Скалярное, векторное и смешанное произведения векторов

1. Скалярное произведение векторов.

Скалярным произведением двух векторов называется число, равное произведению их длин на косинус угла между ними:

$$\boldsymbol{ab} = |\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cos\varphi \qquad (5.1)$$

Скалярное произведение коммутативно и удовлетворяет свойству линейности по каждому из сомножителей.

Из определения скалярного произведения следует часто применяющаяся формула для вычисления длины вектора:

$$|\boldsymbol{a}| = \sqrt{\boldsymbol{aa}} \qquad (5.2)$$

Пусть теперь векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ заданы своими координатами: $\boldsymbol{a}(x_1, y_1, z_1)$ и $\boldsymbol{b}(x_2, y_2, z_2)$. Скалярное произведение векторов равно сумме произведений соответствующих координат этих векторов:

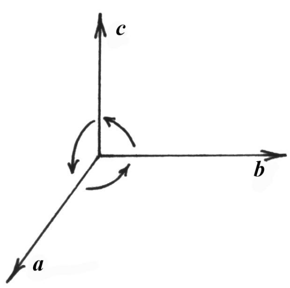
$$\boldsymbol{ab} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 \qquad (5.3)$$

В качестве следствия из этой теоремы получаем формулу для вычисления косинуса угла φ между векторами $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$:

$$\cos\varphi = \frac{\boldsymbol{ab}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}} \qquad (5.4)$$

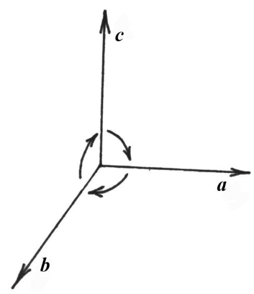
2. Векторное произведение векторов.

Упорядоченная тройка некомпланарных векторов ($\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$), приведенных к общему началу, называется *правой*, если, находясь внутри трехгранного угла, образованного этими векторами, поворот от $\boldsymbol{a}$ к $\boldsymbol{b}$, от $\boldsymbol{b}$ к $\boldsymbol{c}$, от $\boldsymbol{c}$ к $\boldsymbol{a}$ виден против часовой стрелки (рис. 5.1). В противном случае тройка векторов называется *левой* (рис. 5.2).



правая тройка

Рис. 5.1



левая тройка

Рис. 5.2

Векторным произведением векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ называется вектор $\boldsymbol{c}$, удовлетворяющий условиям:

1) $|\boldsymbol{c}| = |\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}| \sin\varphi$, где φ – угол между векторами $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$;
2) вектор $\boldsymbol{c}$ перпендикулярен векторам $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$;
3) тройка векторов $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$ является правой.

Мы будем обозначать векторное произведение следующим образом: $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$.

Свойства векторного произведения.

1. Векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ коллинеарны тогда и только тогда, когда $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = 0$, в частности, $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{a} = 0$.

2. Если векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ привести к общему началу, то длина их векторного произведения $|\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}|$ будет равна площади S параллелограмма, построенного на векторах $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ (см. рис. 5.3) (*геометрический смысл векторного произведения*).

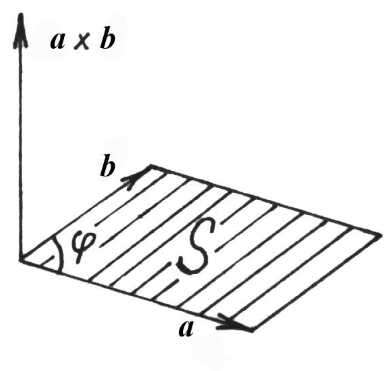


Рис. 5.3

3. Свойство антикоммутативности: $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = -\,\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a}$.

4. Числовой множитель можно выносить за знак векторного произведения:

$$\lambda\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \lambda(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}), \qquad \boldsymbol{a} \times \lambda\boldsymbol{b} = \lambda(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}).$$

5. Свойство дистрибутивности:

$$(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) \times \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c} + \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}, \qquad \boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c}.$$

Если известны координаты векторов $\boldsymbol{a}(x_1, y_1, z_1)$ и $\boldsymbol{b}(x_2, y_2, z_2)$, то векторное произведение вычисляется по формуле:

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = (y_1 z_2 - y_2 z_1)\boldsymbol{i} + (z_1 x_2 - z_2 x_1)\boldsymbol{j} + (x_1 y_2 - x_2 y_1)\boldsymbol{k} \tag{5.5}$$

Для координатной записи векторного произведения удобно использовать символы определителя 2-го и 3-го порядков:

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}\boldsymbol{i}-\begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix}\boldsymbol{j}+\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}\boldsymbol{k} \qquad (5.6)$$

или

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} \qquad (5.7)$$

3. Смешанное произведение векторов.

Смешанным произведением трех векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ называется скаляр $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\boldsymbol{c}$.

Геометрический смысл смешанного произведения: смешанное произведение $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\boldsymbol{c}$ трех некомпланарных векторов равно объему параллелепипеда, построенного на векторах $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$, приведенных к общему началу, и взятому со знаком «+», если тройка $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$ правая, и со знаком «–», если тройка $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$ левая.

В связи с этим смешанное произведение принято обозначать $\boldsymbol{abc}=(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})$.

Заметим, что тройка векторов меняет свою ориентацию (т.е. будучи левой становится правой, и наоборот), если в ней переставляются любые два вектора. Поэтому справедливы равенства: $\boldsymbol{abc}=-\,\boldsymbol{bac}=-\,\boldsymbol{cba}=-\boldsymbol{acb}$.

Если три вектора определены своими координатами: $\boldsymbol{a}(x_1, y_1, z_1)$, $\boldsymbol{b}(x_2, y_2, z_2)$ и $\boldsymbol{c}(x_3, y_3, z_3)$, то смешанное произведение вычисляется по формуле:

$$\boldsymbol{abc}=\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} \qquad (5.8)$$

Используя смешанное произведение, можно сформулировать простое и удобное *условие компланарности трех векторов*: три вектора $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ компланарны тогда и только тогда, когда их смешанное произведение равно нулю. Следовательно, три вектора $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ компланарны тогда и только тогда, когда определитель, составленный из их координат, равен нулю:

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}=0 \qquad (5.9)$$

Примеры решения задач

1. Найти скалярное произведение векторов $\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{i}+7\boldsymbol{j}-4\boldsymbol{k}$ и $\boldsymbol{b}=3\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$.

Решение: По формуле (5.3) находим:

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=2\cdot3+7\cdot(-2)+(-4)\cdot1=6-14-4=-12.$$

2. Векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ образуют угол $\varphi=\frac{2}{3}\pi$. Зная, что $|\boldsymbol{a}|=10$ и $|\boldsymbol{b}|=2$, вычислить $(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})\cdot(3\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$.

Решение: Используя свойства скалярного произведения и формулу (5.1), получаем:

$$(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})\cdot(3\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=3\boldsymbol{a}^2-5\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-2\boldsymbol{b}^2=3|\boldsymbol{a}|^2+5|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cdot\cos\varphi-2|\vec{\boldsymbol{b}}|^2=$$

$$=3\cdot100+5\cdot10\cdot2\cos\frac{2}{3}\pi-2\cdot4=300-50-8=242.$$

3. Даны вершины треугольника $A(2,3,-1)$, $B(4,1,-2)$ и $C(1,0,2)$. Найти: а) внутренний угол при вершине C; б) $\text{пр}_{\overline{CA}}\cdot\overline{CB}$.

Решение: а) Угол φ при вершине C есть угол между векторами $\overline{CB}$ и $\overline{CA}$. Определим координаты этих векторов:

$$\overline{CB}=(4-1;1-0;-2-2)=(3;1;-4),\ \ \overline{CA}=(2-1;3-0;-1-2)=(1;3;-3).$$

Найдем их модули: $\left|\overline{CB}\right|=\sqrt{9+1+16}=\sqrt{26}$; $\left|\overline{CA}\right|=\sqrt{1+9+9}=\sqrt{19}$. Согласно формуле (5.4) $\cos\varphi=\dfrac{\overline{CB}\cdot\overline{CA}}{\left|\overline{CB}\right|\cdot\left|\overline{CA}\right|}=\dfrac{3\cdot1+1\cdot3+(-4)\cdot(-3)}{\sqrt{26}\cdot\sqrt{19}}=\dfrac{18}{\sqrt{494}}$; $\varphi=\arccos\dfrac{18}{\sqrt{494}}$.

б) Из первого свойства скалярного произведения получаем $\text{пр}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b}=\dfrac{\boldsymbol{ab}}{|\boldsymbol{a}|}$.

Поэтому $\text{пр}_{\overline{CA}}\cdot\overline{CB}=\dfrac{\overline{CB}\cdot\overline{CA}}{\left|\overline{CA}\right|}=\dfrac{18}{\sqrt{19}}$.

4. Найти векторное произведение векторов $\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}+5\boldsymbol{k}$ и $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$.

Решение: Имеем по формулам (5.6) и (5.7)

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\2&3&5\\1&2&1\end{vmatrix}=\boldsymbol{i}\begin{vmatrix}3&5\\2&1\end{vmatrix}-\boldsymbol{j}\begin{vmatrix}2&5\\1&1\end{vmatrix}+\boldsymbol{k}\begin{vmatrix}2&3\\1&2\end{vmatrix}=-7\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}.$$

5. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах: $\boldsymbol{a}=6\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k}$ и $\boldsymbol{b}=3\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}+6\boldsymbol{k}$.

Решение: Находим векторное произведение $\boldsymbol{a}$ на $\boldsymbol{b}$ по формулам (5.6) и (5.7):

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\6&3&-2\\3&-2&6\end{vmatrix}=\boldsymbol{i}\begin{vmatrix}3&-2\\-2&6\end{vmatrix}-\boldsymbol{j}\begin{vmatrix}6&-2\\3&6\end{vmatrix}+\boldsymbol{k}\begin{vmatrix}6&3\\3&-2\end{vmatrix}=-14\boldsymbol{i}+42\boldsymbol{j}-21\boldsymbol{k}.$$

Так как модуль векторного произведения двух векторов равен площади построенного на них параллелограмма, то $S=|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=\sqrt{14^2+42^2+21^2}=49$ (кв. ед.).

6. Вычислите площадь треугольника с вершинами $A(1,1,1), B(2,3,4)$ и $C(4,3,2)$.

Решение: Площадь треугольника ABC равна половине площади параллелограмма, построенного на векторах $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$. Найдем координаты этих векторов $\overline{AB}=(2-1)\boldsymbol{i}+(3-1)\boldsymbol{j}+(4-1)\boldsymbol{k}=\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k}$, $\overline{AC}=3\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$. Далее находим векторное произведение этих векторов по формулам (5.6) и (5.7):

$$\overline{AB}\times\overline{AC}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\1&2&3\\3&2&1\end{vmatrix}=\boldsymbol{i}\begin{vmatrix}2&3\\2&1\end{vmatrix}-\boldsymbol{j}\begin{vmatrix}1&3\\3&1\end{vmatrix}+\boldsymbol{k}\begin{vmatrix}1&2\\3&2\end{vmatrix}=-4\boldsymbol{i}+8\boldsymbol{j}-4\boldsymbol{k}.$$

Тогда $S_{ABC}=\dfrac{1}{2}\left|\overline{AB}\times\overline{AC}\right|=\dfrac{1}{2}\sqrt{16+64+16}=\sqrt{24}$ (кв.ед.).

7. Вычислите площадь параллелограмма, построенного на векторах $\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}$ и $3\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$, если $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|=1$, $(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=30^\circ$.

Решение: Используя свойства векторного произведения, имеем

$$(\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b})\times(3\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=3\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}+9\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}-9\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=-8\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$$

(поскольку $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{b}=0$, $\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$).

Итак, $S=|(\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b})\times(3\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})|=8|\vec{a}\times\vec{b}|=8\cdot1\cdot1\cdot\sin30^\circ=4$ (кв.ед.).

8. Показать, что векторы $\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{i}+5\boldsymbol{j}+7\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}$ компланарны.

Решение: Воспользуемся условием компаланарности векторов (5.9). Находим смешанное произведение векторов:

$$\boldsymbol{a\,b\,c} = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} - 5\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 7\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 8 - 15 + 7 = 0.$$

Так как $\boldsymbol{a\,b\,c} = 0$, то заданные векторы компланарны.

9. Доказать, что четыре точки $A_1(3,5,1)$; $A_2(2,4,7)$; $A_3(1,5,3)$; $A_4(4,4,5)$ лежат в одной плоскости.

Решение: Достаточно показать, что три вектора $\overline{A_1A_2}, \overline{A_1A_3}, \overline{A_1A_4}$, имеющие начало в одной из данных точек, лежат в одной плоскости (т.е. компланарны). Находим координаты векторов $\overline{A_1A_2} = (2-3,\, 4-5,\, 7-1) = (-1; -1; 6)$, $\overline{A_1A_3} = (1-3,\, 5-5,\, 3-1) = (-2; 0; -2)$, $\overline{A_1A_4} = (4-3,\, 4-5,\, 5-1) = (1; -1; 4)$. Проверяем условие компланарности векторов (5.9):

$$\overline{A_1A_2} \cdot \overline{A_1A_3} \cdot \overline{A_1A_4} = \begin{vmatrix} -1 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 0 - 2 + 12 - 0 - 2 - 8 = 0.$$

Итак, векторы $\overline{A_1A_2}, \overline{A_1A_3}$ и $\overline{A_1A_4}$ компланарны, следовательно, точки A_1, A_2, A_3, A_4 лежат в одной плоскости.

10. Найти объем треугольной пирамиды с вершинами $A(2,2,2)$, $B(4,3,3)$, $C(4,5,4)$, $D(5,5,6)$.

Решение: Найдем векторы $\overline{AB}, \overline{AC}$ и $\overline{AD}$, совпадающие с ребрами пирамиды, сходящимися в вершине A:

$$\overline{AB} = 2\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k},\ \overline{AC} = 2\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k},\ \overline{AD} = 3\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j} + 4\boldsymbol{k}.$$

Смешанное произведение этих векторов равно по модулю объему параллелепипеда, построенного на них. Находим смешанное произведение этих векторов:

$$\overline{AB} \cdot \overline{AC} \cdot \overline{AD} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = 2 \cdot 6 - 1 \cdot 2 - 1 \cdot 3 = 7.$$

Так как объем пирамиды равен $\frac{1}{6}$ объема параллелепипеда, построенного на векторах $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ и $\overline{AD}$, то $V_{\text{пир.}} = \frac{7}{6}$ (куб.ед.).

11. Даны вершины пирамиды $A(5,1,-4)$; $B(1,2,-1)$; $C(3,3,-4)$; $S(2,2,2)$. Найти длину высоты, опущенной из вершины S на грань ABC.

Решение: Так как объем пирамиды есть $V = \frac{1}{3}S'h$, то $h = \frac{3V}{S'}$, где $h = |SO|$ – высота пирамиды, S' – площадь основания пирамиды. Находим V: $\overline{AS} = (-3;1;6)$, $\overline{AB} = (-4;1;3)$, $\overline{AC} = (-2;2;0)$,

$$V = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} -3 & 1 & 6 \\ -4 & 1 & 3 \\ -2 & 2 & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{6}|18-6-36| = \frac{1}{6}|-24| = 4.$$

Находим S':

$$S' = \frac{1}{2}\left|\overline{AB}\times\overline{AC}\right| = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ -4 & 1 & 3 \\ -2 & 2 & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\left|-6\boldsymbol{i}-6\boldsymbol{j}-6\boldsymbol{k}\right| = \frac{1}{2}\cdot 6\sqrt{3} = 3\sqrt{3}.$$

Следовательно, $h = \frac{3\cdot 4}{3\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$.