Прямая линия на плоскости

1. Общее уравнение прямой.

Уравнение вида

$$Ax + By + C = 0 \qquad (6.1)$$

называется *общим уравнением прямой*. Коэффициенты A и B в уравнении (6.1) являются *координатами вектора нормали к этой прямой*.

2. Уравнение прямой в отрезках.

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \qquad (6.2)$$

Заметим, что числа a и b равны алгебраическим величинам отрезков, которые прямая отсекает на координатных осях Ox и Oy, соответственно (см. рис. 6.1).

3. Каноническое уравнение прямой.

Любой ненулевой вектор $\boldsymbol{a}(m, n)$, параллельный данной прямой, называется *направляющим вектором прямой*.

Каноническое уравнение прямой – это есть уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0)$ и параллельно вектору $\boldsymbol{a}(m, n)$:

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} \qquad (6.3)$$

4. Уравнение прямой, проходящей через две данные точки $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$.

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} \quad \text{или} \quad \frac{x - x_2}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_2}{y_2 - y_1} \qquad (6.4)$$

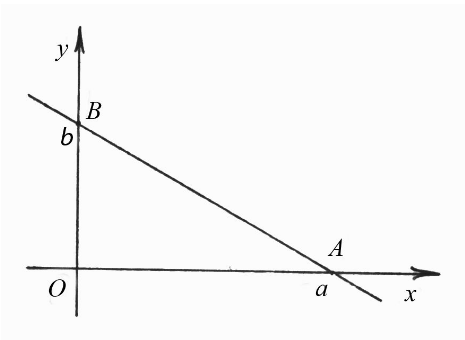

Рис. 6.1

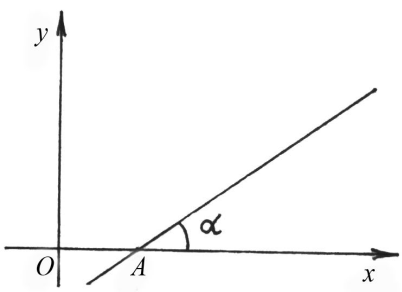

Рис. 6.2

5. Уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0)$ **перпендикулярно вектору** $\boldsymbol{n}(A, B)$.

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0 \qquad (6.5)$$

6. Параметрические уравнения прямой.

$$\begin{cases} x = mt + x_0, \\ y = nt + y_0. \end{cases} \qquad (6.6)$$

7. Прямая с угловым коэффициентом.

Назовем *углом наклона прямой к оси* Ox угол α, на который надо повернуть положительную полуось Ox, чтобы она совпала с данной прямой (см. рис. 6.2).

Тангенс угла наклона прямой к оси Ox назовем *угловым коэффициентом* этой прямой. Обозначим его k. Таким образом, $k = \operatorname{tg} \alpha$.

Уравнение прямой с угловым коэффициентом имеет вид:

$$y = kx + b \qquad (6.7)$$

где b – алгебраическая величина отрезка OB, который прямая отсекает на оси Oy.

Уравнение прямой с заданным угловым коэффициентом k и проходящей через точку $M_0(x_0, y_0)$ имеет вид

$$y - y_0 = k(x - x_0) \qquad (6.8)$$

8. Нормальное уравнение прямой.

Рассмотрим произвольную прямую. Проведем из начала координат перпендикуляр к данной прямой. Если α – угол наклона этого перпендикуляра к оси Ox, а p – расстояние от начала координат до рассматриваемой прямой, то *нормальное уравнение прямой* имеет вид:

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha - p = 0 \qquad (6.9)$$

Заметим, что p не может быть отрицательным, так как это расстояние от точки O до прямой.

Для того, чтобы привести общее уравнение прямой (6.1) к нормальному виду (6.9) *необходимо умножить все уравнение* $Ax + By + C = 0$ *на нормирующий множитель* $\mu = \pm \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}}$, *знак которого противоположен знаку свободного коэффициента*.

9. Расстояние от точки $M'(x', y')$ до прямой, заданной общим уравнением.

$$d = \left| \frac{Ax' + By' + C}{\sqrt{A^2 + B^2}} \right| \qquad (6.10)$$

10. Условия параллельности и перпендикулярности прямых. Нахождение угла между прямыми.

1) Пусть две прямые заданы общими уравнениями: $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2 = 0$.

Условие параллельности этих прямых эквивалентно условию коллинеарности векторов нормалей к этим прямым $\boldsymbol{n}_1(A_1, B_1)$ и $\boldsymbol{n}_2(A_2, B_2)$, т.е.

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \tag{6.11}$$

Условие перпендикулярности этих прямых эквивалентно равенству нулю скалярного произведения векторов нормалей $\boldsymbol{n}_1(A_1, B_1)$ и $\boldsymbol{n}_2(A_2, B_2)$, т.е. $\boldsymbol{n}_1 \cdot \boldsymbol{n}_2 = 0$ или

$$A_1A_2 + B_1B_2 = 0 \tag{6.12}$$

Угол между прямыми равен углу между нормалями к этим прямым, который определяется по формуле:

$$\cos\alpha = \frac{\boldsymbol{n}_1 \cdot \boldsymbol{n}_2}{|\boldsymbol{n}_1| \cdot |\boldsymbol{n}_2|} = \frac{A_1A_2 + B_1B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2}} \tag{6.13}$$

2) Абсолютно аналогично обстоит дело, если прямые заданы каноническими уравнениями: $\dfrac{x - x_1}{m_1} = \dfrac{y - y_1}{n_1}$, $\dfrac{x - x_2}{m_2} = \dfrac{y - y_2}{n_2}$.

Условие параллельности, перпендикулярности, а также угол между прямыми можно определить, используя направляющие векторы прямых $\boldsymbol{a}_1(m_1, n_1)$ и $\boldsymbol{a}_2(m_2, n_2)$.

Условие параллельности: $$\frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} \tag{6.14}$$

Условие перпендикулярности: $$m_1m_2 + n_1n_2 = 0 \tag{6.15}$$

Угол между прямыми: $$\cos\alpha = \frac{m_1m_2 + n_1n_2}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2} \cdot \sqrt{m_2^2 + n_2^2}} \tag{6.16}$$

3) Пусть теперь прямые заданы уравнениями с угловыми коэффициентами: $y = k_1x + b_1$, $y = k_2x + b_2$.

Условие параллельности прямых $$k_1 = k_2 \tag{6.17}$$

Угол между прямыми находится по формуле: $$\mathrm{tg}\alpha = \left|\frac{k_2 - k_1}{1 + k_1k_2}\right| \tag{6.18}$$

Условие перпендикулярности прямых: $k_1 = -\dfrac{1}{k_2}$ (6.19)

Примеры решения задач

1. Составить уравнение прямой линии, отсекающей на оси ординат отрезок, величина которого равна 2 , и наклонённой к оси абсцисс под углом в 45°.

Решение: Здесь $b = 2$ и $k = tg45° = 1$. Следовательно, используя (6.7), получаем уравнение $y = x + 2$.

2. Написать уравнение с угловым коэффициентом для прямой линии, заданной уравнением $2x + 3y + 7 = 0$.

Решение: Разрешив данное уравнение относительно y, получим:

$$y = -\frac{2}{3}x - \frac{7}{3}.$$

Отсюда следует, что угловой коэффициент прямой $k = -\dfrac{2}{3}$, а величина отрезка, отсекаемого ею на оси ординат, $b = -\dfrac{7}{3}$.

3. Составить уравнение прямой, проходящей через точку (–3; 4) и наклонённой к оси Ox под углом в 135°.

Решение: Используем (6.8). Здесь $x_0 = -3$, $y_0 = 4$, $k = tg135° = -1$. Следовательно, искомое уравнение будет

$$y - 4 = -1\ (\ x + 3\ ),$$

или

$$x + y - 1 = 0.$$

4. Составить уравнение прямой линии, проходящей через точки $M\left(-\dfrac{1}{2};\dfrac{3}{2}\right)$ и $N(2;1)$.

Решение: Составим уравнение прямой линии по двум точкам $\left(-\dfrac{1}{2};\dfrac{3}{2}\right)$ и (2;1) (формула (6.4)). Искомое уравнение будет $\dfrac{y-\frac{3}{2}}{1-\frac{3}{2}} = \dfrac{x+\frac{1}{2}}{2+\frac{1}{2}}$, или $\dfrac{y-\frac{3}{2}}{-\frac{1}{2}} = \dfrac{x+\frac{1}{2}}{\frac{5}{2}}$, или $\dfrac{y-\frac{3}{2}}{-1} = \dfrac{x+\frac{1}{2}}{5}$, откуда $5y - \dfrac{15}{2} = -x - \dfrac{1}{2}$, или $x + 5y - 7 = 0$.

5. Уравнение прямой $2x - 3y + 2 = 0$ написать в отрезках.

Решение: Перенося свободный член данного уравнения в правую часть равенства, получим:

$$2x - 3y = -2.$$

Разделив обе части равенства на –2, будем иметь:

$$-\frac{2x}{2} + \frac{3y}{2} = 1, \quad \text{или} \quad \frac{x}{-1} + \frac{y}{\frac{2}{3}} = 1.$$

6. Уравнение прямой линии $3x - 4y - 5 = 0$ привести к нормальному виду.

Решение: Нормирующий множитель равен: $\mu = \dfrac{1}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \dfrac{1}{5}$.

Умножая на него данное уравнение, получим:

$$\frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y - 1 = 0.$$

Для данной прямой имеем: $p = 1$, $cos\alpha = \dfrac{3}{5}$, $sin\alpha = -\dfrac{4}{5}$.

7. Найти угол между прямыми $y = 2x - 3$ и $3x + y - 2 = 0$.

Решение: Воспользуемся формулой (6.18). Пусть k_1 – угловой коэффициент прямой $y = 2x - 3$, $k_1 = 2$, k_2 – угловой коэффициент прямой $3x + y - 2 = 0$, $k_2 = -3$. Тогда $tg\varphi = \dfrac{-3-2}{1-2\cdot 3} = 1$, откуда $\varphi = 45°$.

8. Найти уравнения двух прямых, проходящих через точку $M_0(1;4)$, если одна перпендикулярна, а другая параллельна прямой l, заданной уравнением $x - 2y + 4 = 0$.

Решение: Обозначим l_1 и l_2 прямые, первая из которых параллельна, а вторая перпендикулярна прямой l. Вектор нормали $\boldsymbol{n} = (1; -2)$ является нормалью к прямой l_1 и направляющим вектором к прямой l_2.

Воспользуемся формулой (6.5): l_1: $(x-1) - 2(y-4) = 0$ или $x - 2y + 7 = 0$.

Далее воспользуемся формулой (6.3): l_2: $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-4}{-2}$ или $2x + y - 6 = 0$.

8. Составить уравнение прямой l, проходящей через точку $M_1(6; 4)$ и точку пересечения прямых $x + y - 3 = 0$, $x - 2y - 6 = 0$.

Решение: Координаты точки пересечения дает решение системы уравнений: $\begin{cases} x+y &= 3, \\ x-2y &= 6. \end{cases}$ Решая эту систему, находим $M_2(4;\ -1)$. Имеем координаты двух точек и используем формулу (6.4). Получаем $\frac{x-6}{4-6}=\frac{y-4}{-1-4}$ или

$5x - 2y - 20 = 0$.

9. Найти расстояние между параллельными прямыми l_1: $3x - y + 2 = 0$ и l_2: $6x - 2y - 7 = 0$.

Решение: Выберем произвольную точку на l_1. Пусть $x = 0$, тогда $y = 2$ или $M_0(0;\ 2)$. Расстояние между прямыми l_1 и l_2 – это и будет расстояние от точки $M_0(0;\ 2)$ до прямой l_2. Воспользуемся формулой (6.10):

$$d = \frac{|6\cdot 0+(-2)\cdot 2-7|}{\sqrt{6^2+(-2)^2}} = \frac{11}{\sqrt{40}}.$$

10. Даны вершины ΔABC: $A(2;\ 1)$, $B(-1;\ -1)$, $C(3;\ 2)$. Составить уравнение высоты AM.

Решение: Запишем уравнение прямой, проходящей через две точки B и C, используя формулу (6.4), получаем $\frac{x+1}{3+1}=\frac{y+1}{2+1}$ или BC: $3x - 4y - 1 = 0$, т.е. угловой коэффициент прямой BC будет k_{BC} = = $\frac{3}{4}$. Прямая AM перпендикулярна прямой BC, следовательно, используя (6.19), получаем угловой коэффициент прямой AM: $k_{AM} = -\frac{1}{k_{BC}} = -\frac{4}{3}$. Используем теперь формулу (6.8):

$$y - 1 = -\frac{4}{3}\,(x-2) \quad \text{или} \quad AM:\ 4x + 3y - 11 = 0.$$