Лекция 8. Линии второго порядка на плоскости

Уравнение вида $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ называется *уравнением второго порядка*.

Уравнение второго порядка определяет на плоскости *линию второго порядка*.

Различают три типа линий второго порядка: эллиптический, гиперболический и параболический.

Теорема 1. Любое уравнение второго порядка определяет линию одного из перечисленных трех типов. При этом, если уравнение определяет линию эллиптического типа, то это может быть либо эллипс, либо вырожденный эллипс, либо мнимый эллипс. Если уравнение определяет линию гиперболического типа, то это может быть либо гипербола, либо пара пересекающихся прямых. Если уравнение определяет линию параболического типа, то это может быть либо парабола, либо пара параллельных прямых (которые могут быть и слившимися), либо пара мнимых параллельных прямых.

Эта теорема приводится без доказательства. Термины, введенные в этой теореме, будут разъяснены ниже.

Далее мы дадим определения *эллипса*, *гиперболы* и *параболы* и изучим их геометрические свойства. Отметим, что все три линии представляют собой *линии пересечения кругового конуса с плоскостями*, не проходящими через его вершину. А именно, если плоскость пересекает все образующие только одной полости конуса, то в сечении получится эллипс (рис. 1). Если плоскость пересекает образующие обеих полостей конуса, то в сечении получится гипербола (рис. 2). А если плоскость параллельна одной из образующих конуса, то в сечении получится парабола (рис. 3).

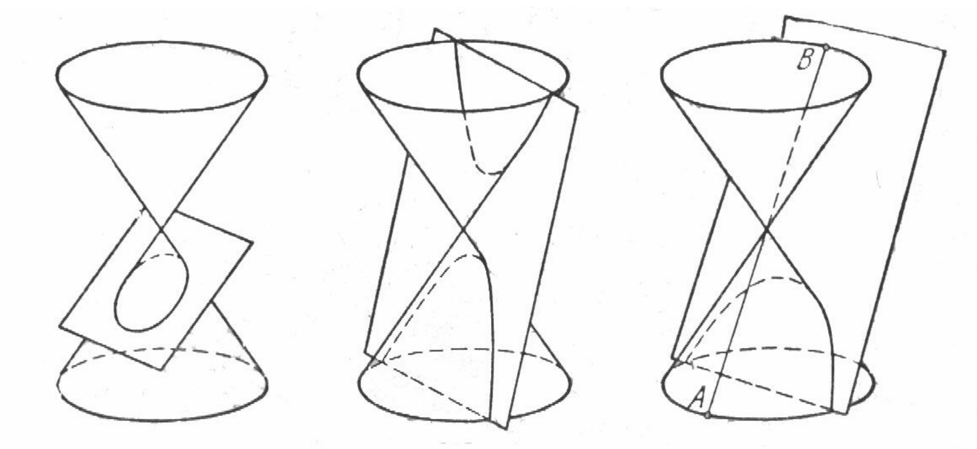

Рисунок 1 Рисунок 2 Рисунок 3

1. Эллипс.

Эллипсом называется геометрическое место точек плоскости, для которых сумма расстояний до двух фиксированных точек плоскости F_1 и F_2, называемых *фокусами*, есть постоянная величина.

Выведем каноническое уравнение эллипса. Выберем систему координат так, чтобы начало координат O находилось в середине отрезка F_1F_2, а ось Ox, являлась продолжением отрезка OF_2 (рис. 4).

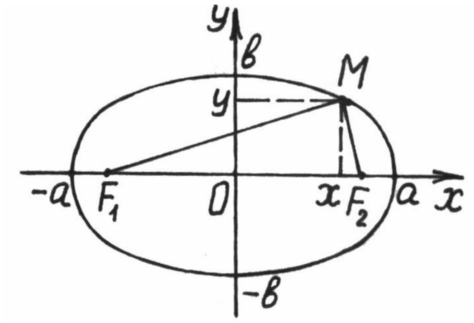

Рисунок 4

Обозначим $|F_1F_2| = 2c$, а сумму расстояний от произвольной точки M до F_1 и F_2 обозначим $2a$. Ясно, что $2a > 2c$. Обозначим $|MF_1| = r_1$, $|MF_2| = r_2$. Величины r_1 и r_2 называются *фокальными радиусами*. Имеем $r_1 + r_2 = 2a$, где $r_1 = \sqrt{(c+x)^2 + y^2}$, $r_2 = \sqrt{(c-x)^2 + y^2}$. Тогда получаем уравнение эллипса:

$$\sqrt{(c+x)^2 + y^2} + \sqrt{(c-x)^2 + y^2} = 2a .$$

Путем стандартных преобразований (избавление от иррациональности) это уравнение приводится к виду:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \qquad (1)$$

где $b^2 = a^2 - c^2$. Полученное уравнение называется *каноническим уравнением эллипса*.

Величины a и b называются *большой и малой полуосями* эллипса. Очевидно, что a и b – это отрезки, отсекаемые эллипсом на координатных осях. Точки пересечения эллипса с координатными осями имеют координаты (a, 0), (–a, 0), (0, b), (0, –b).

Отметим, что если $a = b$, то эллипс представляет собой окружность с центром в начале координат.

Эллипс имеет две взаимно перпендикулярные оси симметрии (главные оси эллипса) и центр симметрии (центр эллипса).

Уравнение вида $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0$ называется уравнением *вырожденного эллипса*, состоящего только из одной точки с координатами (0, 0).

Уравнение вида $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=-1$ называется уравнением *мнимого эллипса*, так как не существует точек с действительными координатами, удовлетворяющих этому уравнению.

Уравнение вида $\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$ называется уравнением *смещенного эллипса*. Центр этого эллипса находится в точке с координатами (x_0, y_0), а оси симметрии параллельны координатным осям.

Заметим, что если вместо x и y в каноническое уравнение эллипса подставить, соответственно, выражения $a\cos t$ и $b\sin t$, то получим верное равенство:

$$\frac{a^2\cos^2 t}{a^2}+\frac{b^2\sin^2 t}{b^2}=1 .$$

Таким образом, уравнения $\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = b\sin t \end{cases}$ являются *параметрическими уравнениями эллипса*.

Эксцентриситетом эллипса называется величина, равная $\varepsilon = \frac{c}{a}$.

Учитывая связь между величинами a, b и c: $b^2 = a^2 - c^2$, можно получить другую формулу для эксцентриситета: $\varepsilon = \sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}$.

Отметим, что эксцентриситет эллипса меньше единицы и равен нулю, если эллипс является окружностью. Чем больше эксцентриситет эллипса, тем больше он вытянут вдоль его большой полуоси.

Директрисой эллипса называется прямая, расположенная перпендикулярно большой оси эллипса на расстоянии $\frac{a}{\varepsilon}$ от его центра.

Эллипс имеет две директрисы, соответствующие двум фокусам, которые расположены вне эллипса (рис. 5). Это следует из того, что $0 < \varepsilon < 1$ и, следовательно, $\frac{a}{\varepsilon} > a$.

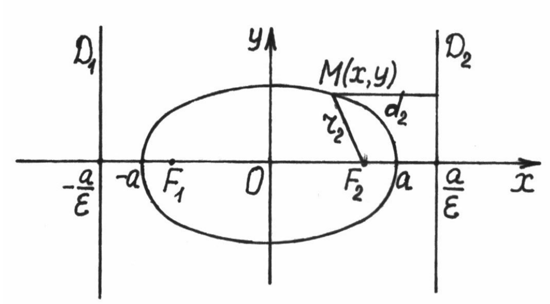

Рисунок 5

Теорема 2. Отношение расстояния r от точки M до фокуса к расстоянию d от этой точки до соответствующей директрисы равно эксцентриситету эллипса, т.е. $\frac{r_1}{d_1}=\varepsilon$ и $\frac{r_2}{d_2}=\varepsilon$.

Доказательство. Докажем теорему для фокуса F_2 и директрисы D_2. Для F_1 и D_1 теорема будет справедлива в силу симметричности эллипса и директрис относительно оси Oy.

Воспользуемся формулой $r_2=\sqrt{(c-x)^2+y^2}$. Подставим в эту формулу y^2 из канонического уравнения: $y^2=b^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)$. Учитывая, что $c=a\varepsilon$, а $b^2=a^2-c^2=a^2-a^2\varepsilon^2$, получим после несложных преобразований: $r_2=a-\varepsilon x$. Расстояние d_2 от точки M до директрисы равно $d_2=\frac{a}{\varepsilon}-x$. Тогда $\frac{r_2}{d_2}=\frac{a-\varepsilon x}{\frac{a}{\varepsilon}-x}=\varepsilon$.

Теорема доказана.

2. Гипербола.

Гиперболой называется геометрическое место точек плоскости, для которых разность расстояний до двух фиксированных точек плоскости F_1 и F_2, называемых *фокусами*, есть постоянная величина (разность берется по абсолютной величине).

Выведем каноническое уравнение гиперболы. Выберем систему координат так, чтобы начало координат O находилось в середине отрезка F_1F_2, а ось Ox, являлось продолжением отрезка OF_2 (рис. 6).

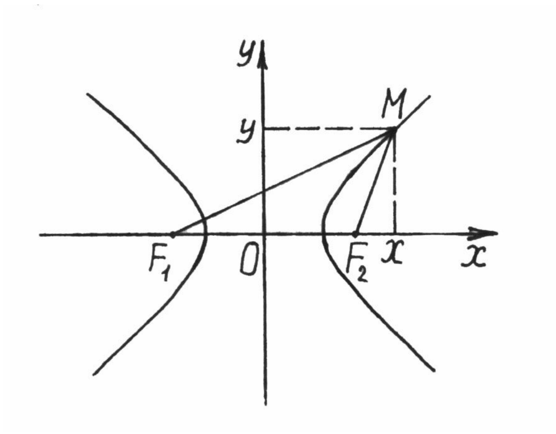

Рисунок 6

Обозначим $|F_1F_2| = 2c$, а разность расстояний от произвольной точки M до F_1 и F_2 обозначим $2a$. Ясно, что $2a < 2c$. Обозначим $|MF_1| = r_1$, $|MF_2| = r_2$. Тогда $|r_1 - r_2| = 2a$, где $r_1 = \sqrt{(c+x)^2 + y^2}$, $r_2 = \sqrt{(c-x)^2 + y^2}$. Тогда получаем уравнение гиперболы:

$$\left|\sqrt{(c+x)^2 + y^2} - \sqrt{(c-x)^2 + y^2}\right| = 2a.$$

Путем стандартных преобразований это уравнение приводится к виду:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \tag{2}$$

где $b^2 = c^2 - a^2$. Полученное уравнение называется *каноническим уравнением гиперболы*. Величины a и b называются *полуосями* гиперболы.

Гипербола имеет две оси симметрии (главные оси гиперболы) и центр симметрии (центр гиперболы). Если гипербола задана каноническим уравнением, то ее оси симметрии совпадают с координатными осями. При этом ось Ox пересекает гиперболу в точках с координатами $(a, 0)$ и $(–a, 0)$, а ось Oy не имеет общих точек с гиперболой.

Рассмотрим теперь прямоугольник, заданный неравенствами $|x| < a$ и $|y| < b$ (рис. 7).

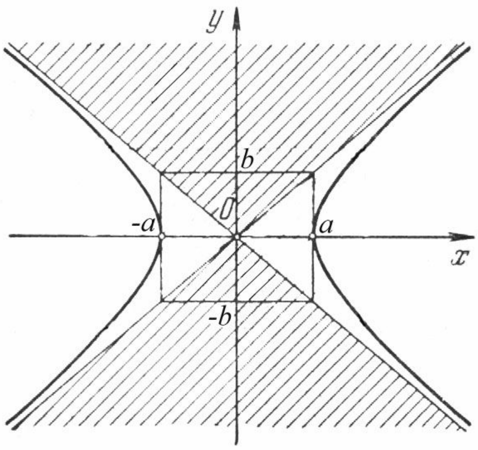

Рисунок 7

Диагонали этого прямоугольника имеют уравнения $y=\frac{b}{a}x$ и $y=-\frac{b}{a}x$. Рассмотрим часть плоскости, заданную неравенством: $|y|>\frac{b}{a}|x|$ (на рис. 7 она заштрихована). Из этого неравенства вытекает, что $\frac{y^2}{b^2}>\frac{x^2}{a^2}$. Тогда $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}<0$. А так как для точек гиперболы выполняется $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$, то в заштрихованной области точек гиперболы нет. Более того, с использованием средств математического анализа можно доказать, что прямые $y=\pm\frac{b}{a}x$ являются *асимптотами* гиперболы, т.е. ветви гиперболы неограниченно приближаются к этим прямым, но не соприкасаются с ними.

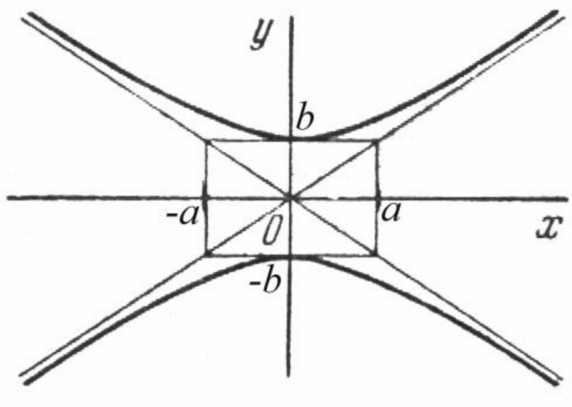

Рисунок 8

Если гипербола задана уравнением $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1$, то она называется *сопряженной гиперболой*. На рис. 8 показано, где располагается сопряженная гипербола.

Уравнение вида $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$ задает на плоскости *пару пересекающихся в начале координат прямых* $y=\pm\frac{b}{a}x$.

Уравнение вида $\frac{(x-x_0)^2}{a^2}-\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$ называется уравнением *смещенной гиперболы*. Центр этой гиперболы находится в точке с координатами (x_0, y_0), а оси симметрии параллельны координатным осям.

Эксцентриситет гиперболы определяется так же, как и для эллипса $\varepsilon=\frac{c}{a}$ или $\varepsilon=\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}$. Ясно, что эксцентриситет гиперболы больше единицы.

Директрисой гиперболы называется прямая, расположенная перпендикулярно оси гиперболы, которая ее пересекает, на расстоянии $\frac{a}{\varepsilon}$ от ее центра.

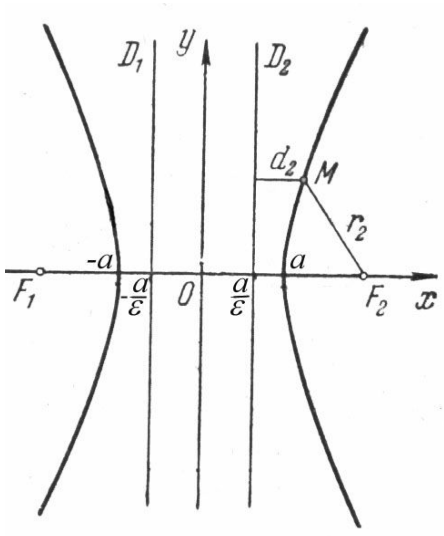

Рисунок 9

Гипербола имеет две директрисы, соответствующие двум фокусам (рис. 9). Обе директрисы не имеют общих точек с гиперболой, так как $\frac{a}{\varepsilon}<a$.

Для гиперболы справедлива теорема, аналогичная теореме 2.

Теорема 3. Отношение расстояния r от точки M до фокуса к расстоянию d от этой точки до соответствующей директрисы равно эксцентриситету гиперболы, т.е. $\frac{r_1}{d_1} = \varepsilon$ и $\frac{r_2}{d_2} = \varepsilon$.

Доказательство аналогично доказательству теоремы 2.

3. Парабола.

Параболой называется геометрическое место точек плоскости, для которых расстояние до некоторой фиксированной точки плоскости F, называемой *фокусом*, равно расстоянию до некоторой фиксированной прямой D, называемой *директрисой* (слово «директриса» означает «направляющая»).

Выведем каноническое уравнение параболы. Выберем систему координат так, чтобы начало координат O находилось в середине перпендикуляра, опущенного из точки F на прямую D, а ось Ox являлась продолжением отрезка OF (рис. 10).

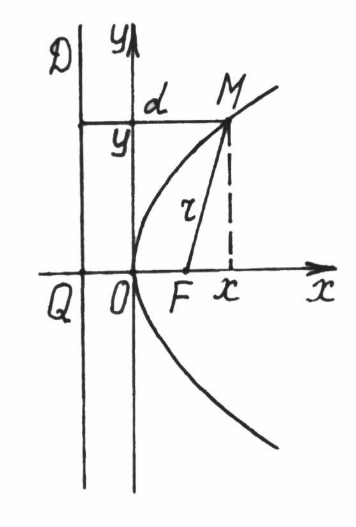

Рисунок 10

Обозначим $|FQ| = p$. Тогда $|OQ| = |OF| = \frac{p}{2}$. Пусть r – расстояние от произвольной точки M до фокуса F, а d – расстояние от точки M до директрисы D. По определению параболы r=d. Очевидно, что $r = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2}$, $d = x + \frac{p}{2}$. Тогда

$$\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2}=x+\frac{p}{2}.$$

Путем стандартных преобразований это уравнение приводится к виду:

$$y^2=2px, \qquad (3)$$

который называется *каноническим уравнением параболы*. Величина p называется *фокальным параметром*.

Парабола имеет одну ось симметрии. Вершиной параболы называется точка пересечения параболы с ее осью симметрии. Если парабола задана каноническим уравнением, то ее ось симметрии будет совпадать с осью Ox.

Если $p > 0$, то парабола называется *восходящей*, если $p < 0$, то она называется *нисходящей*.

Уравнение вида $x^2=2py$ также определяет параболу, которая будет симметрична уже относительно оси Oy.

Уравнение вида $y^2=c$ задает на плоскости *пару параллельных прямых* $y=\pm\sqrt{c}$, если $c > 0$, и пару мнимых параллельных прямых $y=\pm i\sqrt{c}$, если $c<0$. Если $c = 0$, то получаем уравнение оси Ox: $y = 0$.

Уравнение вида $(y-y_0)^2=2p(x-x_0)$ называется уравнением *смещенной параболы*. Вершина этой параболы будет находиться в точке с координатами (x_0, y_0), а ось симметрии будет параллельна оси Ox.

Отметим, что определение параболы связано с ее фокусом и директрисой и отличается от определений эллипса и гиперболы. Основываясь на теоремах 2 и 3, можно дать другие определения эллипса и гиперболы, аналогичные определению параболы.

Геометрическое место точек плоскости, для которых отношение расстояния до некоторой фиксированной точки плоскости, называемой фокусом, к расстоянию до некоторой фиксированной прямой, называемой директрисой, есть постоянная величина, называется эллипсом, если это отношение меньше единицы, и гиперболой, если это отношение больше единицы. Отметим, что в определении параболы это отношение равно единице. Поэтому *эксцентриситет параболы* всегда равен единице.

Замечание. Уравнения смещенных эллипса гиперболы и параболы получается из уравнения второго порядка, не содержащего слагаемого Bxy, с помощью стандартной операции, которая называется выделением полного квадрата. Если же уравнение содержит слагаемое Bxy, то необходимо использовать формулы преобразования координат, а именно поворот координатных осей на некоторый угол, чтобы исчезло слагаемое Bxy, либо использовать теорию квадратичных форм.

Пример.

Привести уравнение кривой второго порядка к каноническому виду и построить ее: $9x^2 - 25y^2 - 18x - 100y - 316 = 0$.

Выделим полные квадраты с переменными x и y:

$$9(x-1)^2 - 25(y+2)^2 - 225 = 0.$$

Перепишем это уравнение в каноническом виде:

$$\frac{(x-1)^2}{25} - \frac{(y+2)^2}{9} = 1.$$

Полученное уравнение является уравнением смещенной гиперболы, центр которой находится в точке с координатами (1, –2). Полуоси гиперболы $a = 5$ и $b = 3$. Для построения гиперболы сначала необходимо отметить центр гиперболы, затем начертить прямоугольник со сторонами 10 и 6, центр которого совпадает с центром гиперболы (рис. 11). Далее надо провести диагонали в полученном прямоугольнике, которые будут являться асимптотами гиперболы, после этого можно построить ветви гиперболы (рис. 12).

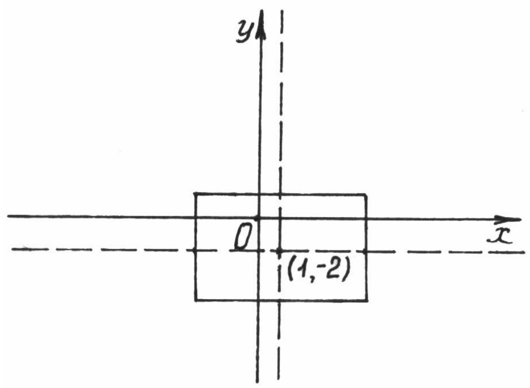

Рисунок 11

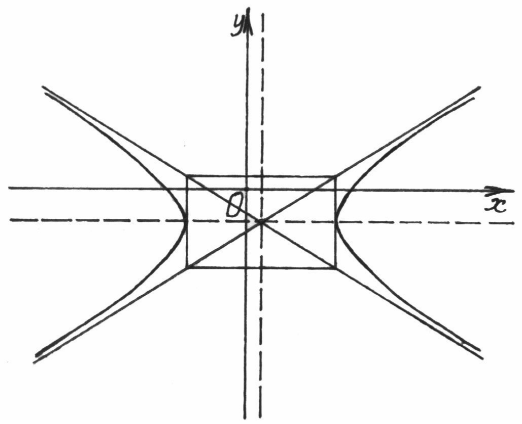

Рисунок 12

4. Полярные уравнения эллипса, гиперболы и параболы.

Рассмотрим некоторую кривую: эллипс, гиперболу или параболу. Пусть F – фокус кривой, D – соответствующая ему директриса, p – расстояние от F до D. Отметим, что в случае гиперболы мы рассматриваем только одну ее ветвь. Пусть полюс полярной системы координат совпадает с F, а полярная ось перпендикулярна директрисе D и направлена, как указано на рис. 13.

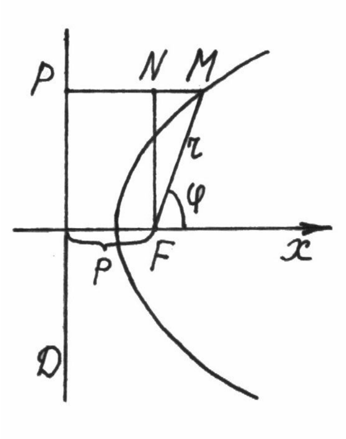

Рисунок 13

Пусть M – произвольная точка на кривой. Согласно определению эллипса, гиперболы и параболы, основанному на фокусе и директрисе, можно записать

$$\frac{|MF|}{|MP|} = \varepsilon,$$

где ε – эксцентриситет кривой. Так как $|MF| = r$, а $|MP| = |NM| + p = r\cos\varphi + p$, то

$$\frac{r}{r\cos\varphi + p} = \varepsilon.$$

Отсюда получаем уравнение

$$r = \frac{p\varepsilon}{1 - \varepsilon\cos\varphi}, \tag{4}$$

которое является *полярным уравнением кривой второго порядка*. Если $0 < \varepsilon < 1$, то получаем уравнение эллипса, если $\varepsilon = 1$, то уравнение параболы, если $\varepsilon > 1$, то уравнение одной ветви гиперболы.

Получим уравнение второй ветви гиперболы (рис. 14).

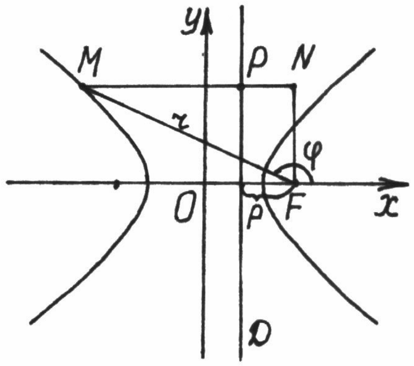

Рисунок 14

Пусть точка M лежит на второй ветви. Тогда

$$|MP| = |MN| - |NP| = r\cos(\pi - \varphi) - p = -r\cos\varphi - p.$$

Таким образом, получаем

$$\frac{|MF|}{|MP|} = \frac{r}{-r\cos\varphi - p} = \varepsilon.$$

Отсюда получаем уравнение второй ветви гиперболы:

$$r = \frac{-p\varepsilon}{1 + \varepsilon\cos\varphi}.$$