text{тетр}} = \frac{1}{6} V_{\text{парал}} = \frac{1}{6} \cdot 6 = 1 .$$