

**Задачи для самостоятельного решения по теме
практического занятия 5**

Указание. Кроме имеющихся материалов курса, Вы также можете использовать, например, материалы из учебников [1]: глава II, § 6-8 и [2]: глава 3, § 2-4 (см. прилагаемый список литературы)

1. Даны векторы $\mathbf{a} = m\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$ и $\mathbf{b} = 4\mathbf{i} + m\mathbf{j} - 7\mathbf{k}$. При каком значении m эти векторы перпендикулярны?
2. Определите угол между векторами $\mathbf{a} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$ и $\mathbf{b} = 6\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$.
3. Найти $(5\mathbf{a} + 3\mathbf{b}) \cdot (2\mathbf{a} - \mathbf{b})$, если $|\mathbf{a}| = 2$, $|\mathbf{b}| = 3$, $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$.
4. Даны векторы: $\mathbf{a} = (1; -3; 4)$, $\mathbf{b} = (3; -4; 2)$, $\mathbf{c} = (-1; 1; 4)$. Найти $\text{pr}_{\mathbf{b}+\mathbf{c}}\mathbf{a}$.
5. Показать, что четырехугольник с вершинами $A(-5, 3, 4)$; $B(-1, -7, 5)$; $C(6, -5, -3)$; $D(2, 5, -4)$ есть квадрат.
6. Найти векторное произведение векторов $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} + 5\mathbf{j} + \mathbf{k}$ и $\mathbf{b} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$.
7. Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах $\mathbf{a} = (8; 4; 1)$ и $\mathbf{b} = (2; -2; 1)$.
8. Найдите площадь треугольника с вершинами $A(1, 2, 0)$; $B(3, 2, 1)$; $C(-2, 1, 2)$.
9. Векторы \mathbf{p} и \mathbf{q} составляют угол $\frac{3}{4}\pi$. Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах $\mathbf{a} = 3\mathbf{p} + 2\mathbf{q}$ и $\mathbf{b} = 2\mathbf{p} - \mathbf{q}$, где $|\mathbf{p}| = 4$, $|\mathbf{q}| = 3$.
10. Дано: $\mathbf{a} = (1; -4; 0)$, $\mathbf{b} = (6; 3; -2)$, $\mathbf{c} = (1; -2; 2)$. Найти $\text{pr}_{\mathbf{a}}(\mathbf{b} \times \mathbf{c})$.
11. Показать, что точки $A(2, -1, -2)$; $B(1, 2, 1)$; $C(2, 3, 0)$; $D(5, 0, -6)$ лежат в одной плоскости.
12. Найти объем параллелепипеда, построенного на векторах $\mathbf{a} = (1; -2; 1)$, $\mathbf{b} = (3; 2; 1)$ и $\mathbf{c} = (1; 0; -1)$.
13. Найти высоту параллелепипеда, построенного на векторах $\mathbf{a} = (2; 1; -3)$, $\mathbf{b} = (1; 2; 1)$ и $\mathbf{c} = (1; -3; 1)$. Высота опущена на грань, образованную векторами \mathbf{b} и \mathbf{c} .
14. Даны векторы $\mathbf{a} = (3; 5; -1)$, $\mathbf{b} = (0; -2; 1)$ и $\mathbf{c} = (-2; 2; 3)$. Найти: $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c}$.
15. При каком значении m векторы $\mathbf{a} = m\mathbf{i} + \mathbf{j}$ и $\mathbf{b} = 3\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$ перпендикулярны?
16. Определите угол между векторами $\mathbf{a} = -\mathbf{i} + \mathbf{j}$ и $\mathbf{b} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$.

17. Даны векторы $\mathbf{a} = (3; -6; -1)$, $\mathbf{b} = (1; 4; -5)$ и $\mathbf{c} = (3; -4; 12)$.
Найти $\text{pr}_{\mathbf{c}}(\mathbf{a} + \mathbf{b})$.

18. Даны три последовательные вершины параллелограмма: $A(-3, -2, 0)$; $B(-3, -3, 1)$; $C(5, 0, 2)$. Найти его четвертую вершину и угол между векторами \overline{AC} и \overline{BD} .

19. Найти координаты вектора $\mathbf{a} \times (2\mathbf{a} + \mathbf{b})$, если $\mathbf{a} = (3; -1; -2)$; $\mathbf{b} = (1; 2; -1)$.

20. Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах $\mathbf{a} = (-4; -8; 8)$ и $\mathbf{b} = (4; 3; 2)$.

21. Найти площадь треугольника с вершинами $A(1, -2, 3)$, $B(0, -1, 2)$ и $C(3, 4, 5)$.

22. Векторы \mathbf{a} и \mathbf{b} составляют угол 45° . Найти площадь треугольника, построенного на векторах $\mathbf{a} - 2\mathbf{b}$ и $3\mathbf{a} + 2\mathbf{b}$, если $|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}| = 5$.

23. Показать, что векторы $\mathbf{a} = -\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} - 4\mathbf{k}$ и $\mathbf{c} = -3\mathbf{i} + 12\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$ компланарны.

24. Найти объем параллелепипеда, построенного на векторах $\mathbf{a} = (1; 2; 3)$, $\mathbf{b} = (2; 4; 1)$ и $\mathbf{c} = (2; -1; 0)$.

25. Даны вершины пирамиды $A(-5, -4, 8)$; $B(2, 3, 1)$; $C(4, 1, -2)$; $D(6, 3, 7)$.
Найти длину высоты, опущенной на грань $B CD$.

Ответы:

- 1) $m = 4$; 2) $\varphi = \arccos \frac{2}{7}$; 3) 13; 4) 5; 6) $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -17\mathbf{i} + 7\mathbf{j} - \mathbf{k}$; 7) $18\sqrt{2}$;
8) $S = \frac{3\sqrt{6}}{2}$; 9) $42\sqrt{2}$; 10) $\frac{58}{\sqrt{17}}$; 12) 12; 13) $\frac{5\sqrt{2}}{2}$; 14) (3;3;0); 15) $m = 1$;
16) 135° ; 17) -4; 18) $D(-1, 1, 1)$; $\varphi = 120^\circ$; 19) (5; 1; 7); 20) 60; 21) $4\sqrt{2}$;
22) $50\sqrt{2}$; 24) $\frac{25}{6}$; 25) 11.