Лекция 7. Прямая на плоскости

Одним из важнейших вопросов аналитической геометрии является вопрос об аналитическом представлении линии на плоскости и в пространстве, а также поверхности в пространстве. Мы ограничимся рассмотрением линий и поверхностей первого и второго порядков.

Уравнения прямой на плоскости

Уравнением данной линии Г на плоскости называется такое уравнение $F(x, y) = 0$, которому удовлетворяют координаты каждой точки линии $Г$, и не удовлетворяют координаты никакой другой точки.

Линией, определенной данным уравнением, называется геометрическое место точек плоскости, координаты которых удовлетворяют данному уравнению.

Уравнение вида $Ax + By + C = 0$, где A, B и C – некоторые числа, называется *уравнением первой степени*.

Теорема 1. В декартовой системе координат каждое уравнение первой степени определяет некоторую прямую и, обратно, каждая прямая определяется уравнением первой степени.

Рассмотрим различные виды уравнений прямой на плоскости.

1. Общее уравнение прямой.

Уравнение вида

$$Ax + By + C = 0 \qquad (1)$$

называется *общим уравнением прямой*.

Если хотя бы один из коэффициентов A или B отличен от нуля, то существует решение x_0, y_0 уравнения (1) такое, что

$$Ax_0 + By_0 + C = 0 .$$

Вычтем из равенства (1) последнее равенство. Получим

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0 .$$

Перепишем это равенство в векторном виде:

$$\boldsymbol{n} \cdot \overline{M_0M} = 0,$$

где векторы $\boldsymbol{n}$ и $\overline{M_0M}$ имеют координаты $\boldsymbol{n}(A, B)$ и $\overline{M_0M}(x - x_0, y - y_0)$.

Последнее равенство равносильно тому, что векторы $\boldsymbol{n}$ и $\overline{M_0M}$ перпендикулярны. Следовательно, точка $M(x, y)$ лежит на прямой, перпендикулярной вектору $\boldsymbol{n}$ и проходящей через точку $M_0(x_0, y_0)$. Но точка $M(x, y)$ – произвольная точка прямой. Поэтому прямая, определенная уравнением (1), будет перпендикулярна вектору $\boldsymbol{n}$, который мы будем называть *нормалью* к прямой.

Таким образом, коэффициенты A и B в общем уравнении прямой являются *координатами вектора нормали к этой прямой*.

2. Неполные уравнения прямой.

Общее уравнение прямой называется *неполным*, если хотя бы один из коэффициентов A, B или C равен нулю. В противном случае уравнение называется *полным*.

Существует пять видов неполных уравнений:

1) $C = 0$, уравнение $Ax + By = 0$ определяет прямую, проходящую через начало координат, так как значения $x = 0$ и $y = 0$ удовлетворяют этому уравнению;

2) $B = 0$, уравнение $Ax + C = 0$ определяет прямую, параллельную оси Oy, так как нормаль к этой прямой $\boldsymbol{n}(A, 0)$ является нормалью и к оси Oy;

3) $A = 0$, уравнение $By + C = 0$ определяет прямую, параллельную оси Ox, так как нормаль к этой прямой $\boldsymbol{n}(0, B)$ является нормалью и к оси Ox;

4) $B = 0$, $C = 0$, уравнение $Ax = 0$ равносильно уравнению $x = 0$ и определяет ось Oy;

5) $A = 0$, $C = 0$, уравнение $By = 0$ равносильно уравнению $y = 0$ и определяет ось Ox.

3. Уравнение прямой в отрезках.

Рассмотрим полное уравнение прямой $Ax + By + C = 0$. Мы можем переписать его в виде:

$$\frac{x}{-C/A} + \frac{y}{-C/B} = 1.$$

Обозначим $a = -C/A$, $\quad b = -C/B$. Получим уравнение:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1. \qquad (2)$$

Это уравнение называется *уравнением прямой в отрезках*.

Заметим, что числа a и b равны алгебраическим величинам отрезков, OA и OB, которые прямая отсекает на координатных осях Ox и Oy, соответственно (рис. 1).

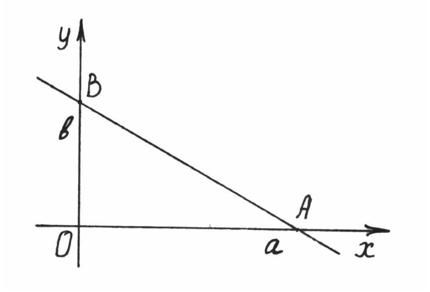

Рисунок 1

Уравнение прямой в отрезках удобно использовать при построении этой прямой.

4. Каноническое уравнение прямой.

Любой ненулевой вектор $\boldsymbol{a}(m,\ n)$, параллельный данной прямой, называется *направляющим вектором прямой*.

Пусть необходимо найти уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0)$ параллельно вектору $\boldsymbol{a}(m, n)$.

Если точка $M(x, y)$ лежит на данной прямой, то векторы $\overline{M_0M}(x - x_0, y - y_0)$ и $\boldsymbol{a}(m, n)$ коллинеарны. Используя условие коллинеарности, можно записать:

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n}. \tag{3}$$

Это и есть *каноническое уравнение прямой*.

Заметим, что каноническое уравнение следует понимать как пропорцию. Это означает, что если один из знаменателей окажется равным нулю, то нулю должен будет равняться и соответствующий числитель.

Например, уравнение

$$\frac{x-5}{0} = \frac{y-1}{2}$$

определяет прямую $x = 5$, параллельную оси Oy.

5. Уравнение прямой, проходящей через две данные точки $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$.

Воспользуемся каноническим уравнением прямой. В качестве направляющего вектора возьмем вектор $\overline{M_1M_2}(x_2 - x_1, y_2 - y_1)$, а в качестве точки, лежащей на прямой, возьмем любую из точек M_1 или M_2. Получим два уравнения:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1} \quad \text{и} \quad \frac{x-x_2}{x_2-x_1}=\frac{y-y_2}{y_2-y_1}. \tag{4}$$

Эти уравнения эквивалентны и определяют прямую, проходящую через точки M_1 и M_2.

6. Уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0)$ перпендикулярно вектору $\boldsymbol{n}(A, B)$.

Точка $M(x, y)$ лежит на прямой тогда и только тогда, когда векторы $\overline{M_0M}(x-x_0, y-y_0)$ и $\boldsymbol{n}$ перпендикулярны. А это равносильно тому, что их скалярное произведение равно нулю:

$$\overline{M_0M}\cdot\boldsymbol{n}=0.$$

Записывая это равенство в координатном виде, получаем уравнение:

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)=0, \tag{5}$$

которое является уравнением прямой, заданной лежащей на ней точкой и вектором нормали.

7. Параметрические уравнения прямой.

Параметрическими уравнениями линии на плоскости называются уравнения

$$\begin{cases} x=\varphi(t), \\ y=\psi(t), \end{cases}$$

где переменные координаты x и y точек этой линии выражены через третью вспомогательную переменную t, которая называется *параметром*.

Рассмотрим каноническое уравнение прямой и введём параметр t следующим образом: $\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=t$.

Тогда

$$\begin{cases} x=mt+x_0, \\ y=nt+y_0. \end{cases} \tag{6}$$

Эти уравнения являются *параметрическими уравнениями прямой*.

8. Прямая с угловым коэффициентом.

Назовем *углом наклона прямой к оси Ox* угол α ($0\le\alpha<\pi$), на который надо повернуть вокруг точки пересечения прямой и оси Ox против часовой стрелки ось Ox до её совпадения с прямой (см. рис. 2).

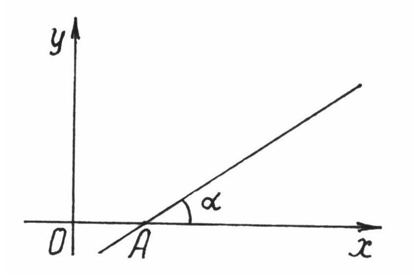

Рисунок 2

Тангенс угла наклона прямой к оси Ox назовем *угловым коэффициентом* этой прямой. Обозначим его k. Таким образом, $k = \operatorname{tg}\alpha$.

Пусть b – длина отрезка OB, который прямая отсекает на оси Oy. Пусть M – произвольная точка на прямой с координатами (x, y), а C -точка пересечения прямой, параллельной оси Ox, проходящей через точку B, и прямой, параллельной оси Oy, проходящей через точку M (рис. 3 и 4). Рассмотрим прямоугольный треугольник BCM. Легко видеть, что длина BC равна $|x|$, а длина MC равна $|y - b|$. Причем, если угол α наклона прямой к оси Ox острый (рис. 3), то величины x и $y - b$ либо обе положительны, либо обе отрицательны. А если угол α наклона прямой к оси Ox тупой (рис. 4), то величины x и $y - b$ разных знаков.

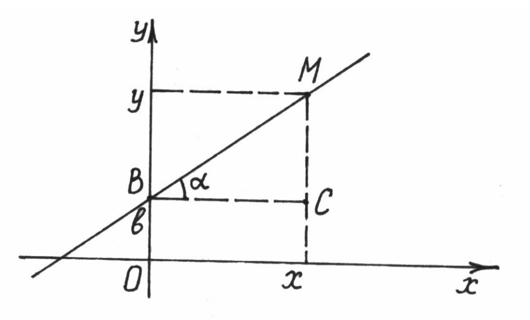

Рисунок. 3

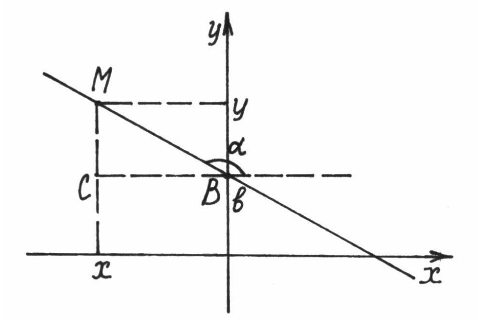

Рисунок 4

По свойству прямоугольного треугольника получаем: если α – острый, то $\angle MBC = \alpha$ и $tg\alpha = \frac{|MC|}{|BC|} = \frac{|y-b|}{|x|} = \frac{y-b}{x}$; если α – тупой, то $\angle MBC = \pi - \alpha$ и $tg(\pi - \alpha) = \frac{|MC|}{|BC|} = \frac{|y-b|}{|x|} = -\frac{y-b}{x}$. Таким образом, в любом случае $tg\alpha = \frac{y-b}{x}$ или $k = \frac{y-b}{x}$.

Отсюда получаем *уравнение прямой с угловым коэффициентом*:

$$y = kx + b. \quad (7)$$

Отметим, что если прямая параллельна оси Ox, то ее угол α наклона к оси Ox считается равным нулю, тогда $k = \operatorname{tg} \alpha = 0$ и уравнение примет вид $y = b$.

Если прямая параллельна оси Oy, то ее угол наклона к оси Ox равен $\pi/2$ и для этой прямой не существует уравнения с угловым коэффициентом.

Пусть необходимо записать уравнение прямой с заданным угловым коэффициентом *k*, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0)$. Поскольку точка M_0 лежит на прямой, то ее координаты удовлетворяют уравнению с угловым коэффициентом:

$$y_0 = kx_0 + b.$$

Отсюда можно выразить неизвестное b:

$$b = y_0 - kx_0.$$

Подставив b в уравнение (3.7), после преобразования получим:

$$y - y_0 = k(x - x_0) \quad (8)$$

– *уравнение прямой, заданной лежащей на ней точкой и угловым коэффициентом*.

9. Нормальное уравнение прямой.

Рассмотрим произвольную прямую. Проведем из начала координат прямую, перпендикулярную данной. Пусть P – точка пересечения прямых. Вектор $\overline{OP}$ является вектором нормали к данной прямой. Пусть $\boldsymbol{n}$ – единичный вектор на прямой OP, направление которого совпадает с направлением вектора $\overline{OP}$. Если α – угол наклона вектора $\boldsymbol{n}$ к оси Ox, то $\boldsymbol{n}(\cos\alpha, \sin\alpha)$.

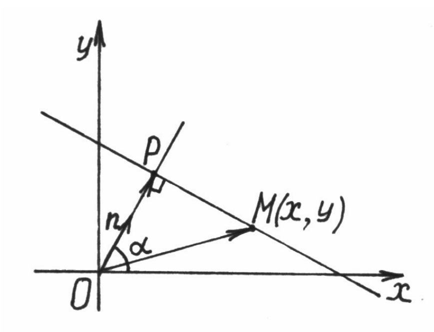

Рисунок 5

Пусть $M(x, y)$ – произвольная точка на данной прямой (рис. 5). Тогда, очевидно,

$$пр_{\boldsymbol{n}}\overline{OM} = OP\,.$$

Обозначим p – расстояние от начала координат до рассматриваемой прямой, т.е. $p = OP$. Тогда

$$пр_{\boldsymbol{n}}\overline{OM} = p\,.$$

Используя свойства скалярного произведения, находим

$$\boldsymbol{n}\cdot\overline{OM} = |\boldsymbol{n}|\cdot пр_{\boldsymbol{n}}\overline{OM}\,.$$

Так как $|\boldsymbol{n}| = 1$, то $\boldsymbol{n}\cdot\overline{OM} = пр_{\boldsymbol{n}}\overline{OM} = p$. Записывая скалярное произведение в координатном виде, получаем

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha = p,$$

или

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0. \qquad (9)$$

Это и есть *нормальное уравнение прямой*.

Заметим, что p не может быть отрицательным, так как это расстояние от точки O до прямой.

Пусть $M'(x', y')$ – произвольная точка плоскости. Обозначим d – расстояние от точки M' до данной прямой. Подставим координаты точки M' в нормальное уравнение прямой. Выражение $x'\cos\alpha + y'\sin\alpha = \boldsymbol{n}\cdot\overline{OM'}$ есть проекция вектора $\overline{OM'}$ на $\boldsymbol{n}$ (рис. 3.6), т.е.

$$ON = пр_{\boldsymbol{n}}\overline{OM'} = x'\cos\alpha + y'\sin\alpha\,.$$

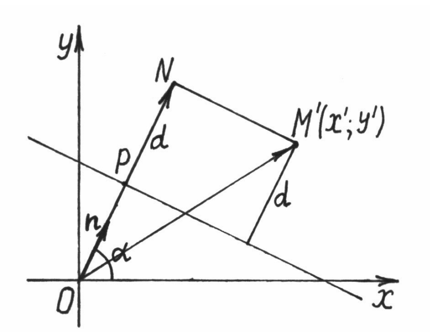

Рисунок. 6

Если M' и начало координат O лежат по разные стороны от прямой, то $ON = p + d$ и тогда $d = x'\cos\alpha + y'\sin\alpha - p$. Если M' и O лежат по одну сторону от прямой, то, как нетрудно видеть, $ON = p - d$ (напомним, что ON – есть алгебраическая величина вектора $\overline{ON}$ на оси $\boldsymbol{n}$ и она будет отрицательна, если $p < d$). Тогда $-d = x'\cos\alpha + y'\sin\alpha - p$.

На основании этого получаем *формулу для нахождения расстояния от точки* $M'(x', y')$ *до прямой*, заданной нормальным уравнением:

$$d = |x'\cos\alpha + y'\sin\alpha - p|.$$

Выражение, стоящее под знаком модуля называется *отклонением* точки M' от данной прямой и обозначается $d(M')$. По знаку отклонения $d(M')$ можно определить взаимное расположение точек M' и O относительно прямой: если $d(M') > 0$, то M' и O лежат по разные стороны от прямой; если $d(M') < 0$, то M' и O лежат по одну сторону от прямой.

Осталось указать алгоритм приведения общего уравнения прямой к нормальному виду.

Пусть имеется общее уравнение прямой $Ax + By + C = 0$. Необходимо найти нормальное уравнение $x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0$ этой прямой. Так как эти два уравнения определяют одну и ту же прямую, то их левые части должны быть пропорциональны. Обозначим коэффициент пропорциональности μ, тогда

$$\mu A = \cos\alpha, \quad \mu B = \sin\alpha, \quad \mu C = -p.$$

Из первых двух равенств получаем: $\mu^2(A^2 + B^2) = 1$ или

$$\mu = \pm\frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Коэффициент μ называется *нормирующим множителем.* Знак нормирующего множителя определяется из равенства $\mu C = -p$. Так как p – неотрицательное число, то знаки μ и C должны быть противоположны. Таким образом, знак нормирующего множителя противоположен знаку свободного коэффициента C.

Теперь мы можем сформулировать правило приведения общего уравнения к нормальному виду: *для этого надо умножить все уравнение на нормирующий множитель, знак которого противоположен знаку свободного коэффициента*.

Используя нормирующий множитель, можно получить *формулу для нахождения расстояния от точки* $M'(x', y')$ *до прямой*, заданной общим уравнением:

$$d = \left| \frac{Ax' + By' + C}{\sqrt{A^2 + B^2}} \right| \qquad (10)$$

Примеры.

1. Написать уравнение прямой α, проходящей через точку $M(2, -1)$, перпендикулярно другой прямой β: $2x + 5y - 3 = 0$.

Вектор нормали $\boldsymbol{n}(2, 5)$ прямой β будет параллелен прямой α, и поэтому будет для нее направляющим вектором. Воспользуемся каноническим уравнением прямой (3):

$$\frac{x-2}{2} = \frac{y+1}{5}.$$

Получаем уравнение прямой α: $5x - 2y - 12 = 0$.

2. Найти расстояние между параллельными прямыми α: $3x - y + 4 = 0$ и β: $6x - 2y - 7 = 0$.

Выберем на прямой α произвольную точку M и найдем расстояние от точки M до прямой β. Это и будет расстояние между прямыми α и β.

Чтобы определить координаты точки M, выберем произвольно x и, подставив его в уравнение прямой α, найдем соответствующее значение y. При $x = 0$ находим $y = 3x + 4 = 4$. Таким образом, точка $M(0, 4)$ лежит на прямой α.

Найдем расстояние от точки M до прямой β по формуле (10): $d = \left| \frac{6 \cdot 0 - 2 \cdot 4 - 7}{\sqrt{36 + 4}} \right| = \frac{15}{2\sqrt{10}}$.

Взаимное расположение прямых на плоскости

Пусть две прямые заданы общими уравнениями:

$$A_1 x + B_1 y + C_1 = 0,$$
$$A_2 x + B_2 y + C_2 = 0.$$

Условие параллельности этих прямых эквивалентно условию коллинеарности векторов нормалей $\boldsymbol{n}_1(A_1, B_1)$ и $\boldsymbol{n}_2(A_2, B_2)$ к этим прямым, т.е.

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}. \qquad (11)$$

Условие перпендикулярности этих прямых эквивалентно равенству нулю скалярного произведения векторов нормалей $\boldsymbol{n}_1(A_1, B_1)$ и $\boldsymbol{n}_2(A_2, B_2)$, т.е.

$$\boldsymbol{n}_1 \cdot \boldsymbol{n}_2 = 0,$$

или

$$A_1A_2+B_1B_2=0\,. \tag{12}$$

Угол между прямыми равен углу между нормалями к этим прямым, который определяется по формуле

$$\cos\alpha=\frac{\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2}{|\boldsymbol{n}_1|\cdot|\boldsymbol{n}_2|}=\frac{A_1A_2+B_1B_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2}}\,. \tag{13}$$

Абсолютно аналогично обстоит дело, если прямые заданы каноническими уравнениями

$$\frac{x-x_1}{m_1}=\frac{y-y_1}{n_1},\quad \frac{x-x_2}{m_2}=\frac{y-y_2}{n_2}\,.$$

Условие параллельности, перпендикулярности, а также угол между прямыми можно определить, используя направляющие векторы прямых $\boldsymbol{a}_1(m_1,n_1)$ и $\boldsymbol{a}_2(m_2,n_2)$:

условие параллельности: $$\frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2}\,; \tag{14}$$

условие перпендикулярности: $$m_1m_2+n_1n_2=0\,; \tag{15}$$

угол между прямыми: $$\cos\alpha=\frac{m_1m_2+n_1n_2}{\sqrt{m_1^2+n_1^2}\cdot\sqrt{m_2^2+n_2^2}}\,. \tag{16}$$

Пусть теперь прямые заданы уравнениями с угловыми коэффициентами:

$$y=k_1x+b_1,\quad y=k_2x+b_2\,.$$

Условие параллельности прямых эквивалентно равенству их угловых коэффициентов:

$$k_1=k_2\,. \tag{17}$$

Угол α между прямыми, (рис. 7), находится следующим образом: $\alpha=|\alpha_2-\alpha_1|$. Тогда

$$tg\alpha=tg|\alpha_2-\alpha_1|=|tg(\alpha_2-\alpha_1)|=\left|\frac{tg\alpha_2-tg\alpha_1}{1+tg\alpha_2 tg\alpha_1}\right|=\left|\frac{k_2-k_1}{1+k_2k_1}\right|.$$

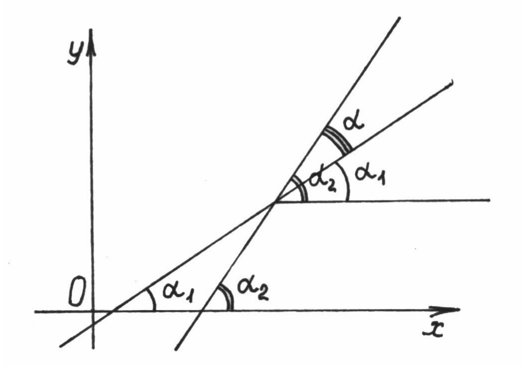

Рисунок 7

Таким образом, получаем формулу для вычисления *угла между прямыми*:

$$tg\alpha = \left|\frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}\right|. \qquad (18)$$

Используя эту формулу, можно получить условие перпендикулярности прямых. Если прямые перпендикулярны, то $\alpha = 90°$ и $\mathrm{tg}\alpha$ не существует. А это возможно только в том случае, если знаменатель обращается в нуль, т.е. $1 + k_1 k_2 = 0$. Отсюда получаем *условие перпендикулярности прямых*:

$$k_1 = -\frac{1}{k_2}. \qquad (19)$$

Пример.

1. Написать уравнение прямой, проходящей через точку $M(1, -2)$ и составляющей угол в 45° с прямой $y = 2x + 5$.

Ясно, что такую прямую можно провести двумя способами (рис. 8):

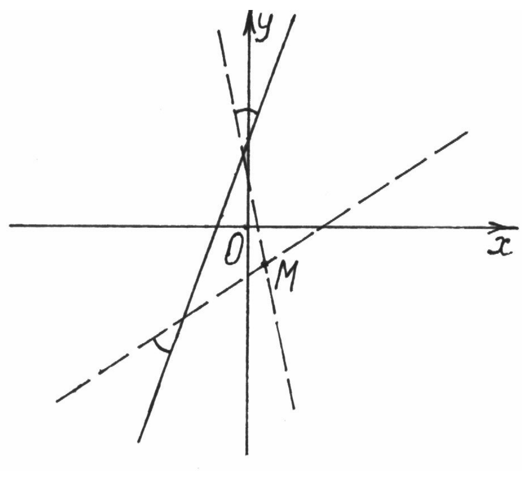

Рисунок 8

Воспользуемся формулой (18) для вычисления угла между прямыми, заданными уравнениями с угловыми коэффициентами, причем имеем tgα = 1, $k_1 = 2$. Тогда $1 = \left|\dfrac{k_2 - 2}{1 + 2k_2}\right|$.

Это уравнение эквивалентно двум уравнениям:

$$\frac{k_2 - 2}{1 + 2k_2} = 1 \quad \text{или} \quad \frac{k_2 - 2}{1 + 2k_2} = -1.$$

Решая эти уравнения, получаем два разных значения углового коэффициента искомой прямой: $k_2 = -3$ или $k_2 = 1/3$.

Воспользуемся теперь уравнением (8) прямой с угловым коэффициентом, проходящей через заданную точку. Получим два варианта искомой прямой:

$$y + 2 = -3(x - 1) \quad \text{или} \quad y + 2 = \frac{1}{3}(x - 1).$$

Окончательно получаем

$$y = -3x + 1 \quad \text{или} \quad y = \frac{1}{3}x - \frac{7}{3}.$$