Лекция 10. Поверхности второго порядка

Уравнения вида

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Eyz + Fxz + Gx + Hy + Kz + L = 0,$$

где по крайней мере один из коэффициентов A, B, C, D, E, F отличен от нуля, называется *уравнением второго порядка*. Уравнение второго порядка в декартовых координатах определяет *поверхность второго порядка*.

Для каждого уравнения второго порядка можно указать такую систему координат, в которой это уравнение примет наиболее простой вид, так что геометрическая характеристика поверхности не будет представлять затруднений.

Используя теорию квадратичных форм, уравнение второго порядка можно привести к уравнению вида:

$$A_1x_1^2 + B_1y_1^2 + C_1z_1^2 + G_1x_1 + H_1y_1 + K_1z_1 + L_1 = 0,$$

в котором коэффициенты при произведениях переменных x_1y_1, y_1z_1 и x_1z_1 равны нулю, и хотя бы один из коэффициентов A_1, B_1, C_1 отличен от нуля.

Затем, используя стандартную операцию выделения полных квадратов, уравнение приводится к *каноническому виду*. Существует всего семь типов канонических уравнений поверхностей второго порядка:

1. уравнение *эллипсоида*: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$,

2. уравнение *однополостного гиперболоида*: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$,

3. уравнение *двуполостного гиперболоида*: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$,

4. уравнение *конуса второго порядка*: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$,

5. уравнение *эллиптического параболоида*: $z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$,

6. уравнение *гиперболического гиперболоида*: $z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$,

7. цилиндрические поверхности:

а) эллиптический цилиндр: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$,

б) гиперболический цилиндр: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$,

в) параболический цилиндр: $y^2=2px$.

1. Эллипсоид.

Исследуем форму эллипсоида по его каноническому уравнению:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$

Координатные плоскости являются плоскостями симметрии, а начало координат – центром симметрии эллипсоида.

Числа a, b и c называются *полуосями* эллипсоида. Точки пересечения эллипсоида с координатными осями имеют координаты (a, 0, 0), (-a, 0, 0), (0, b, 0), (0, -b, 0), (0, 0, c), (0, 0, -c).

Чтобы представить себе форму эллипсоида, воспользуемся методом «параллельных сечений». Будем рассматривать сечения поверхности плоскостями $z = h$, параллельными плоскости Oxy. В сечении получим эллипсы

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1-\frac{h^2}{c^2},$$

если $|h| < c$. Если $h = \pm c$, то в сечении будет точка, а если $|h| > c$, то плоскость $z = h$ и эллипсоид пересекаться не будут. Отметим еще, что при $h = 0$ в сечении будет самый большой эллипс, а при возрастании h эллипс в сечении уменьшается.

Аналогичная картина получается, если рассматривать сечения эллипсоида плоскостями $x = h$ и $y = h$.

Таким образом, эллипсоид есть замкнутая овальная поверхность (рис. 1).

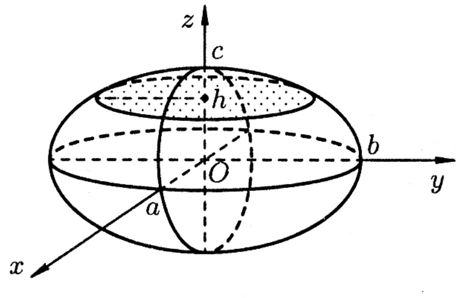


Рисунок 1

Если $a = b = c = R$, то эллипсоид является *сферой* радиуса R:

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2 .$$

Уравнение вида

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = -1 ,$$

называется уравнением *мнимого эллипсоида*.

2. Однополостный гиперболоид.

Рассмотрим каноническое уравнение однополостного гиперболоида:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 .$$

Координатные плоскости являются плоскостями симметрии однополостного гиперболоида, а начало координат – его центром симметрии.

Нетрудно определить точки пересечения гиперболоида с координатными осями: $(a, 0, 0)$, $(-a, 0, 0)$, $(0, b, 0)$, $(0, -b, 0)$. С осью Oz однополостный гиперболоид не имеет точек пересечения.

Рассмотрим сечения однополостного гиперболоида плоскостями $z = h$. При любом h в сечении получим эллипсы:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 + \frac{h^2}{c^2} .$$

Причем при $h = 0$ в сечении будет самый маленький эллипс с полуосями a и b. А при возрастании $|h|$ эллипсы будут увеличиваться.

Рассмотрим сечения поверхности гиперболоида координатными плоскостями Oxz и Oyz. Эти плоскости определяются уравнениями $y = 0$ и $x = 0$, соответственно. Поэтому сечения будут определяться уравнениями:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad \text{и} \quad \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 .$$

Это есть уравнения гипербол.

Таким образом, однополостный гиперболоид имеет вид бесконечной трубки, расположенной вдоль оси Oz и расширяющейся как в положительном, так и в отрицательном направлении (рис. 2).

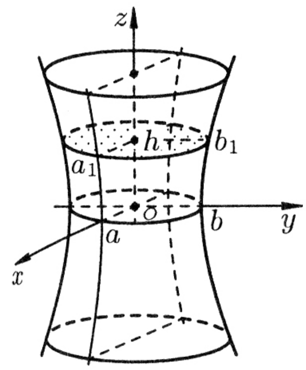


Рисунок 2

Заметим, что если $a = b$, то в сечении гиперболоида плоскостью $z = h$ будет окружность. Тогда однополостный гиперболоид можно рассматривать как поверхность, образованную вращением гиперболы вокруг одной из ее осей симметрии (той, которая ее не пересекает).

3. Двуполостный гиперболоид.

Каноническое уравнение двуполостного гиперболоида имеет вид:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1.$$

Координатные плоскости являются плоскостями симметрии двуполостного гиперболоида, а начало координат – его центром симметрии. Нетрудно видеть, что двуполостный гиперболоид не пересекается с осями Ox и Oy, а с осью Oz имеет точки пересечения $(0, 0, c)$, $(0, 0, -c)$.

Сечения плоскостями $z = h$ определяются уравнениями:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{h^2}{c^2}-1,$$

и представляют собой эллипсы, если $|h| > c$. Если $h = \pm c$, то в сечении получим лишь точку, а если $|h| < c$, то плоскость $z = h$ не будет пересекаться с гиперболоидом.

Сечения двуполостного гиперболоида координатными плоскостями $y = 0$ и $x = 0$ определяются уравнениями:

$$\frac{z^2}{c^2}-\frac{x^2}{a^2}=1 \quad \text{и} \quad \frac{z^2}{c^2}-\frac{y^2}{b^2}=1.$$

Это есть уравнения гипербол, пересекающих ось Oz.

Таким образом, двуполостный гиперболоид является поверхностью, состоящей из двух отдельных «полостей», имеющих вид бесконечных чаш, направленных в разные стороны (рис. 3).

Отметим, что если $a = b$, то в сечении гиперболоида плоскостью $z = h$ будет окружность. Тогда двуполостный гиперболоид можно рассматривать как поверхность, образованную вращением гиперболы вокруг одной из ее осей симметрии (той, которая ее пересекает).

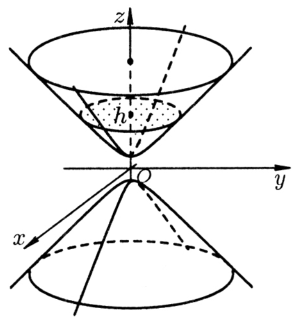


Рисунок 3

4. Эллиптический параболоид.

Эллиптический параболоид определяется своим каноническим уравнением:

$$z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}.$$

Из этого уравнения видно, что координатные плоскости Oxz и Oyz являются его плоскостями симметрии, а ось Oz – его осью симметрии. Также можно заключить, что эллиптический параболоид расположен весь выше координатной плоскости Oxy, так как $z \geq 0$.

Сечения плоскостями $z = h$, параллельными плоскости Oxy, определяются равенствами

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = h,$$

и представляют собой эллипсы, если $h > 0$. Если $h = 0$, то в сечении будет точка (0, 0), а при $h < 0$ плоскость $z = h$ не будет пересекаться с параболоидом.

Сечения эллиптического параболоида координатными плоскостями $y = 0$ и $x = 0$ определяются уравнениями:

$$z = \frac{x^2}{a^2} \quad \text{и} \quad z = \frac{y^2}{b^2},$$

и представляют собой параболы, восходящие вдоль оси Oz.

Таким образом, эллиптический параболоид имеет вид бесконечной чаши с вершиной в начале координат (рис. 4).

Уравнение вида

$$z=-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2},$$

также определяет эллиптический параболоид, который направлен в противоположную сторону.

При $a = b$ в сечении параболоида плоскостью $z = h$ будет окружность. Тогда эллиптический параболоид можно рассматривать как поверхность, образованную вращением параболы вокруг ее оси симметрии.

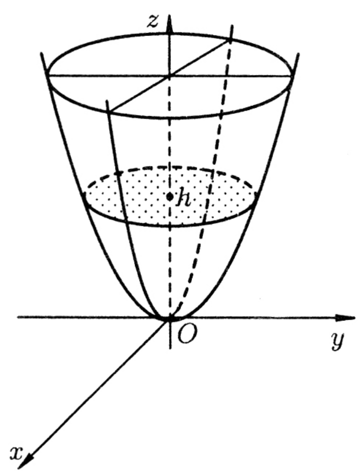


Рисунок 4

5. Гиперболический параболоид.

Рассмотрим каноническое уравнение гиперболического параболоида:

$$z=\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}.$$

Из этого уравнения следует, что координатные плоскости Oxz и Oyz являются его плоскостями симметрии, а ось Oz – его осью симметрии.

Рассмотрим сечения гиперболического параболоида плоскостями $z = h$. Они определяются уравнениями

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = h,$$

и представляют собой гиперболы, пересекающие ось Ox, при $h > 0$. При $h < 0$ в сечении будут сопряженные гиперболы, пересекающие ось Oy, а при $h = 0$ в сечении получатся прямые $y = \pm\frac{b}{a}x$. Т.е. гиперболический параболоид пересекает координатную плоскость Oxy по двум пересекающимся прямым.

Сечения плоскостями $x = h$ определяются уравнениями

$$z = \frac{h^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2},$$

и представляют собой нисходящие вдоль оси Oz параболы. При $h = 0$ вершина параболы будет находиться в начале координат.

Сечения плоскостями $y = h$ также представляют собой параболы

$$z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{h^2}{b^2},$$

но уже восходящие вдоль оси Oz. При $h = 0$ вершина снова будет находиться в начале координат.

Таким образом, гиперболический параболоид имеет форму седла, установленного на оси Ox (рис. 5).

Уравнение вида $z = -\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$ также определяет гиперболический параболоид, но расположенный уже вдоль оси Oy.

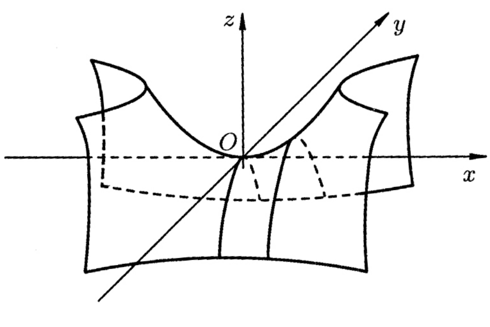


Рисунок 5

6. Конус второго порядка.

Конус второго порядка определяется уравнением

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0\,.$$

Все координатные плоскости являются плоскостями симметрии конуса.

Заметим, что поверхность конуса обладает следующим *свойством*: если некоторая точка M лежит на поверхности конуса, то и любая другая точка M' лежащая на прямой, соединяющей M с началом координат, также лежит на этом конусе.

В самом деле, если точка M имеет координаты (x_0, y_0, z_0), то точка M' должна иметь координаты (tx_0, ty_0, tz_0) для некоторого t. Подставим координаты точки M' в уравнение конуса:

$$\frac{(tx_0)^2}{a^2}+\frac{(ty_0)^2}{b^2}-\frac{(tz_0)^2}{c^2}=0\,,$$

тогда

$$t^2\left(\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}-\frac{z_0^2}{c^2}\right)=0\,.$$

Получили верное равенство, так как по предположению точка $M(x_0, y_0, z_0)$ лежит на поверхности конуса. Следовательно, точка $M''(tx_0, ty_0, tz_0)$ также лежит на поверхности конуса.

Из доказанного свойства следует, что поверхность конуса образована прямыми, проходящими через начало координат (рис. 6).

Сечения поверхности плоскостями $z = h$ определяются уравнениями

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{h^2}{c^2}\,,$$

и представляют собой эллипсы при $h \neq 0$. Если $h = 0$, то в сечении будет одна точка – начало координат.

Если $a = b$, то в сечении плоскостями $z = h$ будут окружности. Такой конус называется *круглым*.

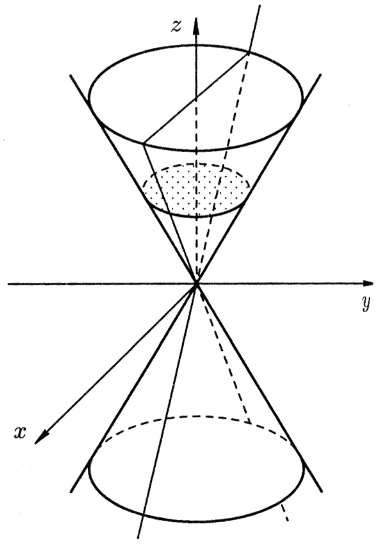


Рисунок 6

7. Цилиндры второго порядка.

Уравнение поверхности, не содержащее одной из координат, определяет *цилиндрическую поверхность.*

Например, если уравнение поверхности не содержит координаты z, то оно определяет цилиндрическую поверхность с образующими, параллельными оси Oz.

Цилиндром второго порядка с образующими, параллельными оси Oz, называется поверхность, определяемая уравнением 2-й степени, не содержащим координаты z.

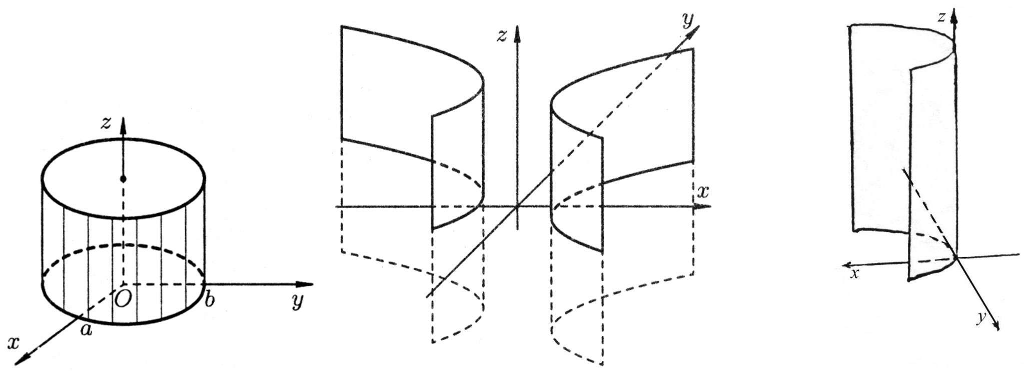
Существует три типа цилиндров второго порядка:

а) эллиптический цилиндр: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$,

б) гиперболический цилиндр: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$,

в) параболический цилиндр: $y^2=2px$.

На рис. 7 изображены поверхности эллиптического, гиперболического и параболического цилиндров.



а) б) в)

Рисунок 7