## Лекция 9. Плоскость и прямая в пространстве

### Уравнения плоскости в пространстве

*Уравнением поверхности S* называется такое уравнение $\Phi(x, y, z) = 0$, которому удовлетворяют координаты $x$, $y$ и $z$ каждой точки, лежащей на поверхности $S$, и не удовлетворяют координаты ни одной точки, не лежащей на этой поверхности.

Сама поверхность $S$, таким образом, представляет собой геометрическое место точек, координаты которых удовлетворяют данному уравнению. При этом говорят, что поверхность *S определяется* уравнением $\Phi(x, y, z) = 0$.

*Линию в пространстве* естественно определить, как линию пересечения двух поверхностей $\Phi_1(x, y, z) = 0$ и $\Phi_2(x, y, z) = 0$.

Любую линию в пространстве можно определить бесчисленным количеством способов, так как через одну и ту же линию, очевидно, можно провести бесконечно много поверхностей.

Уравнение вида $Ax + By + Cz + D = 0$, где $A$, $B$, $C$ и $D$ – некоторые числа, называется *уравнением первой степени*.

**Теорема.** В декартовой системе координат любое уравнение первой степени определяет некоторую плоскость и, наоборот, любая плоскость в декартовой системе координат определяется уравнением первой степени.

Рассмотрим далее различные виды уравнений плоскости.

**1. Общее уравнение плоскости.**

Уравнение вида

$$Ax + By + Cz + D = 0 \tag{1}$$

называется *общим уравнением плоскости*. Здесь предполагается, что хотя бы один из коэффициентов $A$, $B$, $C$ или $D$ отличен от нуля.

Ясно, что уравнение (1) имеет хотя бы одно решение, т.е. существует точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$, координаты которой удовлетворяют уравнению (1):

$$Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0.$$

Вычитая последнее равенство из равенства (1), получим

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$$

В векторном виде это равенство запишется так:

$$\boldsymbol{n} \cdot \overline{M_0M} = 0,$$

где векторы $\boldsymbol{n}$ и $\overline{M_0M}$ имеют координаты $\boldsymbol{n}$ $(A, B, C)$ и $\overline{M_0M}(x - x_0, y - y_0, z - z_0)$.

Это означает, что векторы $\boldsymbol{n}$ и $\overline{M_0M}$ перпендикулярны. А так как точка $M$ выбрана произвольно, то вектор $\boldsymbol{n}$ перпендикулярен плоскости, заданной уравнением (1). Вектор $\boldsymbol{n}$ называется вектором *нормали* к плоскости.

Таким образом, мы выяснили геометрический смысл коэффициентов $A$, $B$ и $C$ в общем уравнении плоскости. Коэффициенты $A$, $B$ и $C$ являются *координатами вектора нормали к плоскости*.

**2. Неполные уравнения плоскости.**

Общее уравнение плоскости называется *полным*, если все коэффициенты $A$, $B$, $C$ и $D$ отличны от нуля. В противном случае уравнение плоскости называется *неполным*.

Рассмотрим различные виды неполных уравнений плоскости:

1) $D = 0$, уравнение $Ax + By + Cz = 0$ определяет плоскость, проходящую через начало координат;

2) $A = 0$, уравнение $By + Cz + D = 0$ определяет плоскость, параллельную оси $Ox$, так как нормаль к этой плоскости $\boldsymbol{n}(0, B, C)$ перпендикулярна оси $Ox$;

3) $B = 0$, уравнение $Ax + Cz + D = 0$ определяет плоскость, параллельную оси $Oy$, так как нормаль к этой плоскости $\boldsymbol{n}(A, 0, C)$ перпендикулярна оси $Oy$;

4) $C = 0$, уравнение $Ax + By + D = 0$ определяет плоскость, параллельную оси $Oz$, так как нормаль к этой плоскости $\boldsymbol{n}(A, B, 0)$ перпендикулярна оси $Oz$;

5) $A = 0$, $B = 0$, уравнение $Cz + D = 0$ определяет плоскость, параллельную координатной плоскости $Oxy$, так как нормаль к этой плоскости $\boldsymbol{n}$ $(0, 0, C)$ перпендикулярна сразу двум осям $Ox$ и $Oy$;

6) $A = 0$, $C = 0$, уравнение $By + D = 0$ определяет плоскость, параллельную координатной плоскости $Oxz$, так как нормаль к этой плоскости $\boldsymbol{n}$ $(0, B, 0)$ перпендикулярна сразу двум осям $Ox$ и $Oz$;

7) $B = 0$, $C = 0$, уравнение $Ax + D = 0$ определяет плоскость, параллельную координатной плоскости $Oyz$, так как нормаль к этой плоскости $\boldsymbol{n}$ $(A, 0, 0)$ перпендикулярна сразу двум осям $Oy$ и $Oz$;

8) $A = 0$, $B = 0$, $D = 0$, уравнение $Cz = 0$ равносильно уравнению $z = 0$ и определяет координатную плоскость $Oxy$;

9) $A = 0$, $C = 0$, $D = 0$, уравнение $By = 0$ равносильно уравнению $y = 0$ и определяет координатную плоскость $Oxz$;

10) $B = 0$, $C = 0$, $D = 0$, уравнение $Ax = 0$ равносильно уравнению $x = 0$ и определяет координатную плоскость $Oyz$.

**3. Уравнение плоскости в отрезках.**

Рассмотрим полное уравнение плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$. Мы можем переписать его в виде:

$$\frac{x}{-D/A} + \frac{y}{-D/B} + \frac{z}{-D/C} = 1.$$

Обозначим $a = -D/A$, $b = -D/B$, $c = -D/C$. Получим уравнение:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1. \qquad (2)$$

Это уравнение называется *уравнением плоскости в отрезках*.

Заметим, что числа $a$, $b$ и $c$ имеют простой геометрический смысл: они равны алгебраическим величинам отрезков, которые плоскость отсекает на координатных осях $Ox$, $Oy$ и $Oz$, соответственно (рис. 1).

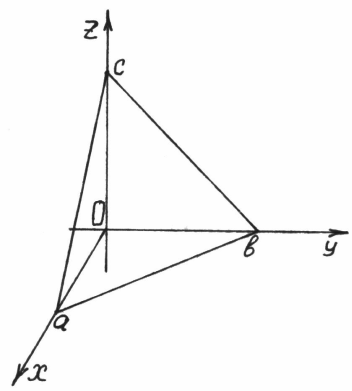


Рисунок 1

**4. Уравнение плоскости, проходящей через три точки, не лежащие на одной прямой.**

Пусть $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ и $M_3(x_3, y_3, z_3)$ – три различные точки, не лежащие на одной прямой. Известно, что через три точки всегда можно провести плоскость и она будет единственной, если точки не лежат на одной прямой.

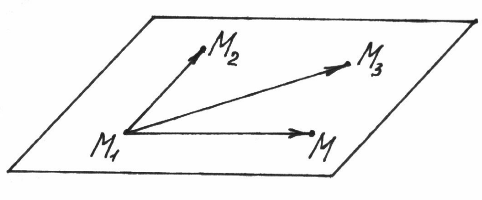


Рисунок 2

Пусть $M(x, y, z)$ – произвольная точка, лежащая в этой же плоскости. Рассмотрим три вектора $\overline{M_1M_2}$, $\overline{M_1M_3}$ и $\overline{M_1M}$ (рис. 2). Найдем координаты этих векторов:

$$\overline{M_1M_2}(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1),$$

$$\overline{M_1M_3}(x_3 - x_1, y_3 - y_1, z_3 - z_1),$$

$$\overline{M_1M}(x - x_1, y - y_1, z - z_1).$$

Ясно, что эти три вектора будут компланарны тогда и только тогда, когда точка $M$ принадлежит той же плоскости, что и $M_1$, $M_2$ и $M_3$. Запишем условие компланарности этих векторов:

$$\overline{M_1M} \cdot \overline{M_1M_2} \cdot \overline{M_1M_3} = 0.$$

Запишем смешанное произведение в координатном виде:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0. \qquad (3)$$

Полученное уравнение и есть *уравнение плоскости, проходящей через три точки.*

**Пример.**

Записать уравнение плоскости, проходящей через три точки $M_1(-1, 1, 2)$, $M_2(0, -1, 3)$ и $M_3(1, 0, 2)$.

Воспользуемся формулой, полученной выше:

$$\begin{vmatrix} x+1 & y-1 & z-2 \\ 0+1 & -1-1 & 3-2 \\ 1+1 & 0-1 & 2-2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x+1 & y-1 & z-2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Раскрывая определитель, получим искомое уравнение плоскости:

$$x + 2y + 3z - 7 = 0.$$

**5. Уравнение плоскости, параллельной данному вектору и проходящей через две данные точки.**

Пусть дан вектор ***a*** ($m$, $n$, $l$) и две различные точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$. Если векторы ***a*** и $\overline{M_1M_2}$ не коллинеарны, то через точки $M_1$ и $M_2$ можно провести единственную плоскость, параллельную вектору ***a*** (рис. 3.25).

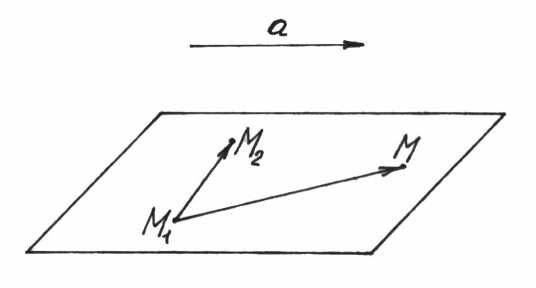


Рисунок 3

Точка $M(x,\ y,\ z)$ будет принадлежать этой плоскости тогда и только тогда, когда векторы $\boldsymbol{a}$, $\overline{M_1M_2}$ и $\overline{M_1M}$ компланарны. Воспользуемся условием компланарности векторов:

$$\overline{M_1M}\cdot\overline{M_1M_2}\cdot\boldsymbol{a}=0.$$

Переписав его в координатном виде, получим *уравнение плоскости, проходящей через две данные точки параллельно данному вектору*:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ m & n & l \end{vmatrix}=0\,. \qquad (4)$$

**6. Уравнение плоскости, параллельной двум неколлинеарным векторам и проходящей через точку.**

Пусть даны два вектора $\boldsymbol{a}_1(m_1,n_1,l_1)$ и $\boldsymbol{a}_2(m_2,n_2,l_2)$ и точка $M_1(x_1,y_1,z_1)$. Если векторы $\boldsymbol{a}_1$ и $\boldsymbol{a}_2$ не коллинеарны, то через точку $M_1$ можно провести единственную плоскость, параллельную векторам $\boldsymbol{a}_1$ и $\boldsymbol{a}_2$ (рис. 4).

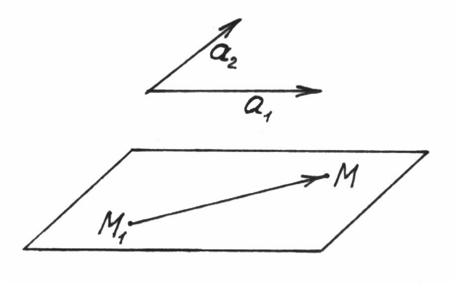


Рисунок 4

Снова, как и в предыдущем случае, точка $M(x,\ y,\ z)$ будет принадлежать этой плоскости тогда и только тогда, когда векторы $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$ и $\overline{M_1M}$ компланарны. Из условия компланарности трех векторов получаем *уравнение плоскости, параллельной двум векторам и проходящей через данную точку*:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ m_1 & n_1 & l_1 \\ m_2 & n_2 & l_2 \end{vmatrix} = 0. \qquad (5)$$

**7. Уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ перпендикулярно вектору *n* ($A$, $B$, $C$).**

Точка $M(x, y, z)$ лежит на плоскости тогда и только тогда, когда векторы $\overline{M_0M}(x-x_0, y-y_0, z-z_0)$ и ***n*** перпендикулярны. А это равносильно тому, что их скалярное произведение равно нулю:

$$\overline{M_0M} \cdot \boldsymbol{n} = 0.$$

Записывая это равенство в координатном виде, получаем уравнение:

$$A(x-x_0) + B(y-y_0) + C(z-z_0) = 0, \qquad (6)$$

которое является *уравнением плоскости, заданной лежащей на ней точкой и вектором нормали*.

**8. Нормальное уравнение плоскости.**

Рассмотрим произвольную плоскость. Проведем из начала координат прямую, перпендикулярную данной плоскости. Пусть $P$ – точка пересечения плоскости и прямой. Вектор $\overline{OP}$ является вектором нормали к данной плоскости. Пусть ***n*** – единичный вектор на прямой $OP$, направление которого совпадает с направлением вектора $\overline{OP}$ (рис. 5). Координаты единичного вектора ***n*** совпадают с его направляющими косинусами: ***n***(cosα, cosβ, cosγ).

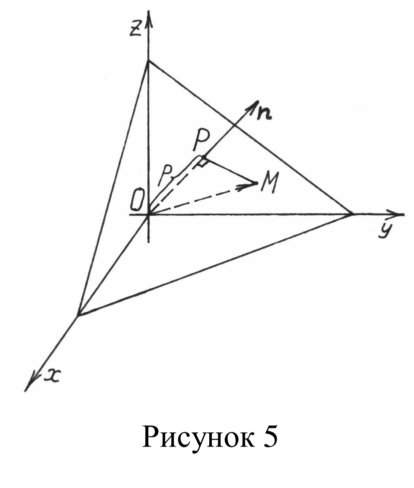


Рисунок 5

Пусть $M(x, y, z)$ – произвольная точка на данной плоскости. Тогда

$$пр_{\boldsymbol{n}}\overline{OM} = OP.$$

Обозначим $p$ – расстояние от начала координат до рассматриваемой плоскости, т.е. $p = OP$. Тогда

$$пр_{\boldsymbol{n}}\overline{OM} = p.$$

По свойству скалярного произведения имеем

$$\boldsymbol{n}\cdot\overline{OM} = |\boldsymbol{n}|\cdot пр_{\boldsymbol{n}}\overline{OM}.$$

Так как $|\boldsymbol{n}| = 1$, то $\boldsymbol{n}\cdot\overline{OM} = пр_{\boldsymbol{n}}\overline{OM} = p$. Записывая скалярное произведение в координатном виде, получаем

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma = p,$$

или

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0. \qquad (7)$$

Это и есть *нормальное уравнение плоскости*.

Заметим, что $p$ не может быть отрицательным, так как это расстояние от точки $O$ до плоскости.

Пусть теперь $M'(x', y', z')$ – произвольная точка пространства. Обозначим $d$ – расстояние от точки $M'$ до данной плоскости. Подставим координаты точки $M'$ в нормальное уравнение плоскости. Выражение $x'\cos\alpha + y'\cos\beta + {}+z'\cos\gamma = \boldsymbol{n}\cdot\overline{OM'}$ есть проекция вектора $\overline{OM'}$ на $\boldsymbol{n}$ (рис. 6), т.е.

$$ON = пр_{\boldsymbol{n}}\overline{OM'} = x'\cos\alpha + y'\cos\beta + z'\cos\gamma.$$

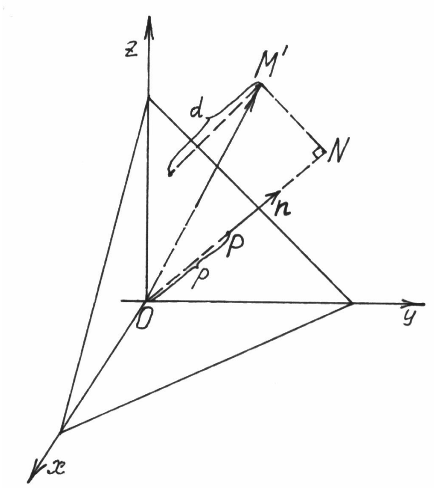


Рисунок 6

Если $M'$ и начало координат $O$ лежат по разные стороны от плоскости, то $ON = p + d$ и тогда $d = x'\cos\alpha + y'\cos\beta + z'\cos\gamma - p$. Если $M'$ и $O$ лежат по одну сторону от плоскости, то, как нетрудно видеть, $ON = p - d$ (напомним, что $ON$ – есть алгебраическая величина вектора $\overline{ON}$ на оси, заданной вектором $\boldsymbol{n}$ и она будет отрицательна, если $p < d$). Тогда $-d = x'\cos\alpha + y'\cos\beta + z'\cos\gamma - p$.

На основании этого получаем *формулу для нахождения расстояния от точки* $M'(x', y')$ *до плоскости*, заданной нормальным уравнением:

$$d = \left| x'\cos\alpha + y'\cos\beta + z'\cos\gamma - p \right|.$$

Выражение, стоящее под знаком модуля $x'\cos\alpha + y'\cos\beta + z'\cos\gamma - p$ называется *отклонением* точки $M'$ от данной плоскости и обозначается $d(M')$. По знаку отклонения $d(M')$ можно определить взаимное расположение точек $M'$ и $O$ относительно плоскости: если $d(M') > 0$, то $M'$ и $O$ лежат по разные стороны от плоскости; если $d(M') <$ 0, то $M'$ и $O$ лежат по одну сторону от плоскости.

Осталось указать алгоритм приведения общего уравнения плоскости к нормальному виду.

Пусть имеется общее уравнение плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$. Необходимо найти нормальное уравнение $x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0$ этой плоскости. Так как эти два уравнения определяют одну и ту же плоскость, то их левые части должны быть пропорциональны. Обозначим коэффициент пропорциональности $\mu$, тогда:

$$\mu A = \cos\alpha, \quad \mu B = \cos\beta, \quad \mu C = \cos\gamma, \quad \mu D = -p.$$

Так как $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$, то из первых трех равенств получаем: $\mu^2(A^2+B^2+C^2)=1$ или

$$\mu=\pm\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

Коэффициент $\mu$ называется *нормирующим множителем.* Знак нормирующего множителя определяется из равенства $\mu\, D = -\, p$. Так как $p$ – неотрицательное число, то знаки $\mu$ и $D$ должны быть противоположны. Таким образом, знак нормирующего множителя противоположен знаку свободного коэффициента $D$.

Теперь мы можем сформулировать правило приведения общего уравнения к нормальному виду: *для этого надо умножить все уравнение на нормирующий множитель, знак которого противоположен знаку свободного коэффициента*.

Используя нормирующий множитель, можно получить *формулу для нахождения расстояния от точки* $M'(x', y', z')$ *до плоскости*, заданной общим уравнением:

$$d=\left|\frac{Ax'+By'+Cz'+D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\right| \tag{8}$$

**Пример.**

Написать уравнение плоскости $\alpha$, проходящей через точку $M_0(1,-1,2)$ и перпендикулярно двум непараллельным плоскостям:

$$\alpha_1: \quad 2x-y+z-3=0 \quad \text{и} \quad \alpha_2: \quad x+2y-z+4=0.$$

Поскольку плоскость $\alpha$ перпендикулярна $\alpha_1$ и $\alpha_2$, то векторы нормалей к $\alpha_1$ и $\alpha_2$ будут параллельны плоскости $\alpha$. Найдем векторы нормалей к $\alpha_1$ и $\alpha_2$: $\boldsymbol{n}_1(2, -1, 1)$ и $\boldsymbol{n}_2(1, 2, -1)$. Воспользуемся теперь уравнением (3.28) плоскости, параллельной двум неколлинеарным векторам $\boldsymbol{n}_1$ и $\boldsymbol{n}_2$ и проходящей через точку $M_0$:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y+1 & z-2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix}=0.$$

Отсюда, вычисляя определитель, получаем уравнение плоскости $\alpha$:

$$-x + 3y + 5z - 6 = 0.$$

Уравнения прямой в пространстве

**1. Общие уравнения прямой.**

Линию в пространстве можно определять как линию пересечения двух поверхностей. Следовательно, и прямая определяется как линия пересечения двух плоскостей:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0, \end{cases} \tag{9}$$

причем плоскости не параллельны, и не совпадают, т.е. хотя бы одно из равенств в соотношении $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$ не должно выполняться.

**2. Канонические уравнения прямой.**

Любой ненулевой вектор $\boldsymbol{a}(m,\ n,\ l)$, параллельный данной прямой, называется *направляющим вектором прямой*.

Пусть необходимо найти уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и параллельно вектору $\boldsymbol{a}(m, n, l)$.

Точка $M(x,\ y,\ z)$ лежит на данной прямой тогда и только тогда, когда векторы $\overline{M_0M}(x - x_0, y - y_0, z - z_0)$ и $\boldsymbol{a}(m,\ n,\ l)$ коллинеарны. Тогда, используя условие коллинеарности двух векторов, можно записать:

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{l}. \tag{10}$$

Это и есть *канонические уравнения прямой*. Таким образом, канонические уравнения задаются направляющим вектором и точкой, лежащей на прямой.

Заметим, что каноническое уравнение следует понимать как пропорцию. Это означает, что если один из знаменателей окажется равным нулю, то нулю должен будет равняться и соответствующий числитель.

Например, уравнения

$$\frac{x-1}{0} = \frac{y-2}{3} = \frac{z+1}{0}$$

определяют прямую, являющуюся линией пересечения плоскостей $x = 1$ и $z = -1$.

Покажем, как по общим уравнениям прямой (9) записать канонические уравнения этой прямой.

Для этого необходимо найти точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$, лежащую на этой прямой, и направляющий вектор $\boldsymbol{a}(m, n, l)$ этой прямой. Так как плоскости в системе (9), определяющие эту прямую, не параллельны, то система имеет бесконечно много решений. И одно из них можно получить, задав произвольно значение $x_0$ и найдя соответствующие ему $y_0$ и $z_0$. Можно, например, взять $x_0 = 0$. Тогда система примет вид:

$$\begin{cases} B_1 y + C_1 z + D_1 = 0, \\ B_2 y + C_2 z + D_2 = 0. \end{cases}$$

Решая эту систему, найдем значения $y_0$ и $z_0$.

Для нахождения координат направляющего вектора заметим, что этот вектор параллелен линии пересечения плоскостей из системы (9), а, следовательно, перпендикулярен каждому из нормальных векторов $\boldsymbol{n}_1(A_1, B_1, C_1)$ и $\boldsymbol{n}_2(A_2, B_2, C_2)$ этих плоскостей. Поэтому можно положить $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{n}_1 \times \boldsymbol{n}_2$. Вычислив векторное произведение, найдем координаты направляющего вектора $\boldsymbol{a}(m, n, l)$. Осталось подставить найденные значения $x_0, y_0, z_0$, $m$, $n$ и $l$ в канонические уравнения прямой (10).

**3. Уравнения прямой, проходящей через две данные точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$.**

Воспользуемся каноническими уравнениями прямой. В качестве направляющего вектора возьмем вектор $\overline{M_1 M_2}(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$, а в качестве точки, лежащей на прямой, возьмем любую из точек $M_1$ или $M_2$. Получим две системы уравнений:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1},$$
$$\frac{x - x_2}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_2}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_2}{z_2 - z_1}. \qquad (11)$$

Эти системы эквивалентны и определяют прямую, проходящую через точки $M_1$ и $M_2$.

**4. Параметрические уравнения прямой.**

Рассмотрим канонические уравнения прямой и примем за параметр $t$ каждое из отношений в равенствах (10):

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{l} = t.$$

Получим:

$$\frac{x-x_0}{m}=t, \qquad \frac{y-y_0}{n}=t, \qquad \frac{z-z_0}{l}=t\,.$$

Выразим из этих равенств $x$, $y$ и $z$:

$$\begin{cases} x = mt + x_0, \\ y = nt + y_0, \\ z = lt + z_0. \end{cases} \tag{12}$$

Эти уравнения являются *параметрическими уравнениями прямой*.

**Примеры**.

1. Написать уравнения прямой, проходящей через точку $M_0(1,-2,3)$ перпендикулярно плоскости $\alpha$: $2x - 3y + z - 1 = 0$.

Направляющим вектором этой прямой служит нормальный вектор плоскости $\alpha$: $\boldsymbol{n}(2,\ -3,\ 1)$. Воспользуемся каноническими уравнениями прямой (3.33), тогда уравнения искомой прямой примут вид:

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{-3}=\frac{z-3}{1}\,.$$

2. Написать уравнение плоскости $\alpha$, проходящей через данную прямую $L$: $\frac{x-1}{2}=\frac{y+3}{1}=\frac{z}{-2}$ и через точку $M(1, -1, 4)$, не лежащую на прямой $L$.

Из уравнения прямой $L$ найдем направляющий вектор $\boldsymbol{a}$ $(2, 1, -2)$ и лежащую на ней точку $M_0(1,-3,0)$. Ясно, что плоскость $\alpha$ будет проходить через точки $M$ и $M_0$, параллельно вектору $\boldsymbol{a}$. Воспользуемся уравнением (4) плоскости, параллельной данному вектору и проходящей через две данные точки:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y+3 & z-0 \\ 1-1 & -1+3 & 4-0 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix}=0,$$

$$\begin{vmatrix} x-1 & y+3 & z \\ 0 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix}=-8x+8y-4z+32=0.$$

Уравнение искомой плоскости имеет вид: $-2x + 2y - z + 8 = 0$.

3. Найти расстояние от точки $M(0, -2, 1)$ до прямой, заданной уравнениями:

$$\frac{x-2}{3}=\frac{y+4}{1}=\frac{z-1}{2}\,.$$

Проведем через точку $M$ плоскость $\alpha$, перпендикулярную данной прямой. Направляющий вектор прямой $\boldsymbol{a}$ (3, 1, 2) будет при этом вектором нормали к плоскости $\alpha$. Воспользуемся уравнением плоскости, заданной нормальным вектором и точкой:

$$\alpha: \quad 3\cdot(x-0)+1\cdot(y+2)+2\cdot(z-1)=0$$

или

$$\alpha: \quad 3x+y+2z=0.$$

Найдем теперь точку $P$ пересечения плоскости $\alpha$ и данной прямой (рис. 7). Для этого сначала перепишем уравнение прямой в параметрическом виде:

$$\begin{cases} x=3t+2, \\ y=t-4, \\ z=2t+1. \end{cases}$$

Теперь подставим $x$, $y$ и $z$, выраженные через параметр $t$, в уравнение плоскости $\alpha$, и найдем значение параметра $t$, соответствующее точке пересечения:

$$3(3t+2)+(t-4)+2(2t+1)=0.$$

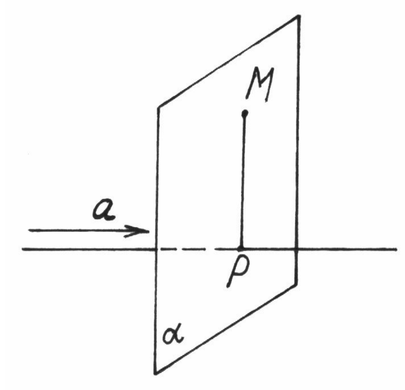


Рисунок 7

Отсюда получаем: $t=-\dfrac{2}{7}$. Найдем теперь координаты точки $P$:

$$x=3t+2=\frac{8}{7}, \qquad y=t-4=-\frac{30}{7}, \qquad z=2t+1=\frac{3}{7}.$$

Осталось найти расстояние между точками $P$ и $M$. Это и будет расстояние от точки $M$ до данной прямой:

$$|PM|=\sqrt{\left(0-\frac{8}{7}\right)^2+\left(-2+\frac{30}{7}\right)^2+\left(1-\frac{3}{7}\right)^2}=\frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{7}}.$$

## Взаимное расположение прямых и плоскостей в пространстве

Пусть две прямые в пространстве заданы своими каноническими уравнениями:

$$L_1: \quad \frac{x-x_1}{l_1}=\frac{y-y_1}{m_1}=\frac{z-z_1}{n_1},$$

$$L_2: \quad \frac{x-x_2}{l_2}=\frac{y-y_2}{m_2}=\frac{z-z_2}{n_2}.$$

*Условие параллельности прямых* $L_1$ и $L_2$ эквивалентно условию коллинеарности направляющих векторов $\boldsymbol{a}_1(l_1, m_1, n_1)$ и $\boldsymbol{a}_2(l_2, m_2, n_2)$ этих прямых:

$$\frac{l_1}{l_2}=\frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2}$$

*Условие перпендикулярности прямых* $L_1$ и $L_2$ эквивалентно равенству нулю скалярного произведения направляющих векторов $\boldsymbol{a}_1(l_1, m_1, n_1)$ и $\boldsymbol{a}_2(l_2, m_2, n_2)$, т.е. $\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{a}_2$ = 0 или

$$l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 = 0.$$

*Угол между прямыми* $L_1$ и $L_2$ можно определить, как угол между направляющими векторами $\boldsymbol{a}_1(l_1, m_1, n_1)$ и $\boldsymbol{a}_2(l_2, m_2, n_2)$, т.е., пользуясь определением скалярного произведения, получаем

$$\cos\alpha = \frac{l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2}{\sqrt{l_1^2+m_1^2+n_1^2}\cdot\sqrt{l_2^2+m_2^2+n_2^2}}.$$

Пусть теперь в пространстве заданы плоскость $\alpha$ прямая $L$:

$$\alpha: \quad Ax+By+Cz+D=0,$$

$$L: \quad \frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}.$$

*Условие параллельности прямой $L$ и плоскости* $\alpha$ эквивалентно условию перпендикулярности нормали $\boldsymbol{n}$ ($A$, $B$, $C$) к плоскости $\alpha$ и направляющего вектора $\boldsymbol{a}$ ($l$, $m$, $n$) прямой $L$ и выражается равенством нулю скалярного произведения векторов $\boldsymbol{n}$ и $\boldsymbol{a}$, т.е.

$$Al + Bm + Cn = 0$$

*Условие перпендикулярности прямой L и плоскости* $\alpha$ эквивалентно условию коллинеарности векторов ***n*** и ***a***, т.е.

$$\frac{A}{l} = \frac{B}{m} = \frac{C}{n}.$$

Как легко убедиться, *условие принадлежности прямой L к плоскости* $\alpha$ выражается двумя равенствами:

$$\begin{cases} Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0, \\ Al + Bm + Cn = 0, \end{cases}$$

первое из которых означает, что точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$, через которую проходит прямая, принадлежит плоскости $\alpha$, а второе – есть условие параллельности прямой и плоскости.

Посмотрим, как находить угол $\varphi$ между прямой $L$ и плоскостью $\alpha$. Из скалярного произведения векторов ***a*** и ***n*** можно найти угол $\psi$ (рис. 8), который дополняет угол $\varphi$ до прямого угла.

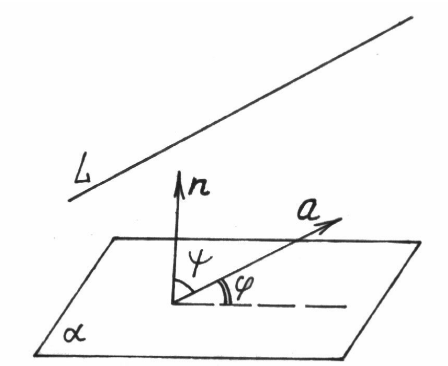


Рисунок 8

Имеем

$$\cos\psi = \frac{\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{n}|\cdot|\boldsymbol{a}|},$$

$$\cos\psi = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = \sin\varphi.$$

Таким образом, получаем формулу для нахождения *угла* $\varphi$ *между прямой L и плоскостью* $\alpha$:

$$\sin\varphi = \frac{Al + Bm + Cn}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\cdot\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}$$

Пусть в пространстве заданы две плоскости $\alpha_1$ и $\alpha_2$ своими общими уравнениями:

$$\alpha_1: \quad A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0,$$

$$\alpha_2: \quad A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0.$$

Условия параллельности, перпендикулярности $\alpha_1$ и $\alpha_2$, а также угол между $\alpha_1$ и $\alpha_2$ определяются аналогично, используя векторы нормалей $\boldsymbol{n}_1(A_1, B_1, C_1)$ и $\boldsymbol{n}_2(A_2, B_2, C_2)$ к плоскостям:

*условие параллельности*: $\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{C_1}{C_2}$;

*условие перпендикулярности*: $A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$;

*угол между плоскостями*: $\cos\varphi = \dfrac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$.