## Векторная алгебра. Вычисление координат, модуля и направляющих косинусов вектора

### 1. Векторная алгебра.

*Вектором на плоскости и в пространстве* называется направленный отрезок.

Помимо обозначения $\overline{AB}$, где $A$ начало вектора, а $B$ – его конец, будем использовать также малые латинские буквы, выделенные жирным шрифтом: $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$, … .

*Длиной* вектора называется расстояние между началом и концом вектора. Длину вектора называют еще *модулем* вектора и обозначают $|AB|$.

Векторы называются *коллинеарными*, если они лежат на одной прямой или на параллельных прямых.

Назовем два вектора *равными*, если они коллинеарны, имеют одинаковые длины и одинаковые направления.

Если известны координаты точек $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$, то координаты вектора $\boldsymbol{a} = \overline{M_1M_2}$ вычисляются по формулам:

$$a_x = x_2 - x_1, \quad a_y = y_2 - y_1, \quad a_z = z_2 - z_1 \tag{4.1а}$$

Формулы для вычисления *длины вектора* $\boldsymbol{a}(a_x, a_y, a_z)$, а также *расстояния между точками* $M_1$ и $M_2$:

$$|\boldsymbol{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \qquad |M_1M_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} \tag{4.2а}$$

Декартовы координаты на плоскости определяются аналогично, с той разницей, что там отсутствует ось аппликат и, соответственно, третья координата. Таким образом, если $\boldsymbol{a} = \overline{M_1M_2}$ и $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$, то, очевидно,

$$a_x = x_2 - x_1, \qquad a_y = y_2 - y_1 \tag{4.1б}$$

$$|\boldsymbol{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} \qquad |M_1M_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \tag{4.2б}$$

Обозначим $\alpha$, $\beta$ и $\gamma$ – углы наклона вектора $\boldsymbol{a}$ к координатным осям $Ox$, $Oy$ и $Oz$, соответственно. Три числа $\cos\alpha$, $\cos\beta$ и $\cos\gamma$ называются *направляющими косинусами вектора* $\boldsymbol{a}$.

Справедливы равенства:

$$a_x = |\boldsymbol{a}|\cos\alpha, \qquad a_y = |\boldsymbol{a}|\cos\beta, \qquad a_z = |\boldsymbol{a}|\cos\gamma \tag{4.3}$$

Формулы для вычисления направляющих косинусов:

$$\cos\alpha=\frac{a_x}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}},\quad \cos\beta=\frac{a_y}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}},\quad \cos\gamma=\frac{a_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}} \qquad (4.4)$$

Если равенства (4.4) возвести в квадрат и сложить, то получим:

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1 \qquad (4.5)$$

Приведем еще *условие коллинеарности двух векторов:*

$$\frac{x_1}{x_2}=\frac{y_1}{y_2}=\frac{z_1}{z_2}=\lambda \qquad (4.6)$$

Таким образом, *два вектора коллинеарны тогда и только тогда, когда их координаты пропорциональны.*

**2. Деление отрезка в данном отношении.**

Рассмотрим в пространстве две точки $M_1$ и $M_2$. Пусть $\alpha$ – прямая, проходящая через точки $M_1$ и $M_2$, а $M$ – некоторая точка на этой прямой (см. рис. 4.1).

Говорят, что точка $M$ *делит отрезок* $M_1M_2$ *в отношении* $\lambda$, если выполняется равенство: $\dfrac{M_1M}{MM_2}=\lambda$.

Отметим, что $\lambda$ может быть любым числом, за исключением $-1$. Причем, если $M$ лежит между точками $M_1$ и $M_2$, то $\lambda$ – положительное, если $M$ лежит правее точки $M_2$ или левее точки $M_1$, то $\lambda$ – отрицательное.

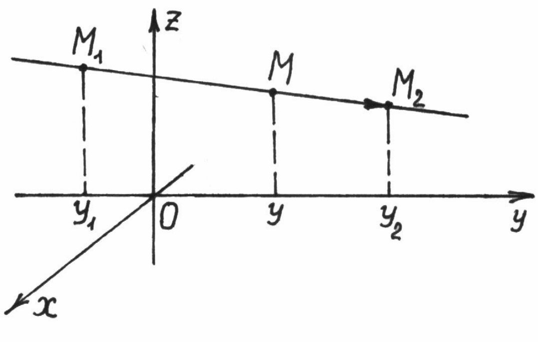


Рис. 4.1

Координаты точки $M$ могут быть найдены по формулам:

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\quad y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda},\quad z=\frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda} \qquad (4.7)$$

Эти формулы называются *формулами деления отрезка в данном отношении*.

В частности, если $\lambda = 1$, то точка $M$ делит отрезок $M_1M_2$ пополам:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}, \quad z = \frac{z_1 + z_2}{2} \qquad (4.8)$$

Заметим, что формулы (4.7) деления отрезка в данном отношении имеют смысл, только если $\lambda \neq -1$.

### *Примеры решения задач*

1. Даны две точки $A_1\left(3; -4; 1\right)$ и $A_2\left(4; 6; -3\right)$. Найти координаты вектора $\boldsymbol{a} = \overline{A_1A_2}$.

*Решение*: Координаты $a_x; a_y; a_z$ находятся по формуле (4.1а):

$$\boldsymbol{a} = \left(x_2 - x_1;\, y_2 - y_1;\, z_2 - z_1\right).$$

В данном случае имеем: $x_1 = 3,\, y_1 = -4,\, z_1 = 1$ и $x_2 = 4,\, y_2 = 6,\, z_2 = -3$, т.е. $\boldsymbol{a} = \overline{A_1A_2} = \left(1; 10; -4\right)$.

2. При каких значениях $\alpha$ и $\beta$ векторы $\boldsymbol{a} = -2\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j} + \alpha\boldsymbol{k}$ и $\boldsymbol{b} = \beta\boldsymbol{i} - 6\boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k}$ коллинеарны?

*Решение*: Воспользуемся условием коллинеарности векторов (4.6). Так как $\boldsymbol{a} \parallel \boldsymbol{b}$, то $-\frac{2}{\beta} = \frac{3}{-6} = \frac{\alpha}{2}$. Отсюда находим, что $\alpha = -1;\ \beta = 4$.

3. Разложить вектор $\boldsymbol{c} = \left(9; 4\right)$ по векторам $\boldsymbol{a} = \left(1; 2\right)$ и $\boldsymbol{b} = \left(2; -3\right)$.

*Решение*: Требуется представить вектор $\boldsymbol{c}$ в виде $\boldsymbol{c} = \lambda_1\boldsymbol{a} + \lambda_2\boldsymbol{b}$, где $\lambda_1$ и $\lambda_2$ – некоторые числа. Найдем их, используя определение равенства векторов. Имеем $\boldsymbol{c} = 9\boldsymbol{i} + 4\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{b} = 2\boldsymbol{i} - 3\boldsymbol{j}$ и равенство $9\boldsymbol{i} + 4\boldsymbol{j} = \lambda_1\left(\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j}\right) + \lambda_2\left(2\boldsymbol{i} - 3\boldsymbol{j}\right)$, т.е. $9\vec{\boldsymbol{i}} + 4\vec{\boldsymbol{j}} = \left(\lambda_1 + 2\lambda_2\right)\vec{\boldsymbol{i}} + \left(2\lambda_1 - 3\lambda_2\right)\vec{\boldsymbol{j}}$. Отсюда следует:

$$\begin{cases} 9 = \lambda_1 + 2\lambda_2, \\ 4 = 2\lambda_1 - 3\lambda_2, \end{cases}$$

т.е. $\lambda_1 = 5,\ \lambda_2 = 2$. Следовательно, $\boldsymbol{c} = 5\boldsymbol{a} + 2\boldsymbol{b}$.

4. Найти длину вектора $\boldsymbol{a} = 20\boldsymbol{i} + 30\boldsymbol{j} - 60\boldsymbol{k}$ и его направляющие косинусы.

*Решение*: Воспользуемся формулами (4.2а) и (4.4). Имеем

$$\left|\boldsymbol{a}\right| = \sqrt{20^2 + 30^2 + 60^2} = 70;$$

$$\cos\alpha = \frac{20}{70} = \frac{2}{7};\ \cos\beta = \frac{30}{70} = \frac{3}{7};\ \cos\gamma = \frac{-60}{70} = -\frac{6}{7}.$$

5. Нормировать вектор $\boldsymbol{a} = 3\boldsymbol{i} + 4\boldsymbol{j} - 12\boldsymbol{k}$ **.**

*Решение*: Найдем длину вектора $\boldsymbol{a}$ по формуле(4.2а):

$$|\vec{\boldsymbol{a}}| = \sqrt{3^2 + 4^2 + (-12)^2} = 13.$$

Искомый единичный вектор имеет вид:

$$\boldsymbol{a}_0 = \frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|} = \frac{3\boldsymbol{i} + 4\boldsymbol{j} - 12\boldsymbol{k}}{13} = \frac{3}{13}\boldsymbol{i} + \frac{4}{13}\boldsymbol{j} - \frac{12}{13}\boldsymbol{k}.$$

6. Отрезок $AB$ разделен на пять равных частей. Известна первая точка деления $C(3,\ -5,\ 7)$ и последняя $F(-2,\ 4,\ -8)$. Определить координаты концов отрезка и его длину.

*Решение*: Точка $C$ делит отрезок $AB$ в отношении $\lambda_1 = \frac{1}{4}$, а точка $F$ делит отрезок $AB$ в отношении $\lambda_2 = 4$ (см. рис. 4.2).


Рис. 4.2

Обозначим координаты точек $A$ и $B$: $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$. Воспользуемся формулами (4.7) деления отрезка в отношении $\lambda_1 = \frac{1}{4}$ и $\lambda_2 = 4$. Получим равенства:

$$\frac{x_1 + \frac{1}{4}x_2}{5/4} = 3, \quad \frac{y_1 + \frac{1}{4}y_2}{5/4} = -5, \quad \frac{z_1 + \frac{1}{4}z_2}{5/4} = 7,$$

$$\frac{x_1 + 4x_2}{5} = -2, \quad \frac{y_1 + 4y_2}{5} = 4, \quad \frac{z_1 + 4z_2}{5} = -8.$$

Из этих равенств составим три системы:

$$\begin{cases} 4x_1 + x_2 = 15, \\ x_1 + 4x_2 = -10, \end{cases} \quad \begin{cases} 4y_1 + y_2 = -25, \\ y_1 + 4y_2 = 20, \end{cases} \quad \begin{cases} 4z_1 + z_2 = 35, \\ z_1 + 4z_2 = -40. \end{cases}$$

Решая их, находим точки $A\left(\frac{14}{3}, -8, 12\right)$ и $B\left(-\frac{11}{3}, 7, -13\right)$.

Найдем теперь расстояние между точками $A$ и $B$ по формуле (4.2а):

$$|AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} = \sqrt{\left(-\frac{25}{3}\right)^2 + 15^2 + (-25)^2} = \frac{5\sqrt{331}}{3}.$$